

Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 27.3.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia. **Attenzione:** le risposte *non sufficientemente motivate*, o quelle che *contengono solo conti senza spiegazioni*, **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare.

Esercizio 1. (*scrivere solo i risultati*) Sia dato il seguente sistema di equazioni lineari nelle variabili x, y, z, w , dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S: \begin{cases} x + y - 3z & = & 2 \\ -x + 2z - w & = & 1 \\ ky - z - kw & = & 0 \end{cases}$$

(1) Si trovino i valori di k per cui il sistema S è compatibile. (3 punti)

(2) Per tali valori di k , si descriva l'insieme delle soluzioni di S . (4 punti)

Esercizio 2. (*scrivere solo i risultati*) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(1) Si trovi la matrice canonica di f . (2 punti)

(2) Si trovi una base del nucleo di f . (2 punti)

(3) Si trovino equazioni cartesiane dell'immagine di f . (3 punti)

Esercizio 3. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Sia U il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e sia dato il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 3h+2 \\ 0 \\ h-1 \\ 5h \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $h \in \mathbb{R}$.

- (1) Si trovi una base ortogonale di U . (3 punti)
- (2) Si trovi la proiezione ortogonale di v su U , a dipendenza del parametro h . (3 punti)
- (3) Si trovino i valori di h tali che v è ortogonale ad U . (2 punti)

Esercizio 4. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Siano dati i punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^3 , e il piano π di equazione cartesiana

$$\pi: x + y - 2z = 4$$

- (1) Si trovi un'equazione cartesiana del piano π' contenente p_1, p_2 e ortogonale a π . (3 punti)
- (2) Si trovino equazioni parametriche della retta r parallela all'intersezione $s = \pi \cap \pi'$ e passante per p_1 . (2 punti)
- (3) Si determini la distanza fra p_2 ed r . (3 punti)