Algebra Superiore lez. 6

mercoledì 4 novembre 2020 07:58

<u>Dim. del corollario</u> (continua)

Consideriamo $X = G$ come G-varietà con la moltiplicazione a sinistra

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto gx$$

Per il teorema visto prima, possiamo assumere che X sia un chiuso G-stabile di un G-modulo $V \cong \mathbb{C}^n$ con coordinate $y_1, \dots, y_n$.

L'azione di G è lineare, $\varphi : G \to GL(n)$

chiamiamo $a_{i,j}(g)$ le entrate di $\varphi(g)$.

$$y_i(gx) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(g)\, y_j(x)$$

Prendiamo $x = e$ l'elem. neutro del gruppo:

$$y_i(g) = \sum^{n} a_{ij}(g)\, y_i(e)$$

$$\underline{y_i(g)} = \sum_{j=1,\dots,n} a_{ij}(g)\, y_i(e)$$

Oss: X è chiuso in $\mathbb{C}^n$, quindi le restrizioni $y_1|_X, \dots, y_n|_X$ generano come algebra $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(G)$. Allora anche le funzioni $a_{ij} \in \mathcal{O}(G)$ generano come algebra $\mathcal{O}(G)$.

Ricapitolando:

$$\varphi : G \longrightarrow \underset{\overline{\varphi(G)}}{\overset{}{Y}} \subseteq M_n$$

$$Y = \overline{\varphi(G)}$$

E' un isomorfismo di varietà affini, perché:

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

·) $\underline{\text{è iniettiva}}$, perché se $f \in \mathcal{O}(Y)$ è tale che $\varphi^*(f) = 0$, allora f è nulla su $\varphi(G)$, che è denso in Y

·) $\underline{\text{è suriettiva}}$: le coordinate su $M_n \cong \mathbb{C}^{n^2}$

sono x_{ij}, e $\varphi^*(x_{ij}|_Y)$ è a_{ij}.
Le funzioni $x_{ij}|_Y$ generano $\mathcal{O}(Y)$ (comunque sono semplicemente in $\mathcal{O}(Y)$), e generano $\mathcal{O}(X)$.

Segue che φ^* è un isomorfismo, e anche φ.

$\square$

Esempi: Il corollario si applica al gruppo $G = \mathbb{C}$ con la somma

GRUPPI LINEARMENTE RIDUTTIVI

Def.: Sia G gruppo alg. lineare, V un G-modulo.

1) Un sottosp. vett. G-stabile di V si dice sottomodulo o G-sottomodulo.
2) V si dice irriducibile (o semplice) se ha esattamente due sottomoduli $\{0\}$, V.
3) V si dice completamente riducibile se ...

3) V si dice <u>completamente riducibile</u> se è somma diretta di moduli irriducibili.

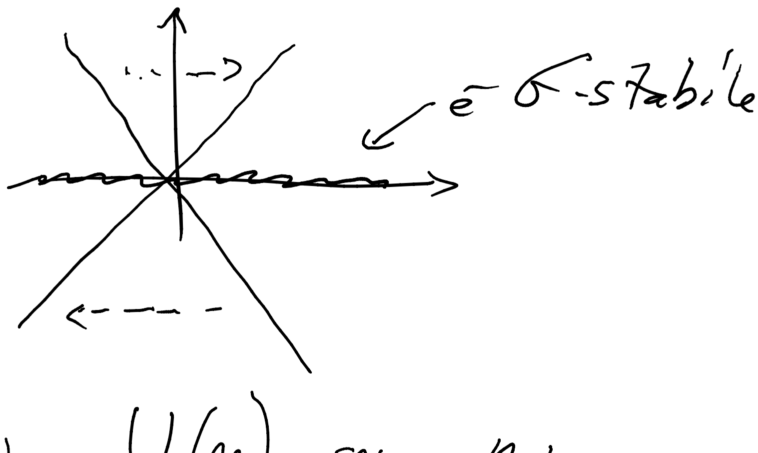
4) G si dice <u>linearmente riduttivo</u> se ogni G-modulo regolare è <u>completam. riducibile</u>.

