Algebra Superiore lez. 9

giovedì 12 novembre 2020 15:55

<u>Teorema</u>: Sia G gruppo alg. lineare, lin. riduttivo, e X una G-varietà affine.

(1) Il quoz. categorico $\pi : X \longrightarrow X/\!\!/G$ è suriettivo.

(2) Sia $Y \subseteq X$ un chiuso G-stabile:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] & X/\!\!/G \\ Y \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[ur, "\pi \circ \iota"] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y/\!\!/G \arrow[u, "\exists \pi'"] \end{tikzcd}$$

Sia $\iota : Y \to X$ l'inclusione. $\pi \circ \iota$ è costante sulle G-orbite, e per la prop. universale di π_Y, passa al quoziente π'

Allora $\pi' : Y/\!\!/G \to X/\!\!/G$ ha immagine chiusa, ed è un isomorfismo di $Y/\!\!/G$ con la sua immagine. In altre parole π_Y si può identificare con $\pi|_Y$.

(3) Dati Y, Y' chiusi G-stabili, allora

$\pi(Y \cap Y') = \pi(Y) \cap \pi(Y')$. In particolare, chiusi G-stabili disgiunti di X hanno immagini disgiunte, e ogni fibra di π contiene <u>al più</u> un'orbita chiusa.

<u>Dim.</u>: (1) Sia $y \in X/\!/G$, e sia $I = I(\{y\})$, è un ideale proprio. Consid. $\pi^{-1}(y)$: è definito come zeri delle stesse funzioni in I, viste come funzioni su X. Cioè

$$I(\pi^{-1}(y)) = \underbrace{I \cdot \mathcal{O}(X)}_{\text{id. gen. da } I \text{ in } \mathcal{O}(X)} = J$$

Abb. visto: $J^G = I$, segue che J è un ideale proprio di $\mathcal{O}(X)$, e quindi $V_X(J) \neq \emptyset$ cioè $\pi^{-1}(y) \neq \emptyset$. Allora π è suriettiva.

(2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X) \arrow[d, "\substack{\text{restrizione} \\ \text{da } X \text{ a } Y}"', "\text{suriettiva}"] & \mathcal{O}(X)^G \arrow[l, "\text{inclusione}"'] \arrow[d, "\text{suriettiva}"] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

suriettiva → restrizione da X a Y $\quad\downarrow\quad$ $\downarrow$ ← suriettiva ←

$$\mathcal{O}(Y) \xhookleftarrow[\text{inclusione}]{} \mathcal{O}(Y)^G$$

Avevamo visto: data $\varphi : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ suriettiva (omom. di G-moduli), allora $\varphi^G : \mathcal{O}(X)^G \to \mathcal{O}(Y)^G$ è anch'essa suriettiva, e corrisponde a $\pi' : Y/\!\!/G \to X/\!\!/G$, e vale il lemma seguente:

<u>Lemma:</u> Sia $\psi : Z \to W$ appl. regolare fra var. affini. Allora $\psi^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(Z)$ è suriettiva se e solo se $\psi(Z)$ è chiuso in W e ψ induce un isom. $Z \cong \psi(Z)$.

<u>Dim. Lemma:</u> ψ^* è suriettivo se e solo se induce un isomorfismo fra $\mathcal{O}(W)/\ker(\psi^*)$ e $\mathcal{O}(Z)$.

D'altronde in generale $\dfrac{\mathcal{O}(W)}{\ker(\psi^*)} \cong \mathcal{O}\left(\overline{\psi(Z)}\right)$.

Allora ψ^* è suriettiva se e solo se ψ induce

Allora ψ^* è suriettiva se e solo se ψ induce un isom. fra Z e $\overline{\psi(Z)}$. $\square$

Riprendiamo la dim. del teorema: (2) segue dal lemma.

(3) Siano I, I' gli ideali di Y e Y' in $\mathcal{O}(X)$ rispettivamente. Allora $I+I'$ è l'ideale di $Y \cap Y'$.

