Algebra sup. lez. 3

mercoledì 21 ottobre 2020 10:46

Richiami di geom. algebrica (continua)

Ric. $V(I)$ $\quad$ $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

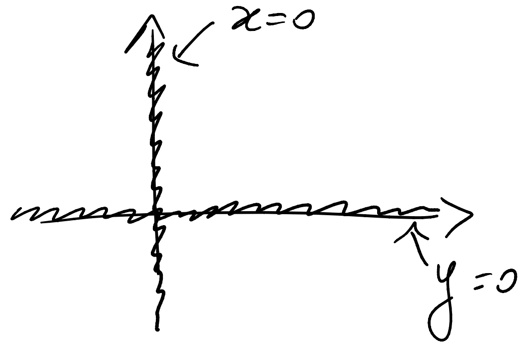
$V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$

$I(X)$ $\quad$ $X \subseteq \mathbb{C}^n$

Abbiamo: I, J ideali

$$V(I) \cap V(J) = V(I+J)$$
$$V(I) \cup V(J) = V(I \cdot J)$$

Es.:



l'unione ha eq. $xy=0$

Useremo: Basissatz (teo. della base)

Nullstellensatz (teorema degli zeri)

Teorema: (Basissatz) Ogni ideale di $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ è finitamente generato.

Dim.: Per induzione su n, base dell'induz.

$n=0$ (ovvio)

$n=0$ (ovvio).

<u>Passo induttivo</u>: $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$ ideale

def. $f_1 \in I$ di grado minimale <u>rispetto a x_n</u>

se $I \supsetneq (f_1)$ scegliamo $f_2 \in I \setminus (f_1)$

di grado minimale, e così via.

Se il procedimento termina, ho trovato

$(f_1,..., f_m) = I$, cioè $f_1,.., f_m$ generano I.

Supp. per assurdo che la seq. $f_1,..,f_m,....$

non termina.

Consid. $\mathbb{C}[x_1,..,x_n] = (\mathbb{C}[x_1,..,x_{n-1}])[x_n]$.

Siano $a_1, a_2, ...$ i coeff. direttori di $f_1, f_2, ...$

<u>rispetto a x_n</u>, cioè $a_i \in \mathbb{C}[x_1,..,x_{n-1}]$.

Per induzione, l'ideale $J = (a_1, a_2, ..)$ è fin. generato.

Cioè esiste m tale che $J = (a_1,.., a_{\underline{m}})$.

Allora dimostriamo che $I = (f_1,.., f_{\underline{m}})$, altrimenti

consid. f_{m+1} : ha grado almeno il grado in x_n

di $f_1,.., f_m$.

Inoltre: $(a_1,.., a_m)$ contiene a_{m+1}, cioè

Inoltre: $(a_1, \dots, a_m)$ contiene a_{m+1}, cioè scegliamo $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ tali che

$$a_{m+1} = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$$

Consid.

$$g = \underline{f_1}\, u_1\, x_n^{\deg_{x_n} f_{m+1} - \deg_{x_n} f_1} + \dots + \underline{f_m}\, u_m\, x_n^{\deg_{x_n} f_{m+1} - \deg_{x_n} f_m}$$

Il coeff. direttore risp. a x_n di g è a_{m+1}, quindi $f_{m+1} - g$ ha grado in x_n minore di f_{m+1}. Ma $g \in (f_1, \dots, f_m)$

$f_{m+1} \in I \setminus (f_1, \dots, f_m)$, quindi

$f_{m+1} - g \in I \setminus (f_1, \dots, f_m)$

assurdo per minimalità del grado in x_n di f_{m+1}.

$\square$

<u>Corollario</u>: Ogni sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ in top. di Zariski è compatto.

<u>Dim.</u>: Basta dim. per $A \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto. Sia

$$A = \bigcup_i U_i \quad \text{ricopr. aperto.}$$

Poss. supporre che $U_i = \underbrace{\mathbb{C}^n_{f_i}}$ ← ap. della base

Consid. $\mathbb{C}^n \setminus A = \bigcap_i V(f_i) = V(I)$ ← ideale gen. da f_i

Per il Basissatz: $I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_m})$

cioè $\mathbb{C}^n \setminus A = \bigcap_{j=1}^m V(f_{i_j})$

cioè $A = \bigcup_{j=1}^m \mathbb{C}^n_{f_{i_j}}$.

