Algebra Superiore lez. 7

giovedì 5 novembre 2020 15:45

Alcuni gruppi linearmente riduttivi

Teorema: Sia H un sottogruppo chiuso di indice finito di un gruppo algebrico lineare G. Se H è linearmente riduttivo, allora anche G lo è.

Dimostrazione

Sia V un G-modulo regolare, rappres. $\varphi: G \to GL(V)$, sia $U \leq V$ un G-sottomodulo.

Idea: $V = U \oplus Z$ con Z un H-sottomodulo.

L'idea è di „fare la media" dei sottospazi gZ con $g \in G$. Più precisamente, consideriamo $P: V \to U$ la proiezione su U lungo Z, e facciamo la media dei traslati di questa P.

Osserviamo: $\varphi(h) P \varphi(h^{-1}) = P$ per ogni $h \in H$.

Osserviamo: $\underbrace{\varphi(h) P \varphi(h^{-1})} = P$ per ogni $h \in H$.

Infatti prendiamo $v \in V$, e decomp.

$$v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in Z}{z} \qquad \text{allora } \underbrace{P(v)} = u$$

e

$$\underbrace{h \cdot P(h^{-1} \cdot v)} = h \cdot P\Big(\underbrace{h^{-1} u}_{\in U} + \underbrace{h^{-1} z}_{\in Z}\Big) =$$

$$= \cancel{h} \cdot (\cancel{h^{-1}} \cdot u) = u.$$

Allora è ben definita, per $gH \in G/H$, l'appl. lineare $\underbrace{P_{gH} = \underbrace{\varphi(g)} P \varphi(g^{-1})}$.

Definiamo

$$Q = \frac{1}{|G/H|} \sum_{gH \in G/H} \underbrace{P_{gH}}$$

Osserviamo: dato $u \in U$ abb.

$$P_{gH}(u) = g \cdot P(\underbrace{g^{-1} \cdot u}_{\in U}) = \cancel{g} \cdot (\cancel{g^{-1}} \cdot u) = u$$

Segue: Q è l'identità su U. Inoltre

Segue: Q è l'identità su U. Inoltre l'immagine di P_{gH} è in U $\forall g \in H$, quindi Q manda V a U.
Cioè Q è la proiezione da V in U lungo $\ker(Q)$. Allora $V = U \oplus \ker(Q)$

G-sottomodulo?

Dim. che Q commuta con $\varphi(G)$, sia $a \in G$

$$\varphi(a)\, Q\, \varphi(a^{-1}) = \frac{1}{|G/H|} \sum_{gH \in G/H} \varphi(a)\varphi(g) P \varphi(g^{-1})\varphi(a^{-1})$$

$$= Q$$

Segue facilmente che $\ker(Q)$ è un G-sottomodulo. Allora abbiamo trovato un complem. G-stabile di U.

$\square$

<u>Corollario</u>: (Teorema di Maschke) Tutti i gruppi finiti sono linearmente riduttivi.

Proposizione. $\mathbb{C}^*$ è linearmente riduttivo.

Proposizione: $\mathbb{C}^*$ è linearmente riduttivo.

Inoltre, sia V un $\mathbb{C}^*$-modulo irriducibile. Allora V ha dim. $=1$, ed esiste un intero n tale che $t \in \mathbb{C}^*$ agisce su V come la molt. per t^n.

Dimostrazione:

Sia V un $\mathbb{C}^*$-modulo regolare. Poniamo $X = V^*$, con l'azione solita indotta dall'azione su V. Allora

$$\underbrace{\mathcal{O}(X)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(V^*)_n$$

dove $\mathbb{C}^*$ agisce su $\mathcal{O}(V^*)_n$ come la moltiplicazione per t^n. D'altronde $V = (V^*)^*$ e quindi $V \subseteq \mathcal{O}(V^*)$, ed è un G-sottomodulo. Esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che

$$V \subseteq \bigoplus_{n=-N}^{N} \underbrace{\mathcal{O}(V^*)_n}$$

somma di irrid. di dim. 1

Ciascun $\mathcal{O}(V^*)_n$ è completam. riducibile, possiamo scriverlo come somma diretta di sottospazi vett. di dim. 1, e allora ciascuno sarà un G-sottomodulo irriducibile.

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}^\times}$

Quindi la somma diretta qui sopra ha dim. finita ed è completam. riducibile, e allora anche V è completam. riducibile.

Sia infine V irriducibile, e proiettiamo V su tutti i sottomoduli irriducibili degli $\mathcal{O}(X)_n$: almeno una di queste proiezioni è un isom. $\square$

<u>Esempio:</u> Sia N il sottogr. di $SL(2)$ delle matrici della forma:

delle matrici della forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}}_{} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}}_{}$$

E' facile verificare che è un sottogr. chiuso di $SL(2)$. Contiene il sottogruppo

$$\underbrace{H(2) \cap SL(2)}_{= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}} \quad \text{che ha indice finito in } N$$

Visto che $\mathbb{C}^*$ è linearmente ridotto, anche N lo è.

