Corso di Geometria

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2018/2019

Appunti su forme bilineari e cenni di geometria affine in $\mathbb{R}^n$

1. Introduzione

Nella parte del corso su algebra lineare abbiamo visto tecniche di risoluzione di sistemi lineari omogenei. Esse possono essere interpretate come dei cambiamenti (lineari) di coordinate, fatti in modo che le equazioni assumano una forma particolarmente semplice.

Ad esempio, l'equazione lineare omogenea in tre variabili

$$x - y + z = 0$$

ha spazio delle soluzioni di dimensione 2, e una base è data dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Completiamoli a una base di $\mathbb{R}^3$, aggiungendo

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le coordinate di un vettore

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ sono i numeri x', y', z' tali che

$$v = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$$

Usando la teoria vista finora, si può scrivere la relazione fra le coordinate x, y, z di v nella base canonica, e le coordinate x', y', z' di v rispetto a $\mathcal{B}$. In questo caso è facile farlo anche esplicitamente senza usare la teoria: basta sostituire i vettori v, u_1, u_2, u_3 nell'espressione qui sopra. Si ottiene

$$\begin{cases} x = x' + z' \\ y = x' + y' \\ z = y' \end{cases}$$

Ora, le soluzioni dell'equazione originaria $x-y+z=0$ sono le combinazioni lineari di u_1 e u_2, quindi sono caratterizzate dalla proprietà $z' = 0$. Infatti, sostituendo x, y, z nell'equazione otteniamo

$$0 = (x' + z') - (x' + y') + y' = z'$$

Abbiamo trasformato quindi l'equazione da cui siamo partiti. Considerata nelle nuove coordinate, quelle rispetto alla base $\mathcal{B}$ invece che alla base canonica, diventa l'equazione molto più semplice $z' = 0$.

Il nostro obiettivo è riprodurre un procedimento simile, ma partendo da equazioni omogenee di secondo grado. Potremo usare l'algebra lineare, perché considereremo equazioni esprimibili mediante il prodotto fra matrici. Partiremo dal fatto che il prodotto scalare stesso è dato da una formula che è un polinomio di grado 2, ad esempio in $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = xz + yt$$

Vorremo considerare "varianti" del prodotto scalare, date mettendo una matrice fissata "in mezzo" ai due vettori, cioè con una formula del tipo

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

dove in questo caso A è una matrice 2×2, e in generale sarà $n \times n$.

Studiando la matrice A e le sue proprietà, riusciremo a mostrare che i polinomi che considereremo (di secondo grado, omogenei, in più variabili) possono essere scritti in una forma semplice, in seguito a un cambio (lineare) di variabili.

Questo riduce lo studio degli insiemi delle soluzioni allo studio di una lista di poche equazioni "standard", le cui soluzioni sono abbastanza semplici da descrivere geometricamente, almeno in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.

2. Forme bilineari: definizione

Definizione 2.1. Un'applicazione $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *forma bilineare* se esiste una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$b(u,v) = u^t \cdot A \cdot v$$

(dove consideriamo u, v come vettori colonna, per cui u^t è semplicemente u scritto come vettore riga.)

Esempio 2.2. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come il prodotto scalare:

$$b(u,v) = \langle u, v\rangle$$

Allora b è una forma bilineare, dove la matrice A della definizione è la matrice identità.

Esempio 2.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A definisce la forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2z - t \\ 3z + t \end{pmatrix} = 2xz - xt + 3yz + yt$$

Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare, e sia A come nella definizione. Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sia come al solito $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Calcoliamo $b(e_1, e_1)$:

$$e_1^t \cdot A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} = a_{11}$$

Possiamo calcolare allo stesso modo $b(e_i, e_j)$ per qualsiasi i e j, ad esempio

$$b(e_1, e_2) = e_1^t \cdot A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a_{12}$$

Si ottiene facilmente

$$b(e_i, e_j) = a_{ij}$$

In altre parole, vale la formula

$$A = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \dots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Deduciamo anche che *la forma bilineare b determina <u>univocamente</u> la matrice A.* Possiamo dare allora la seguente definizione.

