Algebra Superiore lez. 8

venerdì 6 novembre 2020 12:01

G = gruppo alg. lineare

X = G-var. affine

Obiettivo: studiare $X/\!/G$, e dimostrare che esiste se G è lin. riduttivo facendo vedere che allora $\mathcal{O}(X)^G$ è un'algebra finitam. generata.

__Oss.:__ Se G non è lin. riduttivo, ci sono controesempi (Nagata).

__Idea:__ se G è lin. riduttivo, abbiamo

$$\mathcal{O}(X) = \underbrace{\mathcal{O}(X)^G}_{G\text{-sottomodulo}} \oplus \underbrace{\mathcal{O}(X)_G}_{\text{complem. } G\text{-stabile}}$$

e possiamo usare la proiezione da $\mathcal{O}(X)$ in $\mathcal{O}(X)^G$ lungo $\mathcal{O}(X)_G$.

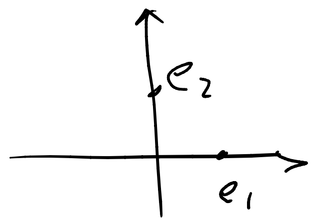
__Def.:__ Sia V un G-modulo (G qualsiasi), e sia U un G-modulo irriducibile. La e sia U un G-modulo irriducibile. La <u>componente isotipica</u> di V di tipo U è la somma di tutti i sottomoduli di V isomorfi a U.

<u>Oss.</u>: 1) Se V è completam. riducibile, es.

$$V = \underbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_m}_{\text{irriducibili}}$$

ma la decomposizione non è unica in generale, es.

$G = \{e\}$ $\quad V = \mathbb{C}^2 =$



$$= \mathbb{C}\cdot e_1 \oplus \mathbb{C}\cdot e_2$$
$$= \mathbb{C}\cdot(e_1+e_2) \oplus \mathbb{C}\cdot e_2$$

2) Se V è completam. riducibile:

$$V = \bigoplus_i \underbrace{V_i}_{\text{irriducibili}}$$

ciascun V_i è dentro una componente isotipica di V, d'altronde le componenti isotipiche sono

in V, a differenza le componenti isotipiche sono
sempre in somma diretta, quindi

$$V = \bigoplus_j \underbrace{C_j}$$

le componenti isotipiche

e questa decomposizione è <u>unica</u>.

<u>Lemma</u>: Sia G gruppo alg. lineare, linearm. riduttivo, V un G-modulo loc. regolare, di dimensione al più numerabile. Allora esiste un <u>unico</u> G-sottom. V_G tale che $V = V^G \oplus V_G$.

<u>Dim.</u>: Scegliamo una base $(v_i)_{i \in I}$ di V, $I \subseteq \mathbb{N}$, $I \ni 1$

per ogni n intero positivo, i vettori v_i con $i \leq n$ sono contenuti in un G-sottomodulo regolare $W_n \subseteq V$.

Sia U_n la somma dei W_i per $i \leq n$.

Allora
$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

Fissiamo $V_1 = U_1$, per ogni $n > 1$ fissiamo

Fissiamo $V_1 = U_1$, per ogni $n > 1$ fissiamo un complemento G-stabile V_n a U_{n-1} in U_n, cioè $U_n = U_{n-1} \oplus V_n$. Allora

$$V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_n$$

e ogni addendo è un G-modulo regolare.
Allora V è somma diretta delle sue componenti isotipiche, e V^G sono una di esse.
Poniamo V_G = somma delle altre componenti isotipiche.

$\square$

Def.: Siano G e V come nel lemma. Definiamo operatore di Reynolds $R_V : V \longrightarrow V^G$ come la proiezione lungo V_G.

Esempi: L'essere un'algebra fin. generata non si eredita a sottoalgebre, es.

a sottoalgebre, es.

$$\mathbb{C}[x,y] \supseteq \mathbb{C}[1, xy, x^2y, x^3y, \dots]$$

non è un'algebra fin. generata

<u>Teorema</u>: Sia G un gruppo algebrico lineare, linearm. riduttivo, e X una G-varietà affine. Allora $\mathcal{O}(X)^G$ è un'algebra finitam. generata.

