Algebra Superiore lez. 5

giovedì 29 ottobre 2020 09:01

Esempi:

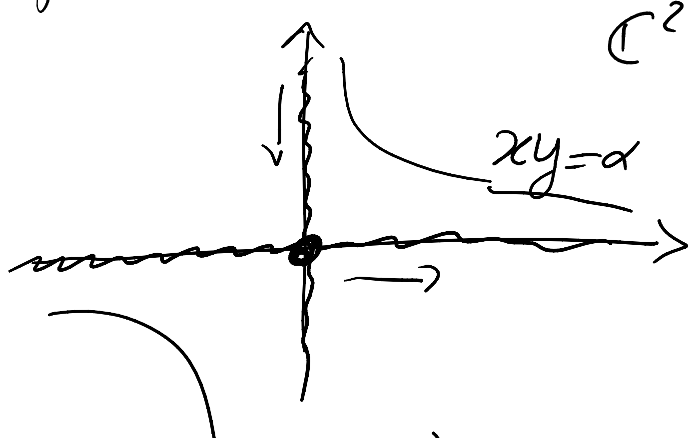
1) $G = \mathbb{C}^*$ che agisce su $V = \mathbb{C}^2$ tramite $g \cdot (a, b) = (ga, g^{-1}b)$

Alcuni chiusi G-stabili

(a) le iperboli di eq. $xy = \alpha$ ← fissato $\neq 0$

ciascuna è una singola G-orbita

(b) gli assi cartesiani $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$



(c) l'origine $(0,0)$

2) Sia $G = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot {}^tA = I\}$

si scrive $O(n, \mathbb{C})$.

si scrive $U(n, \mathbb{C})$.

Sia $V = \mathbb{C}^n$, e def.

$$X_\alpha = \{ v \in V \mid {}^t v \cdot v = \alpha \}$$

vettore colonna

prod. righe per colonne

$\in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Sono chiusi G-stabili, e in effetti singole orbite. Infatti dato $v \in X_\alpha$, possiamo completarlo ad una base

$$\mathcal{B} = (v = v_1, v_2, \dots, v_n)$$

tale che ${}^t v_i \cdot v_i \neq 0$. Si può applicare il procedim. di Gram-Schmidt e ortogonalizzare la base $\mathcal{B}$. Si può anche normalizzarla, ottenendo una base "ortonormale" $\mathcal{B}'$.

La matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}'$ è in $O(n, \mathbb{C})$, e la sua inversa manda $v = v_1$ in

$\sqrt{\alpha}\, e_1$ ← una scelta di una rad.

$$v_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← una scelta di una rad. quadrata di α

Segue che $X_\alpha = G \cdot v_0$.

3) Sia $G = GL(n)$ che agisce per coniugio su $V = M_n$, cioè $g \cdot A = gAg^{-1}$.

Fissato r intero, definiamo

$$X_r = \{A \in M_n \mid \mathrm{rg} A \leq r\}$$

È un chiuso di Zariski, G-stabile.

4) In modo simile si può far agire G su M_n per moltiplicaz. a sinistra o a destra.

5) Sia $G = GL(n) \times GL(n)$, che agisce su $V = M_n$ per moltiplic. a sinistra e a destra: $(g, h) \cdot A = gAh^{-1}$.

a destra: $(g,h)\cdot A = g \ldots$.

Anche qui X_r è un chiuso G-stabile, ed è una singola G-orbita (esercizio: dimostrarlo).

6) Sia $G = GL(n)$ che agisce su M_n tramite $g \cdot A = gA{}^t g$.

La stessa azione si può definire sull'insieme $V \subseteq M_n$ delle matrici simmetriche.

(7) Sia $G = \mathbb{C}^*$. Allora

$$\mathcal{O}(G) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \cdot t^n$$

Sia X una G-varietà affine. Sia $f \in \mathcal{O}(X)$, e la funzione $(t \cdot f)(x)$ nelle variabili t, x, cioè su $\underline{\underline{G \times X}}$.