$\square$

Teorema (Nullstellensatz) Sia I ideale di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, tale $V(I) = \emptyset$. Allora $I = (1) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Dim.: Supp. I ideale proprio, e troviamo almeno un elem. di $V(I)$. Supp. inoltre che I sia ideale massimale, e consid.

$$R = \frac{\mathbb{C}[x_1,..,x_n]}{I}.$$

Allora R è un campo. Vogliamo dim. che $R = \mathbb{C}$, perché R^n ha uno zero comune di tutti i polinomi di I:

$$(x_1 + I, .., x_n + I)$$

Infatti dato $f(x_1,..,x_n) \in I$, valutarlo in $(x_1 + I, .., x_n + I) \in R^n$ vuol dire calcolare $f(x_1 + I, .., x_n + I) = f(x_1,..,x_n) + I = 0 + I$

Dimostriamo che $R = \mathbb{C}$ facendo vedere che è un'estensione algebrica di campi.

Sia $\alpha \in R$, e consid

$$\frac{1}{\alpha - z}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Ho un insieme di elementi di cardinalità $|\mathbb{C}|$. D'altronde R ha dimensione al più $|\mathbb{Z}|$ su $\mathbb{C}$, quindi gli e/t $\dfrac{1}{\alpha - z}$ sono linearm. dipendenti su $\mathbb{C}$.

Cioè esistono $\lambda_1, .., \lambda_m \in \mathbb{C}$, $z_1, .., z_m \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - z_1} + \dots + \frac{\lambda_m}{\alpha - z_m} = 0$$

Moltiplico per $(\alpha - z_1) \cdots (\alpha - z_m)$ e ottengo un pol. in α a coeff. su $\mathbb{C}$ che fa zero. Cioè α è algebrico su $\mathbb{C}$. Visto che $\mathbb{C}$ è alg. chiuso, abb. $R = \mathbb{C}$. Segue: $V(I) \neq \emptyset$. $\square$

Oss.: Il teorema è falso su $\mathbb{R}$:

$I = (x^2+1)$ soddisfa $V(I) = \emptyset$

ma $I \subsetneq \mathbb{R}[x]$.

Corollario (altra forma del Nullstellensatz):

Se $f \in \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ si annulla su $V(I)$ dove $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ è un ideale, allora una potenza positiva f^d è in I.

<u>Dim.:</u> Siano $f_1, .., f_m$ generatori di I.

Consid. $\mathbb{C}[x_1, .., x_n, x_{n+1}]$ e J ideale gen. da $f_1, .., f_m$ e dal polinomio

$$g = x_{n+1} f - 1.$$

Vale $V(J) = \emptyset$ in $\mathbb{C}^{n+1}$, perché dove svaniscono $f_1, .., f_m$ svanisce anche f, e non svanisce g. Per il teorema esistono $a_1, .., a_{m+1}$ t.c.

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + .. + a_m f_m + a_{m+1}(x_{n+1} f - 1) = 1$$

in $\mathbb{C}[x_1, .., x_{n+1}] \subset \mathbb{C}(x_1, .., x_n)$.

Sostituiamo $\frac{1}{f}$ a x_{n+1} (se f non è il polinomio nullo, altrim. $f \in I$):

$$a_1\left(x_1, .., x_n, \frac{1}{f}\right) f_1(x_1, .., x_n) + .. + a_m\left(x_1, .., x_n, \frac{1}{f}\right) f_m = 1$$

Esiste d intero positivo tale che $f^d \cdot$ (quest'uguagl.) toglie tutti i denominatori:

tolgo tutti i denominatori.

$$f^d = (\text{espr. in } f_1, \dots, f_m)$$

cioè $f^d \in I$. $\square$

<u>Proposizione:</u> Sia $Z \subseteq \mathbb{C}^n$ chiuso non vuoto, sia $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ non costantem. nullo su Z, e $X = Z_h$. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(X)$ si scrive come $\frac{a}{h^d}$ dove $a \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e d è un intero positivo.

<u>Oss.:</u> Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $b+d \neq 0$, allora

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

<u>Dim.:</u> Oss. che nella def. di funzione regolare su X possiamo assumere che gli aperti vengano dalla base solita. Inoltre, visto che X è compatto, poss. assumere di avere un numero finito di aperti.

numero finito di aperti.