Definizione 2.4. Sia b forma bilineare e A matrice come sopra. La matrice A si dice *matrice canonica* di b.

Esempio 2.5. Sia $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da

$$b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = xz + 2xt - 4yz - yt$$

Questa b è una forma bilineare. Infatti, calcoliamo quella che dovrebbe essere la matrice canonica di b, se fossimo sicuri che b è una forma bilineare:

$$b(e_1, e_1) = b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad b(e_1, e_2) = b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

$$b(e_2, e_1) = b\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -4, \quad b(e_2, e_2) = b\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$$

e poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che in effetti

$$b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

quindi b è una forma bilineare, e A è la sua matrice canonica.

Come per il prodotto scalare, si verifica facilmente che una forma bilineare b soddisfa le proprietà seguenti:

(1) per ogni $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v)$$

(2) per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$b(\lambda u, v) = \lambda b(u, v)$$

(3) per ogni $u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2)$$

(4) per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v)$$

cioè b è "lineare rispetto a ciascuna delle due variabili u, v". Non è difficile dimostrare che se un'applicazione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soddisfa queste quattro proprietà, allora è una forma bilineare. Il procedimento è lo stesso che si usa per dimostrare che un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è data dalla moltiplicazione a sinistra per una matrice $m \times n$.

3. Forme bilineari e cambiamento di base

Definizione 3.1. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare, e sia $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$. Si dice *matrice di b rispetto alla base $\mathcal{B}'$* la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} b(v'_1, v'_1) & \dots & b(v'_1, v'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v'_n, v'_1) & \dots & b(v'_n, v'_n) \end{pmatrix}$$

La matrice canonica di b quindi è semplicemente la matrice di b rispetto alla base canonica.

Proposizione 3.2. *Siano $b, \mathcal{B}'$ e A' come nella Definizione 3.1, siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e siano*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

le colonne delle coordinate di u e v nella base $\mathcal{B}$. Allora

$$b(u, v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(u)^t \cdot A' \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

cioè, più esplicitamente, vale

$$b(u, v) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(v'_1, v'_1) & \dots & b(v'_1, v'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v'_n, v'_1) & \dots & b(v'_n, v'_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$u = c_1 v'_1 + \dots + c_n v'_n, \quad v = d_1 v'_1 + \dots + d_n v'_n$$

quindi

$$b(u, v) = b(c_1 v'_1 + \dots + c_n v'_n, v) = c_1 b(v'_1, v) + \dots + c_n b(v'_1, v) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(v'_1, v) \\ \vdots \\ b(v'_n, v) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il vettore colonna che compare come secondo fattore. Abbiamo

$$b(v'_1, v) = b(v'_1, d_1 v'_1 + \dots + d_n v'_n) = d_1 b(v'_1, v'_1) + \dots + d_n b(v'_1, v'_n),$$

e così fino a

$$b(v'_n, v) = b(v'_n, d_1 v'_1 + \dots + d_n v'_n) = d_1 b(v'_n, v'_1) + \dots + d_n b(v'_n, v'_n)$$

Ma allora

$$\begin{pmatrix} b(v'_1, v) \\ \vdots \\ b(v'_n, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v'_1, v'_1) & \dots & b(v'_1, v'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v'_n, v'_1) & \dots & b(v'_n, v'_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

e quindi

$$b(u, v) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(v'_1, v'_1) & \dots & b(v'_1, v'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v'_n, v'_1) & \dots & b(v'_n, v'_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

che è quello che volevamo dimostrare. □

Si calcola facilmente la matrice di una forma bilineare b rispetto ad una nuova base, conoscendo la matrice di passaggio da una base all'altra. Supponiamo di avere due basi, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, di $\mathbb{R}^n$, sia A' la matrice di b rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Calcoliamo la matrice A'' di b rispetto alla base $\mathcal{B}''$.