Gli ideali di $\pi(Y)$, $\pi(Y')$, $\pi(Y\cap Y')$ sono

$$\underbrace{I \cap \mathcal{O}(X)^G}_{\substack{\shortparallel \\ I^G = R_X(I)}}, \quad I' \cap \mathcal{O}(X)^G, \quad (I+I') \cap \mathcal{O}(X)^G \quad \ldots$$

Inoltre:

$$(I+I')^G = R_X(I+I') = R_X(I) + R_X(I')$$
$$= I^G + (I')^G$$

e questo è l'ideale di $\pi(Y) \cap \pi(Y')$. $\square$

<u>Corollario</u>: Nelle ip. del teorema, se G è finito,

Corollario: Nelle ip. del teorema, se G è finito,

allora $\pi : X \longrightarrow X/\!/G$ è il quoziente insiemistico, cioè le fibre di π sono le G-orbite.

Dim.: Tutte le G-orbite sono insiemi finiti, quindi sono chiuse in X. $\square$

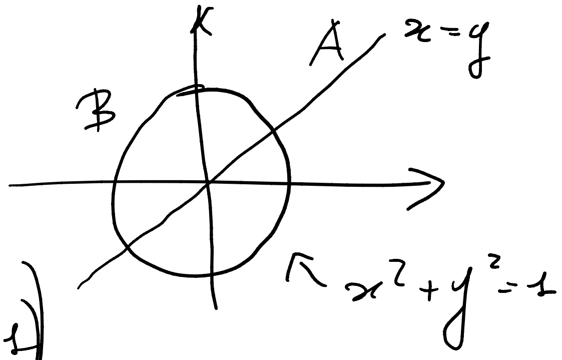
Richiami di geometria algebrica

Varietà irriducibili

Def.: Uno sp. top. X si dice irriducibile se per ogni Y, Z chiusi tali che $X = Y \cup Z$ vale $X = Y$ oppure $X = Z$.

Per qualsiasi X si definisce una componente irriducibile di X come un sottospazio irriducibile massimale.

Es.: $\mathbb{C}^2$



$$X = A \cup B = V\big((x-y)\cdot(x^2+y^2-1)\big)$$

X è riducibile, entrambi A e B sono chiusi propri. Non sono disgiunti, infatti X è connesso.

Proposizione: Sia X var. affine, allora X è irriducibile se e solo se $\mathcal{O}(X)$ è un dominio d'integrità.

Dim.: Supponiamo X irriducibile, e siano $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(X)$ tali che $f_1 \cdot f_2 = 0$ (cioè è nulla su tutto X). Allora $X = V_X(f_1) \cup V_X(f_2)$, segue:

$f_1 = 0$ opp. $f_2 = 0$.

Viceversa, supp. $\mathcal{O}(X)$ dominio d'integrità.

Siano Z_1, Z_2 chiusi tali che $X = Z_1 \cup Z_2$

Siano Z_1, Z_2 chiusi tali che $X = Z_1 \cup Z_2$.
Per assurdo, siano Z_1, Z_2 chiusi propri, e consid. $I_X(Z_1) \cap I_X(Z_2) = \{0\}$. Inoltre Z_1 e Z_2 sono propri, quindi $I_X(Z_1) \neq \{0\} \neq I_X(Z_2)$. Allora esiste $f_1 \in I_X(Z_1) \setminus I_X(Z_2)$ e $f_2 \in I_X(Z_2) \setminus I_X(Z_1)$, però $f_1 \cdot f_2 = 0$.
Visto che $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, abb. un assurdo.

$\square$

<u>Oss.:</u> Se $X \subseteq \mathbb{C}^n$ come chiuso di Zariski, allora X è irriducibile se e solo se $I(X)$ è primo, grazie alla proposizione.

<u>Es.:</u> 1) $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ sono irriducibili

$\mathbb{C}^*$, $(\mathbb{C}^*)^n$ sono irriducibili

<u>Lemma:</u> Se X e Y sono var. affini irriducibili, il prodotto $X \times Y$ è irriducibile.

il prodotto $X \times Y$ è irriducibile.

<u>Dim.:</u> Sia $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$,

chiusi

consid. per ogni $x \in X$ l'insieme $\{x\} \times Y$

è un chiuso isomorfo a Y come varietà, quindi

è irriducibile. Allora $\{x\} \times Y \subseteq Z_1$ opp.

$\subseteq Z_2$ (perché $\{x\} \times Y = ((\{x\} \times Y) \cap Z_1) \cup ((\{x\} \times Y) \cap Z_2)$)

Allora $X = X_1 \cup X_2$ dove

$X_i = \{ x \mid \{x\} \times Y \subseteq Z_i \}$.

Esercizio: X_i è un chiuso di X $\forall i$.