Possiamo scriverla come:

$$(t \cdot f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)\, t^n$$

$n \in \mathbb{Z}$

(la somma è finita, cioè solo un numero finito di f_n è non nulla), e $f_n \in \mathcal{O}(X)$.

Ric.: $t' \cdot (t \cdot f) = \underbrace{(t't)}_{\text{prod. in } \mathbb{C}^*} \cdot f$; allora

$$((\underline{t't}) \cdot f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{f_n(x)\,(t't)^n}$$

$$\parallel$$

$$(\underbrace{t'}_{t \text{ è lineare su } \mathcal{O}(X)} \cdot (t \cdot f))(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(t' \cdot f_n)(x)}\, t^n$$

Possiamo confrontare i singoli coefficienti:

segue che $\underbrace{t' \cdot f_n}_{\text{azione di traslazione}} = \underbrace{(t')^n f_n}_{\text{prodotto di funzioni}}$

Quindi $\mathcal{O}(X)$ si decompone in somma diretta:

$$\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(X)_n$$

dove $\mathcal{O}(X)_n$ è tale che se $F \in \mathcal{O}(X)_n$

e $t \in G = \mathbb{C}^*$ allora $t \cdot F = t^n F$

e $t \in G = \mathbb{C}^*$ allora $t \cdot F = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{C}^*}}{t^m} F$.

(per $t = 1$ abb. dalla discuss. di prima

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(x) \quad)$$

Questa decomposizione rende $\mathcal{O}(X)$ un anello $\underline{\mathbb{Z}\text{-graduato}}$, perché

$$\underline{\mathcal{O}(X)_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. di funzioni}}}{\cdot} \underline{\mathcal{O}(X)_m} = \underline{\mathcal{O}(X)_{n+m}}.$$

La costruzione si può anche invertire cioè data una varietà affine e una $\mathbb{Z}$-gradazione di $\mathcal{O}(X)$, esiste un'azione di $\mathbb{C}^*$ su X che la induce.

Per la dim. dell'ultimo teo. della lez. 4, facciamo due altri richiami di geom. algebrica.

<u>Proposizione</u>: Siano X, Y varietà affini, e sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione regolare, allora $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ è un omomorfismo di algebre. Viceversa, se date X e Y, abbiamo un omomorfismo $\Phi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ di algebre, esiste un'<u>unica</u> applicazione regolare $\varphi : X \to Y$ tale che $\Phi = \varphi^*$.

<u>Dim.</u>: La prima affermazione è ovvia.

Vediamo il viceversa. Siano X e Y affini, $\Phi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, vogliamo definire φ.

Sia $Y \subseteq \mathbb{C}^m$, con coordinate $y_1, .., y_m$ le restrizioni $y_i|_Y$ sono in $\mathcal{O}(Y)$, consideriamo

$\underline{\Phi(y_i|_Y) \in \mathcal{O}(X)}$

Definiamo:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

$$x \longmapsto \left(\overbrace{\underline{\Phi(y_1|_Y)}(x), \dots, \underline{\Phi(y_m|_Y)}(x)} \right)$$

Si tratta di un'applicazione regolare, verifichiamo che $\varphi(X) \subseteq Y$. Sia $p(y_1, \dots, y_m) \in I(Y)$

e calcoliamo per $x \in X$

$$p\left(\Phi(y_1|_Y)(x), \dots, \Phi(y_m|_Y)(x) \right) =$$

$$\Phi\left(p(y_1|_Y, \dots, y_m|_Y) \right)(x) =$$

$$= \Phi\left(\underbrace{p(y_1, \dots, y_m)|_Y}_{\text{è la f.ne nulla su } Y} \right)(x) =$$

$$= 0$$

$\left(\text{oss.: } \left(\Phi(y_1 y_2) = \Phi(y_1) \cdot \Phi(y_2) \right) \right)$

Quindi $\varphi(X)$ svanisce su $V(I(Y)) \underset{\uparrow}{=} Y$ perché Y è chiuso.

