Algebra superiore lez. 4

giovedì 22 ottobre 2020 16:13

Consid $GL(n)$, è una varietà affine per quello che abb. visto ieri. Le funzioni regolari su $GL(n)$ sono gen. come algebra dalle funzioni "entrate della matrice" x_{ij}, e da $\dfrac{1}{\det(x)}$:

matr. di $GL(n)$

$$\mathcal{O}(GL(n)) = \mathbb{C}\left[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, \frac{1}{\det(x)}\right]$$

Se $G \subseteq GL(n)$ è un gruppo alg. lineare, anche G è una varietà affine.

In generale se $X \subseteq \mathbb{C}^m$ è un chiuso di Z.,

allora
$$\mathcal{O}(X) \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]}{I(X)}$$

D'altronde se $Z \subseteq X$ ed è chiuso, poss. considerare le funzioni reg. su X che svaniscono su Z: $I_X(Z) \subseteq \mathcal{O}(X)$. Allora

$$\mathcal{O}(Z) = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]}{I(Z)} = \frac{\mathcal{O}(X)}{I(Z)}$$

$$\mathcal{O}(Z) = \frac{\quad}{I(Z)} = \frac{\quad}{I_X(Z)}$$

Quindi

$$\mathcal{O}(G) = \frac{\mathcal{O}(GL(n))}{I_{GL(n)}(G)} .$$

Altro richiamo: Se $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ chiusi di Z.,
allora $X \times Y$ è una varietà affine, si
può costruire dentro $\mathbb{C}^{n+m}$ dando l'ideale
generato da $I(X)$ nelle prime n variabili
$x_1, \dots, x_n$, e da $I(Y)$ nelle seconde m variabili
$y_1, \dots, y_m$.

Questo implica che ogni $f \in \mathcal{O}(X \times Y)$
si scrive come somma di prod. di una f.ne in $\mathcal{O}(X)$
per una in $\mathcal{O}(Y)$. Vale anche

$$\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)$$

Proposizione: Sia G gr. alg. lineare.
La moltiplicazione

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto gh$$

e l'inversione

$$\eta : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

sono applicazioni regolari. Dato $g \in G$ sono regolari $G \to G$, $h \mapsto gh$ e $G \to G$, $h \mapsto hg$. Infine data $f \in \mathcal{O}(G)$, esistono $a_i, b_i \in \mathcal{O}(G)$ tali che

$$f(gh) = \sum_{i=1}^{p} \underline{a_i(g)}\, b_i(\underline{h})$$

<u>Ultimo richiamo:</u> Date X, Y varietà affini, $\varphi : X \to Y$ si dice <u>regolare</u> se $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \subseteq \mathcal{O}(X)$, cioè se per ogni $f \in \mathcal{O}(Y)$, la funzione $f \circ \varphi$ è

per ogni $f \in \mathcal{O}(Y)$, da cui dunque $f \circ \varphi$ è regolare su X.

<u>Oss.</u>: La def. è equivalente, se $X \subseteq \mathbb{C}^n$ (chiuso), $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ (chiuso), al richiedere che φ sia data, in coordinate, da polinomi.
(esercizio: dimostrarlo, considerando $\varphi^*(y_i|_Y)$ dove $y_1, \dots, y_m$ sono le coord. su $\mathbb{C}^m$).

<u>Dim. della prop.</u>: Come abb. visto, poss. vedere G come chiuso in $\mathbb{C}^{n^2+1}$ con coord. $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$, $\frac{1}{\det(x)}$. Le applicaz. della prop. sono date in coord. da formule polinomiali nelle entrate delle matrici e in $\frac{1}{\det(x)}$, quindi sono regolari.
Infine

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (g, h) &\longmapsto f(gh) \end{aligned}$$

è $f \circ \mu$, cioè $\mu^*(f)$. Allora è in $\mathcal{O}(G \times G)$, quindi si scrive come nella prop. $\square$

Rappresentazioni regolari

Def.: Sia G gruppo alg. lineare. Una *rappr. regolare* di G è un omomorfismo $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ di gruppi, dove V è uno sp. vett. di dim. finita, tale che φ è un'applicazione regolare di varietà algebriche (identif. $GL(V)$ con $GL(\dim(V))$ scegliendo una base).