<u>Oss.:</u> $V = \{0\}$ è completam. riducibile, ma non irriducibile. Infatti è somma diretta di „nessun modulo".

<u>Esempio:</u> (1) $G = \mathbb{C}$ non è linearmente riduttivo, infatti $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow GL(2)$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$V = \mathbb{C}^2$ non è irriducibile, perchè $\left\{ \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un sottomodulo



(2) Anche $B(n)$ e $U(n)$ sono non

linearm. riduttibili.

<u>Definizione</u>: Un'applicazione lineare $\varphi: V \to W$ fra G-moduli si dice <u>omomorfismo</u> (di G-moduli) se è G-equivariante.

<u>Oss.</u>: Il nucleo e l'immagine di un omomorf. sono sottomoduli.

<u>Proposizione</u>: Sia V un G-modulo di dim. finita. Allora V è completam. riducibile se e solo se per ogni G-sottomodulo U esiste un G-sottom. W tale che $V = U \oplus W$.

<u>Dim.</u>: Supponiamo che per ogni U esista W. Dim. per induzione su $\dim(V)$ che V è completam. riducibile: se $\dim(V) = 0$ allora V è completam. riducibile.

Passo induttivo: se non ha sottom. diversi da $\{0\}$ e da V allora è completam. riducibile perché è irriducibile. Altrim. scegliamo $U \neq \{0\}$ sottomodulo di dim. minima. Per minimalità, U è irriducibile, e $V = U \oplus W$.

sottomodulo di dim. $< \dim(V)$.

Per induzione, W è compl. riducibile quindi lo è anche V, se dimostriamo che W ha la stessa proprietà di V.

Sia W' sottomodulo di W, e consideriamo $U \oplus W'$, che ha un complementare Z, G-sottom tale che $Z \oplus (U \oplus W') = V$.

Sia Z' la proiezione di Z su W lungo U.

Si dim. facilmente che Z' è un sottomodulo di W, e che $Z' \oplus W' = W$.

Allora W ha la stessa proprietà di V, quindi

Allora W ha la stessa proprietà di V, quindi è completam. riducibile.

Viceversa: sia $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ decomp. in irriducibili, e sia $W \subseteq V$ un sottomodulo.
Troviamo un complem. per W:

definiamo $V_1' = \begin{cases} \{0\} & \text{se } V_1 \subseteq W \\ V_1 & \text{se } V_1 \cap W = \{0\} \end{cases}$

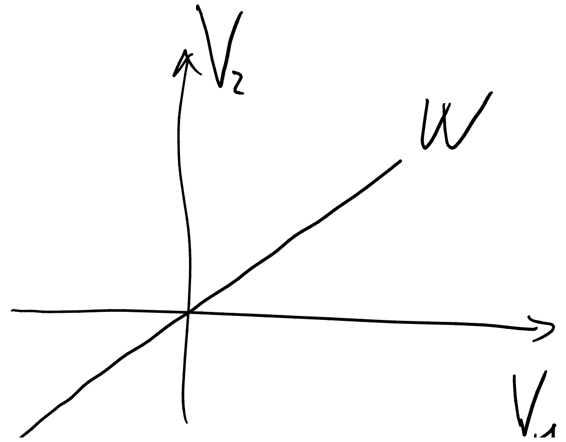
Andiamo avanti:

definiamo $V_i' = \begin{cases} \{0\} & \text{se } V_i \subseteq W \oplus V_1' \oplus \ldots \oplus V_{i-1}' \\ V_i & \text{se } V_i \cap (W \oplus \ldots \oplus V_{i-1}') = \{0\} \end{cases}$

Otteniamo

$$W \oplus \underbrace{V_1' \oplus \ldots \oplus V_m'}_{\text{è un sottomodulo}} = V$$

$\square$



$V_1 = V_1'$

$V_1 \oplus V_2 = \mathbb{C}^2 = V$

$V_2 \subseteq W \oplus V_1$

$V_2' = \{0\}$

$V_1 = V_1'$ $\Rightarrow V_2' = \{0\}$

<u>Corollario</u> (della dim.) Sia V completam. riducibile di dim. finita, allora ogni suo sottomodulo è completam. riducibile.