Cioè: data $f \in \mathcal{O}(X)$ esistono $r_i, a_i, b_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $U_i = Z_{r_i}$,

$$f|_{U_i} = \frac{a_i|_{U_i}}{b_i|_{U_i}}$$

Abb: $Z_{r_i} \subseteq Z_{b_i}$, quindi $V(r_i) \cap Z \supseteq \underbrace{V(b_i) \cap Z}$.

D'altronde $V(r_i) \cap Z = V((r_i) + I(Z))$. $\quad \|$

Visto che r_i si annulla su $\overline{V((b_i) + I(Z))}$,

per il Nullstellensatz una potenza $r_i^{m_i} \in (b_i) + I(Z)$.

Cioè $c_i b_i$ coincide con $r_i^{m_i}$ su Z, per un polinomio c_i; su U_i vale

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_i c_i}{b_i c_i} = \frac{a_i c_i}{r_i^{m_i}}$$

Rimpiazziamo a_i con $a_i c_i$, b_i con $r_i^{m_i}$, e r_i con $r_i^{m_i}$.

Quindi poss. assumere che $f|_{U_i} = \dfrac{a_i|_{U_i}}{r_i|_{U_i}}$.

… poss. … $|_{U_i}$ $r_i|_{U_i}$

Prossimo passo: dati due indici i, j

$\frac{a_i}{r_i}$ coincide con $\frac{a_j}{r_j}$ su $U_i \cap U_j$, cioè

$a_i r_j - a_j r_i$ è zero su $U_i \cap U_j$.

Allora

$$\underbrace{r_i}_{\text{si annulla fuori da } U_i} \underbrace{r_j}_{\text{si annulla fuori da } U_j} \underbrace{(a_i r_j - a_j r_i)}_{\text{si annulla su } U_i \cap U_j}$$

è zero su tutto Z.

Rimpiazziamo a_i con $a_i r_i$ e r_i con r_i^2, allora poss. assumere $a_i r_j - a_j r_i$ è zero su tutto Z.

<u>Fine della dim.</u>: Dic. Z_h è contenuto nell'unione degli Z_{r_i} cioè:

$$V(h) \cap Z \supseteq \left(\bigcap_i V(r_i)\right) \cap Z =$$
$$= Z \cap V(r_1, r_2, \dots)$$

Per il Nullstellensatz, una potenza h^d coincide su Z con un elem. di $(r_1, r_2, \ldots)$..

$$h^d + I(Z) = s_1 r_1 + s_2 r_2 + \ldots + I(Z)$$

Def. $a = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots$

Allora su Z vale:

$$r_i\, a = r_i s_1 a_1 + r_i s_2 a_2 + \ldots =$$

$$= s_1 r_1 a_i + s_2 r_2 a_i + \ldots =$$

$$= a_i\, h^d$$

Cioè su ogni U_i la frazione $\frac{a_i}{r_i}$ coincide con $\frac{a}{h^d}$, cioè f coincide su tutto X con $\frac{a}{h^d}$.

$\square$

<u>Oss.</u>: Se X è <u>chiuso</u>, le due def. di $\mathcal{O}(X)$ date prima coincidono, grazie alla proposizione.

<u>Corollario</u>: Sia X loc. chiuso come nella

Corollario: Sia X loc. chiuso come nella proposizione (siano anche Z e h come nella prop.). Consid. $X' \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ def da $I(X)$ (nelle var. $x_1, .., x_n$) e dal pol. $h(x_1, .., x_n)x_{n+1} = 1$

Allora:

$$
\begin{aligned}
f: X &\longrightarrow X' \\
(a_1, .., a_n) &\longmapsto \left(a_1, .., a_n, \frac{1}{h(a_1, .., a_n)}\right)
\end{aligned}
$$

è una biiezione, tale che

$$\boxed{f^*(\mathcal{O}(X')) = \mathcal{O}(X)}$$

è la composizione con f: $\quad f^*(\underset{\mathcal{O}(X')}{\underset{\cap}{g}}) = g \circ f$

In seguito al corollario anche localm. chiusi del tipo di X sono chiamati varietà affini (cioè loc. chiusi del tipo Z_h).

chiuso polinomio