Inoltre per costruzione

$$\boxed{\varphi^*(y_i|_Y) = \Phi(y_i|_Y)}$$

per ogni i e visto che φ^* e Φ sono omom.

per ogni i, e visto che φ^* e Φ sono omom. di algebre, coincidono.

Inoltre questa φ è l'unica applicaz. regolare tale che $\varphi^*(y_i|_Y) = \Phi(y_i|_Y)$, e segue l'unicità di φ. $\square$

__Lemma:__ Sia X varietà affine, sia $\underline{U \subseteq \mathcal{O}(X)}$ un sottosp. vettoriale di dim. finita che $\underline{\text{genera } \mathcal{O}(X) \text{ come algebra}}$.

Allora l'applicazione:

$$\varphi : X \longrightarrow V = U^*$$
$$x \longmapsto \underline{(u \longmapsto u(x))} \quad u \in U$$

è regolare, ed è un isomorfismo di X con la sua immagine, che è un chiuso di Zariski di V.

Dim.: Scegliamo una base $(f_1, \dots, f_m)$ di U, Dim.: Scegliamo una base $(f_1, \ldots, f_m)$ di V, allora $f_1, \ldots, f_m$ generano $\mathcal{O}(X)$ come algebra. Allora $\mathcal{O}(X)$ è isomorfa a

$$A = \frac{\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]}{J}$$

cioè c'è un isomorfismo $\Psi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ che manda $y_i + J$ in f_i.

Prendiamo $Y = V(J)$ in $\mathbb{C}^m$, abbiamo $A \cong \mathcal{O}(Y)$, che pensiamo come isomorfismo $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Questo corrisponde, per la proposizione, a un isomorfismo $\varphi : X \to Y$ di varietà.

Ponendo u dell'enunciato del lemma uguale alle funzioni f_i, otteniamo che φ è proprio quella dell'enunciato. $\square$

Dim. dell'ultimo teorema della lez. 4

Siano $f_1, \ldots, f_m$ generatori di $\mathcal{O}(X)$ come algebra, e consideriamo U il sottosp. vettoriale generato. Possiamo assumere che U sia G-stabile. Consid.

$$\varphi : X \longrightarrow V = U^*$$
$$\underline{x} \longmapsto \underbrace{(u \mapsto u(x))}$$

Per il lemma, φ è un isomorfismo di X con la sua immagine, che è un chiuso di Zariski di V. Rimane da dim. che φ è G-equivariante. Sia $g \in G$ e $x \in X$, allora

$\varphi(\underbrace{g \cdot x})$ è il funzionale $u \mapsto u(\underline{g} \cdot x)$.

Inoltre:

$$\underline{g} \cdot \underline{\big(\underset{\in U}{u} \mapsto u(x)\big)} = \underline{\big(u \longmapsto (\underbrace{g^{-1}} \cdot u)(x)\big)}$$

$\underline{U}$ è U

e abbiamo

$$(\underbrace{g^{-1}}\circ u)(x) = u(g\cdot x)$$

Segue: φ è G-equivariante. $\square$

<u>Corollario:</u> Sia G varietà affine, tale che la moltiplicazione $G\times G \to G$ e l'inversione $G \to G$ siano applicazioni regolari. Allora G è isomorfo (come gruppo e come varietà) a un sottogr. chiuso di $\underline{GL(n)}$, cioè G è un gruppo algebrico lineare.

<u>Dim.:</u> Osserviamo che possiamo applicare l'ultimo teorema della lez. ↳ anche a G, perché tutti i risultati che erano

... si basavano sul fatto

necessari alla dim. si basavano sul fatto

che $\mu^*: \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G \times G)$

moltipl. su G