Per la dimostrazione: usiamo $\underset{\substack{\| \\ R_X}}{R_{\mathcal{O}(X)}} : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)^G$ l'op. di Reynolds.

<u>Lemma</u>: Siano G e V, W come nella def. di R_V, e consid. $\varphi : V \to W$ un om. di G-moduli. Allora φ manda V^G in W^G, e ponendo $\varphi^G : V^G \to W^G$ la restrizione, allora

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "R_V"] & W \arrow[d, "R_W"] \\
V^G \arrow[r, "\varphi^G"'] & W^G
\end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\varphi^G \circ R_V = R_W \circ \varphi$.

<u>Dim.:</u> che $\varphi(V^G) \subseteq W^G$ è ovvio. Inoltre, φ manda sottomoduli irriducibili di V in $\{0\}$ oppure sottom. irr. di W isomorfi ai moduli di partenza. Allora φ manda le comp. isotipiche di V dentro le comp. isotipiche di W corrispondenti.

Allora per $v \in V$, scriviamo $v = \underset{\in V^G}{v^G} + \underset{\in V_G}{v_G}$

e abb.

$$\varphi(v) = \underbrace{\varphi(v^G)}_{\in W^G} + \underbrace{\varphi(v_G)}_{\in W_G}$$

da questo il lemma segue facilmente

da questo il lemma segue facilmente. $\square$

<u>Lemma</u>: Siano G e X come nel teorema. Allora esiste $R_X : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)^G$. Vale per ogni $f \in \mathcal{O}(X)$ e $a \in \mathcal{O}(X)^G$:

$$R_X(\underline{a} f) = \underset{\overset{\shortparallel}{R_X(a)}}{a} \cdot R_X(f).$$

<u>Dim.</u>: Consid. la moltiplicazione per a:

$$\mu_a : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$$
$$f \longmapsto af$$

Visto che $a \in \mathcal{O}(X)^G$, μ_a è un omom. di G-moduli, infatti per $g \in G$:

$$\mu_a(g \cdot f) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moltipl.} \\ \text{di funzioni}}}{a} (g \underset{\substack{\uparrow \\ \text{op. di } G}}{\cdot} f) = (g \cdot a)(g \cdot f) =$$

in funzioni

$$= g\cdot(af) = g\cdot\mu_a(f).$$

Allora

$$R_X(af) = R_X(\mu_a(f)) = \mu_a(R_X(f)) =$$
$$= a\cdot R_X(f).$$

$\square$

<u>Lemma</u>: Siano G e X come nel teorema. Allora $\mathcal{O}(X)^G$ è un anello Noetheriano (cioè ogni ideale è un ideale fin. generato, equivalentem. ogni catena ascendente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ di ideali si stabilizza).

<u>Dim.</u>: Sia $I \subseteq \mathcal{O}(X)^G$. Consideriamo l'ideale J di $\mathcal{O}(X)$ generato da I: $J = I\cdot\mathcal{O}(X)$.

Visto che I è G-stabile, è G-stabile anche J. Vale $J^G = I$, infatti

$$(J^G \supseteq R_X(J) = R_X(I\cdot\mathcal{O}(X)) = I\,R_X(\mathcal{O}(X))$$

$$\left(J^G \underset{\uparrow}{=}\right) \underbrace{R_X(J)} = R_X(I \cdot \mathcal{O}(X)) \underset{\uparrow}{=} I \cdot R_X(\mathcal{O}(X)) =$$

esercizio

per il lemma

$$= I \cdot \mathcal{O}(X)^G = I$$

Segue che $\mathcal{O}(X)^G$ è Noetheriano, perché data $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ catena ascendente di ideali di $\mathcal{O}(X)^G$, consid. $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ dove $J_s = I_s \cdot \mathcal{O}(X)$. Allora la catena degli J_s si stabilizza, ma $I_s = R_X(J_s)$, quindi anche $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ si stabilizza.

