Algebra Superiore lez. 22

giovedì 14 gennaio 2021 15:25

Sia $\varphi : G \to H$ omom. regolare di gruppi algebrici lineari. Cons. il differenziale in $e_G \in G$:

$$d\varphi : T_{e_G} G \longrightarrow T_{e_H} H$$

ric. che $d\varphi$ è definito su un elem. $x \in T_{e_G} G$, cioè

$$x : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C},$$

come l'applicazione $d\varphi(x) : \mathcal{O}(H) \to \mathbb{C}$ che manda $f \in \mathcal{O}(H)$ in

$$x(\varphi^*(f))$$

Grazie alla prop. della lezione scorsa, consid. $d\varphi$ come un'appl. lineare $\mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$.

<u>Prop.</u>: $d\varphi$ è un omomorf. di algebre di Lie, cioè

$$d\varphi([x,y]) = [d\varphi(x), d\varphi(y)]$$

$\forall x, y \in \mathrm{Lie}(G)$.

<u>Dim.</u>: Oss.: ricordiamo che se $x \in T_{e_G}G$ e $f \in \mathcal{O}(G)$, allora

$$\underset{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\overset{}{x(f)}} = (f * x)(e_G)$$

Allora l'uguaglianza dell'enunciato segue da:

da: $\boxed{f * X = \varphi^*(f' * X')}$

dove $X \in T_{e_G} G$, $X' = d\varphi(X)$, $f' \in \mathcal{O}(H)$

e $f = \varphi^*(f')$.

Esercizio: dimostrare l'enunciato della prop. usando.

Dimostriamo questa uguaglianza, calcolando entrambe le funzioni in $g \in G$.

Abb.:

$$(\varphi^*(f') * X)(g) \overset{\text{(def. di } *)}{=} \boxed{X(g^{-1} \cdot \varphi^*(f'))}$$

traslaz. a sinistra

e anche:

$$(f' * d\varphi(X))(\varphi(g)) = (d\varphi(X))(\varphi(g)^{-1} \cdot f') =$$

$$= X(\varphi^*(\underbrace{\varphi(g)^{-1}}_{\varphi(g^{-1})} \cdot f')) \overset{\text{esercizio}}{=}$$

esercizio

$$= \boxed{X\left(g^{-1} \cdot \varphi^*(f')\right)}$$

$\varphi(g^{-1})$

$\square$

In particolare, se $\varphi: G \to GL(V)$ è una rappr. di G, allora

$$d\varphi: Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \ (= End(V))$$

è una rappresentaz. di $Lie(G)$.

I legami fra la teoria delle rappr. di G e di $Lie(G)$ sono molto stretti, ma non sempre le rappres. si comportano allo stesso modo.

Es.: Sia $G = \mathbb{C}^*$, $Lie(G) = \mathbb{C}$

Sappiamo che ogni rappr. regolare di G è completam. riducibile.

Ma esistono rappr. di $\mathrm{Lie}(G)$ non completam. riducibili, ad es.

$$\mathbb{C} \longrightarrow M_2$$
$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una rappresentaz. non completam. riducibile, infatti $\mathbb{C} \cdot e_1$ non ha un complemento

primo vett. della b. canonica

che è un $\mathbb{C}$-sottomodulo per questa rappres..

Questa rappr. di $\mathrm{Lie}(G)$ non si può ottenere come $d\varphi$ per una rappres. $\varphi : G \to GL(2)$.

Questo fatto non è però l'unico motivo

Questo fatto non è però l'unico motivo per cui questo esempio è "patologico", perchè la <u>non integrabilità</u> di rappr. succede anche dove per G e $Lie(G)$ "tutte" le rappr. sono completam. riducibili (per G: regolari, per $Lie(G)$: di dim. finita).

Ad es. $G = PGL(n) = \dfrac{GL(n)}{Z(GL(n))}$ $(n \geq 2)$

è tale che $Lie(G) \cong sl(n)$

ora:
- tutte le rappr. di dim. finita di $sl(n)$ sono compl. riducibili (è il teo. di Weyl del corso di Ist. Alg. Sup.)
- $PGL(n)$ è linearmente riduttivo, infatti sia $\varphi : PGL(n) \to$

riduttivo, infatti sia $\varphi : PGL(n) \hookrightarrow GL(V)$ una rapp. regolare, allora

$$GL(n) \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{quoziente} \\ \text{per } Z(GL(n))}]{} PGL(n) \longrightarrow GL(V)$$

è una rappresentaz. di $GL(n)$.