Allora $X = X_1$ (e allora $X \times Y = Z_1$) opp.

$X = X_2$ (e allora $X \times Y = Z_2$).

$\square$

<u>Oss.:</u> 1) X è irriducibile $\Rightarrow$ X è connessa

2) Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ è un'appl. regolare di

2) Se $\varphi: X \longrightarrow Y$ è un'appl. regolare di varietà affini, allora se X è irriducibile allora $\varphi(X)$ è irriducibile.

3) Se $Y \subseteq X$ sp. topologico, e Y è irriducibile, allora $\overline{Y}$ è irriducibile.

<u>Prop.</u>: Ogni varietà affine è unione <u>finita</u> di chiusi irriducibili.

<u>Dim.</u>: Sia X una var. affine. Se X è irriducibile, abb. finito. Altrimenti $X = X_1 \cup X_2$ con X_i chiuso proprio. Se sono irriducibili, abb. finito, altrimenti almeno uno si decompone allo stesso modo es. $X_1 = X_{1,1} \cup X_{1,2}$.

Il procedimento deve terminare, perché altrim. abb. una sequenza di chiusi $X \supsetneq X_1 \supsetneq X_{1,1} \supsetneq \dots$

I loro ideali formerebbero una sequenza crescente che non si stabilizza: assurdo.

$\square$

che non si stabilizza. assurdo.

$\square$

Segue: ogni varietà affine è unione finita di componenti irriducibili.

<u>Esercizio</u>: Una tale decomp. è sempre unica.

Applichiamo queste nozioni ai gruppi alg. lineari:

<u>Es.</u>: 1) $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{C}^*)^n$ con le op. che abb. visto sono gruppi irriducibili.

2) $N \subseteq SL(2)$ $\quad N = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}}_{N^\circ} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$

due chiusi propri, disgiunti

N non è irriducibile, né connesso, e quelle sono le due componenti irriducibili, perché ciascuna di esse è una varietà $\cong \mathbb{C}^*$

3) $O(n, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(n) \mid AA^t = I \}$

Oss.: $A \in O(n, \mathbb{C}) \Rightarrow \det(A) \in \{1, -1\}$

Allora $O(n, \mathbb{C}) = (O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n)) \cup \{ A \in O(n, \mathbb{C}) \mid$

Allora $O(n,\mathbb{C}) = \left(O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n)\right) \cup \{A \in O(n,\mathbb{C}) \mid \det(A) = -1\}$

classi disgiunti

quindi $O(n,\mathbb{C})$ non è irriducibile né connesso.

<u>Esercizio</u>: $O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n) = SO(n,\mathbb{C}) = O(n,\mathbb{C})^{\circ}$

è connesso.

<u>Proposizione</u>: Sia G gruppo alg. lineare.

(1) Esiste un'unica comp. irriducibile G° di G contenente l'elem. neutro. Vale: G° è anche una componente connessa di G ed è un sottogruppo normale di G.

(2) Le classi laterali di G° in G sono le comp. irriducibili e anche le comp. connesse di G

(3) Ogni sottogruppo chiuso di G e di indice finito contiene G°.

Dim.: Sia X la comp. connessa che contiene e, Dim.: Sia X la comp. connessa che contiene e, e decomponiamola in componenti irriduc.:

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_m.$$

Consid. la moltiplicazione

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \longrightarrow G$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto x_1 x_2 \cdots x_m$$

La sua immagine è irriducibile, quindi è contenuta in X_{i_0} per un i_0 perché contiene $e \in G$.

Allora l'immagine $X_1 \cdot X_2 \cdots X_m \subseteq X_{i_0}$, ma contiene tutti gli X_j. Allora $X_j = X_{i_0}$ $\forall j$.

Cioè $m = 1$.

Allora G° è comp. connessa, comp. irriduc., e chiusa.

E' normale: dato $g \in G$, $gG^\circ g^{-1}$ è irriducibile (coniugare per $g \in G$ è un isom. di G in G) e $gG^\circ g^{-1} \ni e$, quindi $gG^\circ g^{-1} = G^\circ$

Le classi laterali di G° sono chiuse irriducibili

Le classi laterali di G° sono chiuse, irriducibili, disgiunte e ricoprono G, quindi sono le sue comp. irriducibili e le comp. connesse. Allora sono anche aperte in G.

(3): esercizio.

$\square$