<u>Osservazione</u>: La proposiz. vale anche per $(\mathbb{C}^*)^n$, infatti nell'esempio delle $\mathbb{C}^*$-varietà regolari si può rimpiazzare $\mathbb{C}^*$ con $(\mathbb{C}^*)^n$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ con

$$\mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$$

e si fa vedere che le azioni di $(\mathbb{C}^*)^n$

e si fa vedere che le azioni di $\mathbb{C}^{*})^n$ su varietà affini X corrispondono alle strutture di anello $\mathbb{Z}^n$-graduato su $\mathcal{O}(X)$. Di nuovo, ogni $(\mathbb{C}^*)^n$-modulo regolare è completam. riducibile, e ogni modulo irriduc. ha dim.$=1$, e $(\mathbb{C}^*)^n \ni (t_1, \dots, t_n)$ agisce per moltiplicaz. per $t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ dove $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

<u>Quozienti categorici e teoria geometrica degli invarianti (GIT), versione affine</u>

Sia G gruppo alg. lineare, X una G-var. affine, vogliamo studiare $\underline{X/G}$.

<u>Def.</u>: Una varietà affine Y insieme a un'appl. regolare $\pi : X \to Y$ si dice

a un'appl. regolare $\pi: X \to Y$ si dice quoziente categorico se π è costante sulle G-orbite, e deve fattorizzare ogni altra applicaz. regolare costante sulle G-orbite, cioè se $\varphi: X \to Z$ è regolare, costante sulle G-orbite (Z affine), allora esiste $\boxed{\text{UNICA}}$ $\psi: Y \to Z$ regolare tale che

$$\varphi = \psi \circ \pi .$$

Esempio: Supponiamo che X abbia una G-orbita densa. Allora data $\varphi: X \to Z$ costante sulle G-orbite, è costante su tutto X. Allora un quoziente categorico esiste, basta prendere Y che contiene solo un punto.

Oss.: Se esiste un quoziente categorico, allora in un certo senso è unico a meno di isom. Cioè, dati due quozienti categorici

Cioè, dati due quozienti categorici

$\pi : X \to Y$ e $\pi' : X \to Y'$

esiste un isomorfismo $Y \xrightarrow{\psi} Y'$ di varietà

tale che $\pi' = \psi \circ \pi$.

Allora lo chiameremo <u>il</u> quoziente categorico, e di solito si denota con $\pi : X \to X /\!\!/ G$.

Per l'esistenza di quozienti categorici si sfrutta l'idea seguente:

Sia X una G-varietà affine, e $\varphi : X \to Z$ regolare, Z affine, e costante sulle G-orbite.

Consideriamo $\varphi^* : \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(X)$.

Sia $f \in \mathcal{O}(Z)$, visto che φ è costante sulle G-orbite, anche $\varphi^*(f)$ è costante sulle G-orbite, cioè $\varphi^*(f) \in \underline{\mathcal{O}(X)^G}$.

Cioè possiamo fattorizzare φ^* come

$$\mathcal{O}(Z) \longrightarrow \mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Z) \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi^*"] & \mathcal{O}(X)^G \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(X) \end{tikzcd}$$

Allora $\mathcal{O}(X)^G$ è un buon candidato per corrispondere al quoziente categorico. Cioè se $\mathcal{O}(X)^G = \mathcal{O}(Y)$ per una var. affine Y, allora Y sarebbe un quoziente categorico.

Usiamo:

<u>Corollario</u> (del Nullstellensatz): Sia R un'algebra commutativa unitaria finitam. generata e senza elem. nilpotenti. Allora esiste X var. affine tale che $R \cong \mathcal{O}(X)$.

<u>Dim</u>: Scegliamo $a_1, \dots, a_n \in R$ generatori, allora

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow R$$
$$x_i \longmapsto a_i$$

è un omomorf. di algebre suriettivo, cioè $R \simeq \underline{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]} \leftarrow$

cioè $R \cong \dfrac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \leftarrow}{I \leftarrow \text{nucleo}}$

Definiamo $X \subseteq \mathbb{C}^n$ come $V(I)$, dimostriamo che $I = I(X)$.

Ovviamente $I \subseteq I(X)$, sia $f \in I(X)$, allora f si annulla su $V(I)$, dal Nullstellensatz segue: $f^d \in I$ per un intero positivo d. Visto che R non ha nilpotenti, allora $f \in I$. $\square$

<u>Oss.</u>: Se $X = \emptyset$ allora $\mathcal{O}(X)$ ha solo un elemento $\emptyset \longrightarrow \mathbb{C}$.