A

Corso di Geometria

a.a. 2018/2019

Esame scritto del 22.1.2019

Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato negli spazi appositi. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere su un unico foglio di bella copia, e le risposte non sufficientemente motivate **non saranno valutate**. La brutta copia non è da consegnare.

Esercizio 1. (*scrivere solo i risultati*) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dal seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z, w

$$\begin{cases} x + w & = & 0 \\ y - z - 2w & = & 0 \end{cases}$$

Sia inoltre il vettore

$$v = \begin{pmatrix} k \\ -k+1 \\ k+1 \\ 2k \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$.

(1) Si trovi una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$. (4 punti)

(2) Si trovino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui $v \in U$, e i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $v \in W$. (3 punti)

Esercizio 2. (*scrivere solo i risultati*) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(1) Si calcoli il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (3 punti)

(2) Si trovi una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A. (4 punti)

Esercizio 3. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Siano dati i punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$, e la retta r_1 di equazioni cartesiane

$$r_1 \colon \begin{cases} x + z - 1 & = & 0 \\ x - 2y - z + 1 & = & 0 \end{cases}$$

(1) Si trovi un'equazione cartesiana del piano π contenente p_1, p_2, p_3. (3 punti)
(2) Si trovino equazioni parametriche della retta r_2 ortogonale a π e passante per p_1. (2 punti)
(3) Si determini la distanza fra r_1 ed r_2. (3 punti)

Esercizio 4. (*scrivere lo svolgimento in bella copia*) Sia $V = \mathbb{R}[x]_{<5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 5 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Definiamo $F \colon V \to V$ come $F(p) = xp' - p + p''$.

(1) Si trovi la matrice di F rispetto alla base canonica $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ dello spazio V. (3 punti)
(2) Se F è suriettiva lo si scriva, altrimenti si trovi un polinomio non appartenente all'immagine di F. (2 punti)
(3) Si dia una descrizione parametrica dell'antiimmagine $F^{-1}(\{x^3+2x^2+3x+3\})$, ossia l'insieme dei polinomi p tali che $F(p) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$. (3 punti)