Dobbiamo trovare una matrice A'' tale che

$$b(u, v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(u)^t \cdot A'' \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(v)$$

Sia M la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$, come nella sezione sui cambi di base per le applicazioni lineari. In altre parole, M è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}''$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$M = \mathrm{Mat}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_1''), \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v_n''))$$

dove $\mathcal{B}'' = (v_1'', \dots, v_n'')$. Sappiamo allora che M permette di passare facilmente dalle coordinate di un vettore qualsiasi $u \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathcal{B}''$ a quelle rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(u) = M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(u)$$

Inoltre sappiamo che

$$b(u, v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(u)^t \cdot A' \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}(v)$$

e quindi

$$b(u, v) = (M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(u))^t \cdot A' \cdot M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(v) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(u)^t \cdot M^t \cdot A' \cdot M \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{B}''}(v)$$

Per cui

$$A'' = M^t \cdot A'M$$

Osserviamo che questa ricorda la formula che lega le matrici di un'applicazione lineare rispetto a due basi diverse. La differenza è che qui si usa M^t invece di M^{-1}.

Definizione 3.3. Due matrici A' e A'', entrambe $n \times n$, si dicono *congruenti* se esiste una matrice invertibile M tale che

$$A'' = M^t \cdot A' \cdot M$$

4. Forme bilineari non degeneri

Definizione 4.1. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare, con matrice canonica A. La forma bilineare b si dice *degenere* se $\det(A) = 0$, si dice *non degenere* se invece $\det(A) \neq 0$.

Osservazione 4.2. La matrice di b rispetto ad un'altra base qualsiasi $\mathcal{B}'$ è della forma M^tAM, dove M è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}'$. Visto che $\det(M) \neq 0$ e che $\det(M^t) = \det(M)$, abbiamo

$$\det(A') = \det(M)^2 \cdot \det(A)$$

per cui A ha determinante nullo se e solo se A' ha determinante nullo. Quindi una forma bilineare è degenere se la sua matrice rispetto a una base <u>qualsiasi</u> ha determinante nullo.

Notiamo che, data una matrice A, quadrata $n \times n$, possiamo considerare **contemporaneamente** la forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di matrice canonica A, e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di matrice canonica A.

Notiamo che b è non degenere se e solo se A è invertibile (per definizione), e questo è anche equivalente al fatto che f sia un isomorfismo.

Al contrario, b è degenere se e solo se f non è un isomorfismo. Ricordiamo che allora vale $\mathrm{Ker}(f) \neq \{O\}$ (e anche $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^n$).

È utile considerare anche un secondo endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, quello che ha matrice canonica A^t.

Allora osserviamo che, dati $u, v \in \mathbb{R}^n$, vale

$$b(u, v) = u^t \cdot \underbrace{A \cdot v}_{=f(v)} = u^t \cdot f(v)$$

e

$$b(u, v) = \underbrace{u^t \cdot A}_{=g(u)^t} \cdot v = g(u)^t \cdot v$$

Proposizione 4.3. *Consideriamo una forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *b è degenere,*
2. *esiste un vettore $u_0 \in \mathbb{R}^n$, diverso dal vettore nullo, tale che $b(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$,*
3. *esiste $v_0 \in \mathbb{R}^n$, diverso dal vettore nullo, tale che $b(u, v_0) = 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (3), usando le formule viste qui sopra. Visto che b è degenere, allora $\mathrm{Ker}(f)$ contiene almeno un vettore non nullo v_0. Per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ vale

$$b(u, v_0) = u^t \cdot f(v_0) = u^t \cdot O = 0$$

Allo stesso modo si dimostra che (1) implica (2): basta osservare che se b è degenere anche $\mathrm{Ker}(g)$ contiene almeno un vettore non nullo u_0, e per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$b(u_0, v) = g(u)^t \cdot v = O \cdot v = 0$$