Esempi: 1)
$$\begin{aligned} GL(n) &\longrightarrow GL(n) \\ g &\longmapsto g \end{aligned}$$
è una rappr. regolare

$$\begin{aligned} GL(n) &\longrightarrow GL(n) \\ g &\longmapsto {}^t g^{-1} \end{aligned}$$
è una rappr. regolare

$$\begin{aligned} GL(n) &\longrightarrow GL(1) \\ g &\longmapsto \det(g)^d \end{aligned}$$
dove $d \in \mathbb{Z}$.

Se $\varphi: G \to GL(V)$ è una rappr. reg., V si dice anche G-modulo regolare, e φ si scrive anche come azione di G su V:

come azione di G su V:

$$G \times V \longrightarrow V$$
$$(g, v) \longmapsto \varphi(g)(v)$$

<u>Def.</u>: Se V ha dimensione qualsiasi, allora un omom. di gruppi $G \to GL(V)$ si dice rappr. <u>localmente regolare</u> (o <u>rappr. razionale</u>) se $\forall E$ sottosp. vett. di V di dim. finita, esiste un sottosp. vett. $E' \supseteq E$ di dim. finita G-stabile, tale che $G \to GL(E')$ è <u>regolare</u>.

<u>Es.</u>: 1) $G = \mathbb{C}$ (con la somma)

$V = \mathcal{O}(G)$, con la rappr.

$$G \longrightarrow GL(\mathcal{O}(G))$$
$$g \longmapsto (f(x) \longmapsto f(x-g))$$

penso agli elt. di $\mathbb{C}$ come numeri complessi invece che come matrici 2x2

$V \cong \mathbb{C}[x]$ ha dimensione infinita, però dato $E \subseteq \mathbb{C}[x]$ di dim. finita, esiste d intero positivo tale che $E \subseteq \mathbb{C}[x]_{\leq d}$, e $E' = \mathbb{C}[x]_{\leq d}$ è un sottosp. G-stabile di dim. finita.

2) $V = \mathbb{C}(x)$, con stessa azione di G, non è localm. regolare.

Sia G gruppo alg. lineare, consid. <u>due</u> rappr di G su $V = \mathcal{O}(G)$, indotte da due azioni di G su se stesso:

1) la <u>traslazione a sinistra</u> $g \cdot_L h = gh$

2) la <u>traslazione a destra</u> $g \cdot_R h = hg^{-1}$

Otteniamo due azioni di G su $\mathcal{O}(G)$:

1) la <u>trasl. a sinistra</u> $L : G \to \mathcal{O}(G)$

$$\underbrace{L(g)(f)}_{\in \mathcal{O}(G)}(x) = f(g^{-1}x)$$

$$R(g)(f)(x) = f(xg)$$

$$\underbrace{R(g)(f)}_{\in O(G)}(x) = f(xg)$$

<u>Proposizione:</u> Sia G gruppo alg. lineare. Le rappr. L e R sono localmente regolari.

<u>Dim.:</u> Come caso particolare, prendiamo $f \in \mathcal{O}(G)$ e troviamo $E' \ni f$ come nella def.. Lavoriamo solo con L, l'argom. per R è lo stesso.

Per la formula di prima (dalla prop.):

$$L(\underset{g \in G}{g})(f) = \sum_{i=1}^{p} \underset{\sim}{a_i(g^{-1})}\, \underset{\in \mathcal{O}(G)}{b_i}$$

Quindi $L(g)(f)$ è contenuto in $\mathrm{Span}\{b_i\}$ per ogni g. $\mathrm{Span}\{b_i\}$ sembra un buon candidato per E', ma va specificato meglio.

Posso assumere $b_1, \dots, b_p$ siano lin. indipendenti.