<u>Lemma:</u> Sia $\varphi: V \to W$ omom. di G-moduli irriducibili, allora φ è un isomorfismo oppure l'applicazione nulla.

<u>Dim.:</u> Il nucleo e l'immagine di φ sono sottomoduli. $\square$

<u>Lemma</u> (Schur) Sia V un G-modulo di dim finita e sia $A \in End(V)$ che commuta con l'immagine di G in $GL(V)$. Allora A è un multiplo scalare dell'identità.

<u>Dim.:</u> A ha almeno un autovalore λ, e

Dim.: A ha almeno un autovalore λ, e

consid. $U =$ l'autospazio di λ.

Abbiamo U è un sottomodulo di V perché

$$A(gu) = g\,Au = g\lambda u = \lambda\, gu$$

$\forall g \in G$ e $\forall u \in U$.

Allora $U = V$ cioè $A = \lambda\, Id_V$. $\square$

Lemma: Sia V un $G = \mathbb{C}$-modulo regolare irriducibile. Allora V ha dim. 1 e G agisce banalmente.

Dim.: G è un gruppo commutativo, quindi ogni $g \in G$ agisce come la moltiplicazione per uno scalare (Lemma di Schur): $\chi(g) \in \mathbb{C}^*$.

Fissiamo $v \neq 0$ in V, e osserviamo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{azione}}}{g \cdot v} = \chi(g)\, v$$

$\uparrow$ molt. scalare x vettore

Consid., rispetto a una base di V, una coordinata non nulla di v:

a meno della moltipl. per uno scalare, $\chi(g)$ è quella coordinata, del vettore $g \cdot v$.

Segue: $\chi : \underset{\mathbb{C}}{\overset{\|}{G}} \to \mathbb{C}^*$ è una f.ne regolare,

per il teo. fondam. dell'algebra, $\chi(g)$ è costante: $\chi(g) = \chi(\underset{\mathbb{C}}{\overset{\cap}{0}}) = 1 \quad \forall g \in G$.

Quindi l'azione di G è banale, e allora ogni sottosp. vett. è sottomodulo, e allora V ha dim. 1.

$\square$

<u>Corollario:</u> Ogni $G = \mathbb{C}$-modulo regolare $V \neq \{0\}$ ha un vettore $v \neq 0$ fissato da G.

<u>Dim.:</u> Se V è irriducibile allora ogni $v \in V$ è fissato, altrim. basta prendere un sottomodulo $U \neq \{0\}$ di dim. minima,

un sottomodulo $U \neq \{0\}$ di dim. minima,
che allora è irriducibile.

$\square$

<u>Teorema</u>: Sia G linearm. riduttivo.
Allora G <u>non ha</u> sottogruppi chiusi
normali $\cong \mathbb{C}$.

<u>Dim.</u>: Sia per assurdo $H \leq G$ sottogr. chiuso
$\cong \mathbb{C}$. Supponiamo $G \subseteq GL(n)$,
consid. l'azione usuale di G su $\mathbb{C}^n = V$.
Per il lemma $\underbrace{V^H}_{\text{vettori fissati da } H} \neq \{0\}$

inoltre V^H è un sottomodulo perché H è
un sgr normale (esercizio):
$$V = V^H \oplus \underbrace{W}_{G\text{-sottomodulo}}$$
Anche in W vale $W^H \neq \{0\}$,
e andando avanti otteniamo che H
agisce banalmente su tutto V. assurdo

agisce banalmente su tutto V: assurdo. $\square$

Oss.: 1) Vale il "se e solo se".

2) Il viceversa del teorema è falso in caratteristica positiva.