Viceversa, dimostriamo che (3) implica (1). Supponiamo che esista v_0 non nullo tale che $b(u, v_0) = 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$. Scriviamo

$$v_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

e

$$Av_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Sapendo che $b(u, v_0) = 0$ qualsiasi sia u, calcoliamo Av_0 usando i vettori della base canonica $e_1, \ldots, e_n$ al posto di u:

$$0 = b(e_1, v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = d_1$$

Allo stesso modo si dimostra $d_2 = \ldots = d_n = 0$. Quindi $Av_0 = O$, cioè $v_0 \in \mathrm{Ker}(f)$. Ma allora f non è un isomorfismo, e deduciamo che $\det(A) = 0$.

Ugualmente si dimostra che (2) implica (1): se esiste u_0 tale che $b(u_0, v) = 0$ per qualsiasi v, si calcola $u^t A$ usando $e_1, \ldots, e_n$ al posto di v, e si ottiene $u^t A = O$, cioè $g(u)^t = O$. Quindi g non è un isomorfismo, e $\det(A^t) = \det(A)$ deve essere 0. $\square$

Esempio 4.4. La forma bilineare b di matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

è degenere. Troviamo $v_0 \neq O$ tale che $b(u, v_0) = 0$ per ogni u. Per la dimostrazione qui sopra, basta trovare v_0 tale che $Av_0 = O$. Si tratta cioè di risolvere un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite (le entrate di v_0), e prendere una soluzione non tutta nulla. Ad esempio

$$v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora, dato un vettore qualunque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$b(u, v_0) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo invece u_0 non nullo tale che $b(u_0, v) = 0$ per ogni v. Dobbiamo trovare u_0 non nullo tale che $u_0^t A = O$, ad esempio

$$u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora, dato un vettore qualunque

$$v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$b(u_0, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che vale $b(u_0, u_0) = 0$ e $b(v_0, v_0) = 0$.

Esempio 4.5. Sia b una forma bilineare. Anche se b è non degenere, è possibile che esistano vettori $u \in \mathbb{R}^n$ non nulli tali che $b(u, u) = 0$. Ad esempio, se b ha matrice canonica (con determinante non nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

allora sappiamo subito che $b(e_1, e_1) = 0$ (l'angolo in alto a sinistra di A è sempre uguale a $b(e_1, e_1)$).

5. Forme bilineari simmetriche e antisimmetriche

Definizione 5.1. Una forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *simmetrica* se la sua matrice canonica è una matrice simmetrica, e si dice *antisimmetrica* se la sua matrice canonica è antisimmetrica.

Proposizione 5.2. *Sia b una forma bilineare. Allora b è simmetrica se e solo se, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, vale*

$$b(u, v) = b(v, u)$$

Inoltre b è antisimmetrica se e solo se, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, vale

$$b(u, v) = -b(v, u)$$

Dimostrazione. Se $b(u, v) = b(v, u)$ qualsiasi siano u e v, è evidente dalla definizione che la sua matrice canonica A è simmetrica.

Viceversa, supponiamo che A sia simmetrica, cioè $A = A^t$. Prendiamo due vettori qualsiasi $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$b(u, v) = u^t \cdot A \cdot v = u^t \cdot A^t \cdot v = \left(v^t \cdot A \cdot u\right)^t = v^t \cdot A \cdot u = b(v, u)$$

dove la penultima uguaglianza è vera perché $v^t \cdot A \cdot u$ è un numero reale, cioè una matrice 1×1, che perciò è uguale alla sua trasposta.

L'affermazione riguardo a b antisimmetrica si dimostra in modo simile. □

6. Il teorema di Sylvester

Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, con matrice canonica A.