$\square$

<u>Lemma</u>: Sia $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ un'algebra commutativa unitaria, graduata, con $A_0 = \mathbb{C}$, e supponiamo che $A_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ sia un ideale finitam. generato. Allora A è un'algebra

finitam. generato. Allora A è un'algebra
finitam. generata.

<u>Dim.</u>: (Oss.: ogni elem. di A_+ si scrive come

$$f = \underline{c_1}\, f_1 + \dots + c_m f_m \quad \text{con } \underline{c_i \in A}$$

e $f_1, \dots, f_m$ generatori dell'ideale A_+.)

Consid. $f_1, \dots, f_m$ generatori dell'ideale A_+.
Possiamo supporre f_i omogeneo $\forall i$.

Facciamo vedere che $1, f_1, \dots, f_m$ generano A
come algebra. Sia B l'algebra gen. da
questi elementi, dim. per induzione su n che
$A_n \subseteq B$. Base dell'induzione: $A_0 \subseteq B$
per costruzione (perché $1 \in B$).

Sia ora $f \in \underline{A_n}$ con $n > 1$, allora $f \in A_+$
ed esistono $c_1, \dots, c_m \in A$ tali che

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$$

$$\underset{\text{omogeneo}}{f} = c_1 \underset{\text{omogenei}}{f_1} + \dots + c_m f_m$$

Possiamo supporre c_i omogeneo $\forall i$, allora ogni c_i ha grado più basso del grado di f. Per induzione, ogni c_i è in B, quindi $f \in B$ e $B = A$.

$\square$

Dim. del teorema: Come primo passo, supponiamo $X = V$ un G-modulo regolare. Se $x_1, \dots, x_n$ sono coord. su V:

$$\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d}_{= \mathcal{O}(X)_d}$$

G agisce su $\mathcal{O}(X)$ conservando i gradi dei polinomi, cioè $\mathcal{O}(X)_d$ è G-stabile $\forall d$. Allora anche $\mathcal{O}(X)^G$ è graduato:

$$\mathcal{O}(X)^G = \bigoplus^{\infty} \mathcal{O}(X)^G$$

$$\mathcal{O}(X)^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \underbrace{\mathcal{O}(X)^G_d}_{= \mathcal{O}(X)^G \cap \mathcal{O}(X)_d}$$

Abb. dunque un'algebra graduata, con $\mathcal{O}(X)^G_0 = \mathbb{C}$, ed è un anello Noetheriano. Per l'ultimo lemma, $\mathcal{O}(X)^G$ è un'algebra finitam. generata.

Sia ora X qualsiasi. Abb. visto che, a meno di isomorfismo G-equivariante, X è un chiuso di un G-modulo regolare V. Allora

$\mathcal{O}(X)$ è <u>quoziente</u> di $\mathcal{O}(V)$, cioè

abb. la restrizione $\varphi : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$

è un omomorfismo di algebre, suriettivo, G-equivariante. Allora consid. $R_V : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)^G$ e

$R_X : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)^G$. Per uno dei lemmi, abbiamo $\varphi^G : \mathcal{O}(V)^G \longrightarrow \mathcal{O}(X)^G$, e abbiamo $\varphi : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$, e

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{suriettivo}}}{R_X} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suriettivo}}}{\varphi} = \varphi^G \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suriettivo}}}{R_V}$$

Allora φ^G è anche suriettivo:

$$\varphi^G : \underbrace{\mathcal{O}(V)}_{\text{fin. generata}}{}^G \longrightarrow \mathcal{O}(X)^G$$

Segue che $\mathcal{O}(X)^G$ è fin. generato. $\square$

<u>Corollario</u>: Siano G e X come nel teorema.