Visto che $GL(n)$ e $PGL(n)$ hanno la stessa immagine in $GL(V)$, allora V è completam. riducibile come $PGL(n)$-modulo se e solo se lo è come $GL(n)$-modulo (i $PGL(n)$-sottomoduli coincidono con i $GL(n)$-sottomoduli). E sappiamo che $GL(n)$ è linearmente riduttivo.

Sia ora $\mathbb{C}^n$ con l'azione „naturale" di $sl(n)$ (cioè $sl(n) \hookrightarrow M_n$

di $\mathfrak{sl}(n)$ (cioè $\mathfrak{sl}(n) \hookrightarrow M_n$ l'inclusione).

Si può verificare che questa non è il differenziale di una rappresentazione $PGL(n) \longrightarrow GL(n)$.

In un certo senso le „eccezioni" si possono tutte ricondurre all'esempio visto: $\mathbb{C}^*$ e $Lie(\mathbb{C}^*)$.

<u>Prop.</u>: Sia $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una rappr. di un gruppo algebrico lineare <u>connesso</u>.

Se $W \subseteq V$ è un G-sottomodulo, allora è anche un $Lie(G)$-sottomodulo, per la rappr. $d\varphi : Lie(G) \to End(V)$.

In particolare, se V è irriducibile come $Lie(G)$-modulo, allora è irriducibile come

$Lie(G)$ allora è irriducibile come G-modulo.

<u>Dim.:</u> Se W è un G-sottomodulo, allora $\varphi(G)$ è contenuto nello stabilizz. di W, che in coordinate è del tipo

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & * \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Qui abbiamo scelto una base di W $w_1, w_2, \dots$ e l'abbiamo completata a una base di V.

Anche $T_{I_n}(\varphi(G))$ è contenuta nell'insieme delle matrici a blocchi di quel tipo (non necess. invertibili), e contiene $d\varphi(T_e G)$, quindi

è costituita da φ ($\cdot \in U$), quindi
W è un $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo.

$\square$

Oss.: 1) La proposizione vale anche per G non connesso, con stessa dim.

2) Così com'è, la prop. è un "se e solo se".

Esempi

1) Vediamo alcune rappr. irriducibili di $SL(n) = G$ con $n \geq 2$.

Sia $V_m = \Lambda^m \mathbb{C}^n$ dove $m \in \{1, .., n-1\}$

Allora V_m è un G-modulo irriducibile, dimostriamolo facendo vedere che per ogni $v (\neq 0) \in V_m$ abb. $\mathrm{Span}(G \cdot v)$ è uguale a tutto V_m. Seguirà che se $v \in W$ dove W

a tutto V_m. Seguirà che se $v \in W$ dove W è un sottomodulo $\neq 0$, allora $W = V$.

Prendiamo la base canonica $(e_1, .., e_n)$ di V, e scriviamo

$$v = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} a_{i_1, .., i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

possiamo permutare i vettori della base di V e riscalare v in modo che

$$v = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m + \underbrace{(\text{altri addendi})}$$

Se $v = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$, agendo con matrici di permutazione, ottengo in $G \cdot v$ ogni vettore del tipo $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ oppure $-e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ (precisamente: uso la matrice di permutazione se è in $SL(n)$, matrice di permutazione se è in $SL(n)$, altrimenti ha det. $= -1$, e cambio segno ad una colonna).

Segue: $G \cdot v$ contiene i vettori di una base di V_m, e allora $\mathrm{Span}(G\cdot v) = V_m$.

Altrimenti $v = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \underbrace{(\text{altri addendi})}_{\neq 0}$.

Cioè esistono $(1 \leq) j_1 < \dots < j_m (\leq n)$ tali che $a_{j_1, \dots, j_m} \neq 0$ e $j_m > m$.

Allora esiste $s \in \{1, \dots, m\}$ che non compare fra i numeri $j_1, \dots, j_m$.

Consid. g la matrice diagonale con sulla diagonale tutte entrate $= 1$, tranne la s-esima uguale a 2, e la j_m-esima uguale a $\frac{1}{2}$.

uguale a $\frac{1}{2}$.