Come già fatto prima, possiamo interpretare A anche come matrice canonica di un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ricordiamo il teorema spettrale: essendo A una matrice simmetrica, l'endomorfismo f è diagonalizzabile, ed esiste una base **ortonormale** $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di f. Cioè esiste una matrice invertibile M tale che $M^t = M^{-1}$ e la matrice

$$A' = M^{-1} \cdot A \cdot M$$

è diagonale.

A questo punto l'osservazione importante è che vale anche

$$A' = M^t \cdot A \cdot M$$

per cui A' è anche la matrice di b rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Cioè

$$A' = \begin{pmatrix} b(v_1', v_1') & \dots & b(v_1', v_n') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v_n', v_1') & \dots & b(v_n', v_n') \end{pmatrix}$$

Per ogni v_i' sia λ_i il suo autovalore, cioè $f(v_i') = \lambda_i v_i'$. Se λ_i è diverso da 0, poniamo

$$v_i'' = \frac{v_i'}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

Se invece $\lambda_i = 0$, allora poniamo

$$v_i'' = v_i'$$

Visto che abbiamo solo riscalato alcuni vettori di $\mathcal{B}'$ per dei fattori non nulli, sappiamo che anche $\mathcal{B}'' = (v_1'', \dots, v_n'')$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Non è difficile vedere che la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}''$ è sempre la matrice A'. Calcoliamo invece la matrice di b rispetto a $\mathcal{B}''$.

Dato che A' è la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sappiamo che $b(v_i', v_i') = \lambda_i$, e $b(v_i', v_j') = 0$ se $i \neq j$. Allora la matrice di b nella base $\mathcal{B}''$ è la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale i numeri $b(v_1'', v_1''), \ldots, b(v_n'', v_n'')$.

Ora, se λ_i è positivo, abbiamo

$$b(v_i'', v_i'') = b\left(\frac{v_i'}{\sqrt{|\lambda_i|}}, \frac{v_i'}{\sqrt{|\lambda_i|}}\right) = \frac{b(v_i', v_i')}{|\lambda_i|} = 1$$

Se invece λ_i è negativo, abbiamo

$$b(v_i'', v_i'') = b\left(\frac{v_i'}{\sqrt{|\lambda_i|}}, \frac{v_i'}{\sqrt{|\lambda_i|}}\right) = \frac{b(v_i', v_i')}{|\lambda_i|} = -1$$

Se infine $\lambda_i = 0$, abbiamo

$$b(v_i'', v_i'') = b(v_i', v_i') = 0$$

Quindi la matrice A'' di b rispetto alla base $\mathcal{B}''$ è una matrice diagonale, con sulla diagonale numeri (eventualmente diversi fra loro) che sono 1, oppure -1, oppure 0. Abbiamo tanti 1 quanti sono i λ_i positivi, tanti -1 quanti sono i λ_i negativi, e tanti 0 quanti sono i λ_i nulli. Osserviamo che ci sono tanti zeri sulla diagonale quant'è la dimensione dell'autospazio $E(0)$, cioè $\mathrm{Ker}(f)$.

Possiamo scrivere la matrice A'' a "blocchi":

$$A'' = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove p è il numero di 1 sulla diagonale, q è il numero di -1 sulla diagonale, la matrice I_p è come al solito la matrice identità $p \times p$, e il blocco in basso a destra di A'' è una sottomatrice nulla $r \times r$.

Nella prossima definizione riformuliamo la stessa cosa, contando gli autovalori distinti, ma ciascuno con la sua molteplicità geometrica.

Definizione 6.1. Sia b forma bilineare simmetrica come sopra, e A la sua matrice canonica. Si dice *segnatura* di A (e di b) la coppia (p, q) dove p è il numero di autovalori positivi distinti della matrice canonica di b (ciascuno contato tante volte quant'è la sua molteplicità geometrica), q è il numero di autovalori distinti negativi (ciascuno contato tante volte quant'è la sua molteplicità geometrica).