Inoltre posso anche rimpiazzare la base $b_1, \dots, b_p$ di $\mathrm{Span}\{b_i\}$ con un'altra base qualsiasi di span$\{b_i\}$ con un'altra base qualsiasi e avere una scrittura simile per $L(g)(f)$ (con altri coefficienti).

Ora: al variare di $g \in G$ i traslati $L(g)(f)$ generano un sottosp. G-stabile di dim. finita di span$\{b_i\}$.

Allora scelgo una base di span$\{b_i\}$ che inizia con una base di $L(g)(f)$. Questa prima parte della base è l'unica coinvolta nella scrittura di $L(g)(f)$.

Quindi tralasciare i b_i rimanenti e direttam. assumere sin dall'inizio che $b_1, \dots, b_p$ siano una base di span$\{L(g)(f) \mid g \in G\} = E'$.

Adesso E' è G-stabile.

Per dim. che questa rappr. $G \to GL(E')$ è regolare, cambio base un'altra volta.

Visto che E' è generato dall'insieme $\{L(g)(f) \mid g \in G\}$, posso estrarre da quest'insieme una base.

Quindi assumo che $b_i = L(g_i)(f)$ per un $g_i \in G$.

Quindi assumo che $b_i =$ [illegible]

Ora possiamo calcolare in coordinate l'azione di G su E':

$G \to GL(E')$ è omom. di gruppi

$$L(g)(b_i) = L(g)\left(L(g_i)(f)\right) =$$

$$= L(g g_i)(f) = \sum_j \boxed{a_j(g_i^{-1} g^{-1})} b_j$$

entrate della matrice che rappr. $L(g)$ nella base $b_1, \ldots, b_p$

Ora $a_j(\underline{g_i}\, g^{-1})$ è una f.ne regolare nella variabile g, quindi la rappr. $G \to GL(E')$ è regolare.

<u>Fine della dim.:</u> Sia $E \subseteq \mathcal{O}(G)$ sottosp. vett. di dim. finita, scegliamo una base $f_1, \ldots, f_m$.

Per ogni f_i troviamo un sottosp. G-stabile E_i' che contiene f_i, ed è rappr. regolare

Allora $E' = E_1' + \ldots + E_m'$ è G-stabile, di dim. finita contiene E e la rappr.

di dim. finita, contiene t_i, e la rappr. $G \to GL(E')$ è regolare.

$\square$

Azioni regolari di gruppi algebrici lineari

Def.: Sia G gruppo alg. lin. e X var. alg. affine. Un'azione di G su X è detta <u>regolare</u> se l'appl.:

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

è un'applicazione regolare di varietà algebriche.

In questo caso X si chiama <u>G-varietà</u> (affine).

Un'applicazione regolare $\Phi : X \to Y$ fra G-varietà affini si dice <u>G-equivariante</u> se

$$\Phi(g \cdot x) = g \cdot \Phi(x)$$

Due G-varietà si dicono <u>G-isomorfe</u> se esiste fra esse un isomorfismo di varietà G-equivariante.

G- equivariante.

<u>Proposizione:</u> Sia X una G-varietà affine, G gr. alg lineare. Allora $\mathcal{O}(X)$, con l'azione solita $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, è una rappr. loc. regolare.

<u>Dim.:</u> Sia $f \in \mathcal{O}(X)$ e $g \in G$, la funzione $g \cdot f$ manda x in $f(g^{-1}x)$. Allora per quanto abb. visto anche $g \cdot f$ è in $\mathcal{O}(X)$. Quindi effettivam. $G \to GL(\mathcal{O}(X))$ è ben definita. D'altronde, con stessa dim., vale

$$(g \cdot f)(x) = \sum_i a_i(g) b_i(x)$$

La dim. procede ugualm. a prima. $\square$

<u>Teorema:</u> Sia G gruppo algebrico lineare e X una G-varietà affine. Allora esiste un G-modulo finito dim. V che contiene un chiuso G-stabile Y (quindi una G-varietà affine) G-isomorfo a X.

G - varietà affini) G-isomorfo a X.