Allora il quoziente categorico $\pi : X \longrightarrow X/\!\!/G$ esiste, ponendo

$X/\!\!/G$ = la varietà affine con f. reg. $\mathcal{O}(X)^G$

π = l'appl. regolare che corrisponde all'inclusione $\mathcal{O}(X)^G \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.

Esempi: 1) Ritroviamo gli esempi introduttivi fatti all'inizio. Ad es. $X = \mathbb{C}^n$ e $G = S_n$.

Sappiamo che G è linearmente riduttivo, e il quoz. $X/\!/G$ esiste e corrisponde a

$\mathcal{O}(X)^G = \mathbb{C}[x_1, .., x_n]^{S_n}$

Inoltre $\pi : X \longrightarrow X/\!/G$ si realizza come l'appl. corrispondente all'inclusione $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$

Cioè prendendo generatori di $\mathcal{O}(X)^G$, ad es. $\sigma_1, .., \sigma_n$, π è realizzata in coord. usando queste funzioni

$$\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$x \longmapsto (\sigma_1(x), .., \sigma_n(x))$$

Qui $\sigma_1, .., \sigma_n$ sono alg. indipendenti, quindi $\mathrm{Im}(\pi)$ non è contenuta in alcun chiuso di $\mathbb{C}^n$.

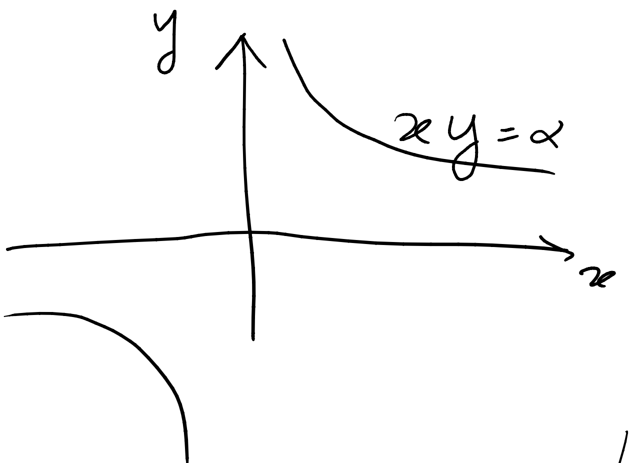
$\mathrm{Im}(\pi)$ non è contenuta in alcun chiuso di $\mathbb{C}^n$.

Inoltre abb. già osservato: questa π è anche suriettiva, e le fibre sono le G-orbite.

Quindi qui il quoz. categorico coincide col quoz. insiemistico.

(2) Sia $G = \mathbb{C}^*$ e $X = \mathbb{C}^2$ con

$$g \cdot (a, b) = (ga, g^{-1}b) \qquad \begin{matrix} g \in \mathbb{C}^* \\ a, b \in \mathbb{C} \end{matrix}$$



$\{xy = \alpha\}$ è una singola G-orbita se $\alpha \neq 0$

altre orbite: $\{0\}$, $\{(a,0) \mid a \neq 0\}$, $\{(0,b) \mid b \neq 0\}$

Sappiamo: G lin. riduttivo, quindi $X /\!/ G$ esiste. Non può essere il quoziente insiemistico, perché certe orbite non sono chiuse.

Studiamo $X /\!/ G$: corrisponde a $\mathcal{O}(X)^G$

Studiamo $X/\!\!/G$: corrisponde a $\mathcal{O}(X)^G$

cioè

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x,y]$$
$$\mathcal{O}(X)^G = \mathbb{C}[x\cdot y]$$

Abb.: di nuovo $\mathcal{O}(X)^G$ è un anello di polinomi in una sola variabile, e in coord.

$$\pi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{var. con funz. reg. } \mathbb{C}[z]$$
$$(a,b) \longmapsto ab$$

Le fibre di π non coincidono con le G-orbite: ciascuna G-orbita del tipo $\{xy = \alpha \neq 0\}$ va in un punto (e sono punti diversi per α diversi), però entrambi gli assi cartesiani vanno in $0 \in \mathbb{C}$.