In conclusione, dal nostro ragionamento otteniamo il teorema seguente.

Teorema 6.2 (di Sylvester, prima parte)**.** *Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, e sia (p, q) la sua segnatura. Allora esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice di b rispetto a questa base è diagonale, della forma*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 6.3. Attenzione: è possibile che non ci siano λ_i uguali a zero. Se ci sono, allora b è degenere, altrimenti b è non degenere. Se non ci sono, allora $p + q = n$ e la matrice di b è

$$A'' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

È anche possibile che non ci siano autovalori positivi, o non ci siano autovalori negativi, ecc...

Osserviamo che in linea di principio potrebbe essere possibile avere un'altra base $\widetilde{\mathcal{B}''}$ in cui la matrice di b è diagonale, mettiamo $\widetilde{A''}$, con 1, -1 oppure 0 sulla diagonale, ottenuta magari con un altro procedimento. La seconda parte del teorema di Sylvester (che non dimostriamo) afferma che allora $\widetilde{A''} = A''$, cioè non sarebbe possibile avere un numero diverso di entrate uguali a 1 né un numero diverso di entrate uguali a -1, se si parte dalla stessa forma bilineare.

Teorema 6.4 (di Sylvester, seconda parte)**.** *Sia b forma bilineare di segnatura (p, q), e supponiamo che esistano interi non negativi $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ tali che la matrice di b, rispetto ad una certa base, sia*

$$\begin{pmatrix} I_{\widetilde{p}} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\widetilde{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $\widetilde{p} = p$ *e* $\widetilde{q} = q$.

Osservazione 6.5. Sia b forma bilineare simmetrica. Se vogliamo una base $\mathcal{B}'$ rispetto alla quale b abbia matrice **diagonale**, ma non necessariamente con solo 1, -1 oppure 0 sulla diagonale, basta prendere una base *ortogonale* di autovettori della matrice canonica A di b. Non serve normalizzarli, né dividerli per la radice quadrata degli autovalori.

Siano infatti $v'_1, \dots, v'_n$ semplicemente autovettori di A, due a due ortogonali, con autovalori rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Allora, se $i \neq j$, abbiamo

$$b(v'_i, v'_j) = (v'_i)^t \cdot A \cdot v_j = (v'_i)^t \cdot \lambda_j v'_j = \lambda_j \langle v'_i, v'_j \rangle = 0$$

e quindi la matrice di b rispetto a $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ è diagonale.

7. Forme quadratiche

Definizione 7.1. Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Si dice *forma quadratica* associata a b l'applicazione $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come

$$q(v) = b(v, v)$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 7.2. L'applicazione $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$$

è la forma quadratica associata al prodotto scalare. In generale, se $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare, allora la forma quadratica associata è data da

$$q(v) = \|v\|^2$$

Esempio 7.3. L'applicazione $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$

è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.4. L'applicazione $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$$

è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 7.5. Consideriamo un polinomio di secondo grado omogeneo qualsiasi $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, in n variabili. Allora esiste una forma bilineare per cui p sia la forma quadratica associata. Infatti p si può scrivere come

$$p(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

cioè chiamiamo a_{ij} il coefficiente davanti a x_ix_j. Facendo questo possiamo assumere che $i \leq j$ in tutti i monomi, visto che $x_ix_j = x_jx_i$.

Allora si vede immediatamente che p è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica b che ha matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} & \cdots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cioè, al posto di riga i e colonna j mettiamo $\frac{a_{ij}}{2}$ se $i < j$, mettiamo $\frac{a_{ji}}{2}$ se $i > j$, e mettiamo a_{ii} se $i = j$.

Sia b forma bilineare simmetrica, e q la forma quadratica associata a b. Per la bilinearità di b, per ogni coppia di vettori u, v abbiamo

$$q(u+v) = b(u+v, u+v) = q(u) + q(v) + b(u,v) + b(v,u) = q(u) + q(v) + 2b(u,v)$$

cioè

$$b(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right)$$

e questo esprime b in funzione di q. Ne deduciamo che q determina univocamente b.

