

## Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 18.6.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia. **Attenzione:** le risposte *non sufficientemente motivate*, o quelle che *contengono solo conti senza spiegazioni*, **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare.

**Esercizio 1.** (*scrivere solo i risultati*) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & 21 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Si calcoli il polinomio caratteristico di  $A$  e i suoi autovalori. (2 punti)

(2) Si calcolino basi di tutti gli autospazi di  $A$ , e si dica se  $A$  è diagonalizzabile. (3 punti)

(3) Si trovi un vettore  $v \in \mathbb{R}^4$  in modo che  $v$  non sia un autovettore di  $A$ , ma  $Av$  sia un autovettore di  $A$ . (2 punti)

**Esercizio 2.** (*scrivere solo i risultati*) Si consideri la famiglia di coniche dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$

$$tx^2 + 2txy - y^2 - 2y + t$$

a) Si determinino i valori di  $t$  per i quali si ottiene una parabola non degenerata<sup>1</sup>, e quelli per i quali si ottiene un'iperbole non degenerata<sup>2</sup>. (4 punti)

b) Si consideri la conica corrispondente al parametro  $t = 1$  e se ne determini l'equazione canonica. (3 punti)

<sup>1</sup>Cioè con equazione canonica del tipo  $aX^2 + bY = 0$  con  $a, b \neq 0$ .

<sup>2</sup>Cioè con equazione canonica del tipo  $aX^2 + bY^2 + c = 0$  con  $ab < 0$  e  $c \neq 0$ .

**Esercizio 3.** (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Nello spazio delle matrici due per due  $\text{Mat}(2 \times 2)$  si trovino delle basi dei sottospazi

$$U = \{X \in \text{Mat}(2 \times 2) \mid AX = 0\} \quad V = \{Y \in \text{Mat}(2 \times 2) \mid YA = 0\}$$

e dell'intersezione  $U \cap V$

(4 punti)

b) Si consideri ora l'applicazione  $f: \text{Mat}(2 \times 2) \rightarrow \text{Mat}(2 \times 2)$  definita da  $f(X) = AX$ , dove  $A$  è la matrice del punto precedente. Si mostri che  $f$  è lineare e si trovi l'immagine di  $f$ . È vero che  $\text{Im } f = \text{Ker } f$  ?

(4 punti)

**Esercizio 4.** (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Siano dati i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e il piano

$$\pi: -2x - y + 2z = 1$$

in  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Si trovi un'equazione cartesiana del piano  $\pi'$  contenente  $p$  e  $q$  e ortogonale a  $\pi$ . (2 punti)
- (2) Si trovino equazioni cartesiane dei due piani  $\pi'_1, \pi'_2$  paralleli a  $\pi$  e tangenti alla sfera di centro  $q$  e raggio 3 (cioè che hanno distanza 3 da  $q$ ). (4 punti)
- (3) Si trovino equazioni parametriche della retta  $r = \pi' \cap \pi'_1$ . (2 punti)