Allora

$$v' = \frac{1}{3}(-v + 2gv)$$

è in $\mathrm{Span}(G \cdot v)$, e abb.:

$$v = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + a_{j_1, \dots, j_m} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_m} + (\dots)$$

$$v' = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \quad 0 \quad + (\dots)$$

non compare $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_m}$, e non compare nulla che non fosse già in v.

Andando avanti con lo stesso procedim. otteniamo $v_m := e_1 \wedge \dots \wedge e_m \in \mathrm{Span}(G \cdot v)$, quindi riotteniamo il caso precedente.

Segue: V_m è irriducibile.

Si tratta di G-moduli importanti, infatti

Si tratta di U-moduli importanti, infatti scegliamo coeff. $c_1, \dots, c_{n-1}$ interi non negativi, e consid.

$$\underbrace{V_1^{\otimes c_1}}_{\substack{\| \\ \underbrace{V_1 \otimes \dots \otimes V_1}_{c_1 \text{ volte}}}} \otimes \dots \otimes V_{n-1}^{\otimes c_{n-1}}$$

Questo $SL(n)$-modulo contiene il vettore

$$\underline{v} = \underline{v_1}^{\otimes c_1} \otimes \underline{v_2}^{\otimes c_2} \otimes \dots \otimes \underline{v_{n-1}}^{\otimes c_{n-1}}$$

e $\boxed{\underline{V} = \mathrm{Span}(G \cdot \underline{v}) \text{ è irriducibile}}$

$\boxed{\text{ogni } SL(n)\text{-modulo irriducibile regolare si ottiene così, per un'unica scelta di } c_1, \dots, c_{n-1}}$

(. . . .)

(entrambe sono non banali)

<u>Esercizio</u>: Queste due proprietà si generalizzano a un qualsiasi gruppo linearmente riduttivo connesso (tranne l'unicità).

Cioè per un tale G esistono un numero finito di moduli irriduc. regolari $V_1, V_2, \ldots$ con vettori non nulli $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots$

tali che ogni G-modulo irriduc. regolare si ottiene come sopra, per qualche scelta di coeff. $c_1, c_2, \ldots$ (può essere non unica).

L'esercizio è trovare questi moduli e i vettori per $(\mathbb{C}^*)^n$

e i vettori per $(\mathbb{C}^*)^n$.

<u>Esempio</u>: Vediamo un es. della nostra versione algebrica del Teo. di Peter-Weyl, con $G = S_3$.

Visto che G è finito, $\mathcal{O}(G)$ contiene <u>tutte</u> le funzioni su G, e quindi $\mathcal{O}(G)$ è uno spazio vettoriale di dimensione $|G|$ (qui $= 6$).

Inoltre possiamo identificare $\mathcal{O}(G)$ con l'algebra gruppo $\mathbb{C}[G]$, mandando $f \in \mathcal{O}(G)$ nell'elem.

$$\sum_{g \in G} f(g)\, g \, .$$

<u>Definiamo</u>:

Definiamo:

1) $V_1 = S_3$-modulo banale, di dim. 1.

2) $V_2 = S_3$-modulo di dim. 1 dove ogni $g \in S_3$ agisce per moltipl. per $\mathrm{sign}(g)$ (il suo segno come permutazione).

3) $V_3 =$ il sottospazio di $\mathbb{C}^3$ dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $x+y+z=0$ con l'az. di S_3 data dal permutare le entrate.

Abbiamo: V_1, V_2, V_3 irriducibili, due a due non isomorfi.

Dimostriamo che ogni S_3-modulo irriducibile di dim. finita ($\Leftrightarrow$ regolare) è isomorfo a V_i per un $i \in \{1,2,3\}$.

Usiamo il teorema:

Usiamo il teorema:

$$\underbrace{\mathcal{O}(G)}_{\dim=6} \cong \underbrace{(V_1^* \otimes V_1)}_{\dim=1} \oplus \underbrace{(V_2^* \otimes V_2)}_{\dim=1} \oplus \underbrace{(V_3^* \otimes V_3)}_{\dim=4}$$

allora vale l'uguaglianza. Segue che V_1, V_2, V_3 sono gli unici S_3-moduli irrid. di dim. finita a meno di isom..