Il teorema di Sylvester implica immediatamente il seguente teorema. Esso mostra che data una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ se ne può trovare una "espressione canonica", in termini delle coordinate dei vettori rispetto ad una certa base di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7.6. *Sia $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, e sia (p,q,r) la segnatura della forma bilineare corrispondente. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$q(v) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

8. Equazioni di secondo grado in $\mathbb{R}^2$

Come applicazione delle sezioni precedenti, vediamo come si possono studiare le soluzioni di un'equazione del tipo

$$p(x,y) = d$$

dove $p(x,y)$ è un polinomio omogeneo di grado 2, e $d \in \mathbb{R}$ è una costante.

Osservamo che $p(x,y)$ è una forma quadratica. Infatti, essendo omogeneo di grado 2, si può scrivere come

$$p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Questa è una forma quadratica. La forma bilineare simmetrica b corrispondente si trova come nell'Osservazione 7.5. In questo caso si trova la matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Dal Teorema 7.6, sappiamo che esiste una base *ortonormale* $\mathcal{B}$ tale che, nelle coordinate x', y' rispetto alla base $\mathcal{B}$, la forma quadratica diventa come nel teorema.

Discutiamo le varie possibilità, a seconda della segnatura (p,q) di b. Ricordiamo che p, q sono interi non negativi, e $p + q \leq 2$ visto che siamo in $\mathbb{R}^2$.

(1) Se la segnatura è $(0,0)$, allora A è la matrice nulla, e il polinomio p diventa il polinomio costantemente nullo

$$p(x', y') = 0$$

(Attenzione: il polinomio diventa il polinomio nullo, non l'equazione $p(x,y) = d$.)

Quindi: se $d = 0$ allora l'equazione diventa $0 = 0$, soddisfatta da tutti gli elementi di $\mathbb{R}^2$. Se invece $d \neq 0$, l'equazione è $0 = d$, non soddisfatta da alcun elemento di $\mathbb{R}^2$.

In conclusione, se la segnatura è $(0,0)$ allora l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}^2$, oppure è l'insieme vuoto.

(2) Supponiamo ora che la segnatura sia $(2,0)$. Allora

$$p(x', y') = (x')^2 + (y')^2$$

Se $d < 0$ l'equazione $p(x', y') = d$ non ha soluzioni. Se $d = 0$, ha come unica soluzione $x' = 0, y' = 0$, cioè un punto. Se $d > 0$, allora l'insieme delle soluzioni è la circonferenza di raggio $\sqrt{d}$. Questo ovviamente nelle variabili x', y'.

Nelle variabili x, y, sarà la circonferenza eventualmente dilatata, o "deformata", a seconda di come è fatto il passaggio di coordinate da x, y a x', y'.

(3) In modo simile si tratta il caso della segnatura $(0, 2)$, perché la forma quadratica diventa
$$p(x', y') = -(x')^2 - (y')^2$$
e l'equazione diventa $-(x')^2 - (y')^2 = d$, cioè $(x')^2 + (y')^2 = -d$. Si ricade quindi nel caso precedente, con $-d$ al posto di d.

(4) Se la segnatura è $(1, 0)$, allora
$$p(x', y') = (x')^2$$
e l'equazione diventa $(x')^2 = d$. Questo impone condizioni su x', ma non su y' che quindi può essere qualsiasi. Se $d < 0$ allora non abbiamo soluzioni. Se $d = 0$ allora $x' = 0$, perciò l'insieme delle soluzioni è la retta dei punti che hanno coordinata $x' = 0$ e coordinata y' qualsiasi.