Allora: π è suriettiva, le fibre su $\alpha \neq 0$ sono singole G-orbite (chiuse), la fibra sopra $\alpha = 0$ contiene tre orbite, di cui solo una è chiusa.

(3) Ritroviamo anche l'esempio fatto di $G = GL(n)$

(3) Ritroviamo anche l'esempio fatto di $G = GL(n)$ che agisce per coniugio su $X = M_n$. Abb. dimostrato che $\mathcal{O}(X)^G$ è un'algebra fin. generata, è un anello di polinomi. Quindi $X /\!/ G$ esiste, ed è $\mathbb{C}^n$.

(4) Vediamo in dettaglio il caso $n = 3$. Cioè $G = GL(3)$, agisce per coniugio su $M_3 = X$.

Sappiamo: $\mathcal{O}(X)^G$ è un anello di polinomi, generatori sono le funzioni simm. elem. negli autovalori di una matrice $A \in X$. Scriviamo:

$$\pi : M_3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$A \longmapsto \left(\underset{\sim}{Tr(A)}, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \det(A) \right)$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori di A (eventualm. coincidenti).

Osserviamo: $M_3 = (\mathbb{C} \cdot I) \oplus V \ldots$

Osserviamo: $M_3 = (\mathbb{C} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matr. identità}}}{\mathbb{I}}) \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrici a traccia nulla}}}{V}$

Allora dato $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, la fibra $\pi^{-1}(a,b,c)$ è fatta da matrici della forma

$$\left(\tfrac{1}{3} a \cdot \mathbb{I}\right) + (\ldots)$$

$$\begin{array}{cc} \cap & \cap \\ \mathbb{C} \cdot \mathbb{I} & V \end{array}$$

Cioè $\pi^{-1}(a,b,c) = \{\tfrac{1}{3} a \cdot \mathbb{I}\} \times \pi_0^{-1}(b,c)$

dove
$$\pi_0 : V \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$A \longmapsto (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \det(A))$$

Studiamo allora le fibre di π_0. Le forme di Jordan delle matrici di V:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ogni matrice in V è coniugata ad una e una sola matrice di questo tipo).

Sia $A \in V$ una matrice di questo tipo. Se è

Sia $A \in V$ una matrice di questo tipo. Se è diagonalizz. con gli autovalori distinti allora è del primo tipo. Nella fibra $\pi_0^{-1}(\pi_0(A))$ ci sono solo matrici con stessi autovalori, e sono tutte diagonalizzabili. Allora queste sono tutte fibre che sono singole G-orbite, chiuse.

Sia $B \in V$ con un autovalore λ di molt. alg. 2. Allora B è coniugata ad una matrice del primo tipo o del secondo. Allora

$$\pi_0(B) = \underbrace{(-3\lambda^2, -2\lambda^3)}$$

sono tutti punti che soddisfano l'eq. $4x^3 + 27y^2 = 0$

Cioè $\mathbb{C}^2$ contiene la curva $K = \{4x^3 + 27y^2 = 0\}$

Sia $(x,y) \in K$ con $x \neq 0$. La fibra $\pi_0^{-1}(x,y)$ è non vuota: basta prendere matrici del primo o secondo tipo, con $\lambda = \mu = \frac{3y}{2x}$.

o secondo tipo, con $\lambda = \mu = \frac{v}{2x}$.

Allora queste fibre contengono esattam. due classi di coniugio ciascuna.

<u>Esercizio:</u> trovare quale di queste due è chiusa, e quale no, e spiegare perché.
(Suggerim. negli appunti)

Rimane $(0,0) \in K$, e $\pi_0^{-1}(0,0)$ contiene le matrici di V di singolo autovalore 0, e formano 3 classi di coniugio, quelle risp. delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

le loro classi di coniugio non sono chiuse

singola classe di coniugio