Se $d > 0$ allora x' può essere $\sqrt{d}$ oppure $-\sqrt{d}$. L'insieme delle soluzioni dunque è formato da due rette: una retta è quella dei punti con coordinata x' uguale a $\sqrt{d}$ e coordinata y' qualsiasi. La seconda retta è quella dei punti con coordinata x' uguale a $-\sqrt{d}$, e coordinata y' qualsiasi.

(5) Se la segnatura è $(0, 1)$, allora
$$p(x', y') = -(y')^2$$
e l'equazione diventa $(y')^2 = -d$. L'insieme delle soluzioni si può descrivere come nel caso precedente, solo che qui saranno scambiate le coordinate x' e y', e d andrà sostituito con $-d$.

(6) Rimane il caso in cui la segnatura è $(1, 1, 0)$. In questo caso la forma quadratica diventa
$$p(x', y') = (x')^2 - (y')^2$$
e l'equazione diventa $(x')^2 - (y')^2 = d$. Se $d = 0$, quest'equazione diventa
$$(x' + y')(x' - y') = 0$$
che è soddisfatta se $x' = y'$ oppure se $x' = -y'$. L'insieme delle soluzioni quindi è formato dall'unione di due rette: quella dei punti tali che $x' = y'$, e quella dei punti tali che $x' = -y'$.

Se invece $d \neq 0$, allora l'insieme delle soluzioni è un'iperbole.

9. Cenni di geometria affine in $\mathbb{R}^n$

Definizione 9.1. Un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *sottospazio affine* se esiste un elemento $\overline{u} \in U$ tale che l'insieme
$$U_0 = \{u - \overline{u} \mid u \in U\}$$
è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Si usa anche la notazione $U_0 = U - \overline{u}$.

Osservazione 9.2. Sia U un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, e sia $\overline{\overline{u}}$ un elemento qualsiasi di U. Osserviamo che $w = \overline{\overline{u}} - \overline{u}$ è in $U_0 = U - \overline{u}$. Visto che U_0 è un sottospazio vettoriale, l'insieme
$$\{v - w \mid v \in U_0\}$$
è uguale a U_0 stesso. Quindi abbiamo
$$U_0 = \{u - \overline{u} \mid u \in U\} = \{u - \overline{u} - w \mid u \in U\} = \{u - \overline{\overline{u}} \mid u \in U\}.$$
In altre parole U_0 <u>non dipende</u> dall'elemento $\overline{u}$ di U.

Osservazione 9.3. Dall'osservazione precedente si deducono immediatamente le seguenti proprietà:

(1) se $u, u' \in U$ allora $u - u' \in U_0$;
(2) se $u \in U$ e $v \in U_0$ allora $u + v \in U$;
(3) U è esso stesso un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $O \in U$.

Definizione 9.4. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ed U_0 come nella definizione precedente. Il sottospazio U_0 si dice *sottospazio vettoriale soggiacente* ad U. La *dimensione* di U è definita come $\dim(U_0)$. Inoltre

(1) U si dice *retta (affine)* se $\dim(U) = 1$,
(2) U si dice *piano (affine)* se $\dim(U) = 2$,
(3) U si dice *iperpiano (affine)* se $\dim(U) = n - 1$.

Esempio 9.5. Sia S un sistema di equazioni lineari in n variabili, eventualmente non omogeneo. Allora $U = \mathrm{Sol}(S)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, **se** S **è compatibile**. Infatti, dato S_0 il sistema omogeneo associato ad S, e data una soluzione $\overline{u}$ di S, si verifica facilmente che $U - \overline{u}$ è l'insieme delle soluzioni di U_0.

Viceversa, dato un sottospazio affine non vuoto U di $\mathbb{R}^n$, esiste un sistema lineare S (eventualmente non omogeneo) che ha per soluzioni proprio U. Infatti, basta considerare un sistema omogeneo S_0 che abbia per soluzioni U_0. Fissato ora $\overline{u}$ in U, basta prendere come termini noti per S le equazioni di S_0 calcolate nelle entrate di $\overline{u}$.