Algebra Superiore lez. 21

mercoledì 13 gennaio 2021 09:08

Ric.: $T_{I_n}(G) = \{ D : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C} \mid D$ lineare $D(f_1 f_2) = D(f_1) f_2(I_n) + f_1(I_n) D(f_2) \}$

(G come prima, $\underbrace{}_{G \text{ chiuso in}}$ $GL(n)$)

Sia $\delta \in Lie(G)$, consid. l'applicazione lin. $\mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}$

$f \mapsto \delta(f)(I_n)$

Si tratta di un elem. di $T_{I_n}(G)$.

Questo def un'applicaz. lineare $\varepsilon : Lie(G) \to T_{I_n}(G)$.

Come la volta precedente, interpretiamo gli elem. di $T_{I_n}(G)$ come vettori tangenti a G in $M_n(\mathbb{C})$, tramite: $x \in M_n$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(I_n) : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C}} \quad \longleftarrow$$

(se x è tangente a G).

Formalmente: $x \in M_n$ è tangente a G in I_n se e solo se $\frac{\partial f}{\partial x}(I_n) = 0 \quad \forall f \in I_{GL(n)}(G)$.

Ricordiamo che in M_n è definito il bracket

$$[x, y] = xy - yx.$$

<u>Prop.:</u> $\varepsilon : Lie(G) \longrightarrow T_{I_n}(G)$ è un isom. di spazi vettoriali, e vale

$$\varepsilon([\delta_1, \delta_2]) = [\varepsilon(\delta_1), \varepsilon(\delta_2)]$$

bracket fra campi vett.

bracket fra matrici

<u>Dim.:</u> Dim. che ε è un isom. costruendo

Dim.: Dim. che $\mathcal{E}$ è un isom. costruendo l'inversa. Cioè dato $X \in T_{I_n}(G)$ (consid. come elem. di M_n) definiamo

$$*X : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

$$f \longmapsto \left(f * X : g \longmapsto \frac{\partial (g^{-1} \cdot f)}{\partial X}(I_n) \right)$$

dove l'azione $g^{-1} \cdot f$ è la traslaz. a sinistra.

Da verificare (esercizio):

1. $f * X$ è in $\mathcal{O}(G)$ $\forall f \in \mathcal{O}(G)$.

2. $f * X$ è una derivazione, invariante a sinistra, cioè è un elem. di $Lie(G)$

3. $X \longmapsto *X$ è l'inversa di $\mathcal{E}$.

Verifichiamo insieme che $*\mathcal{E}(\delta) = \delta$ $\forall \delta \in Lie(G)$ (una parte di 3.).

Per questo calcoliamo $f * \underbrace{\mathcal{E}(\delta)}$ per una

Per questo calcoliamo $f * \underbrace{\varepsilon(\delta)}$ per una $f \in \mathcal{O}(G)$ qualsiasi. Per def. è la funzione

$$g \longmapsto \frac{\partial (g^{-1} \cdot f)}{\partial x}(I_n)$$

dove $x = \varepsilon(\delta)$, cioè è tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(I_n) = \delta(F) \qquad \forall F \in \mathcal{O}(G)$$

Allora $f * \varepsilon(\delta)$ è l'applicazione

$$g \mapsto \underbrace{\delta(g^{-1} \cdot f)}_{\in \mathcal{O}(G)} (I_n) =$$

$$= \left(g^{-1} \cdot \delta(f)\right)(I_n) =$$

$$= \left(\delta(f)\right)(g)$$

Cioè $f * \varepsilon(\delta) = \delta(f)$ come funzione di

Cioè $\quad f * \varepsilon(\delta) = \delta(f)$ come funzione di g.

Quindi $\quad Lie(G) \xrightarrow{\varepsilon} T_{I_n}(G) \xrightarrow{*} Lie(G)$

è l'identità su $Lie(G)$.

Dimostriamo che $\varepsilon([\delta_1, \delta_2]) = [\varepsilon(\delta_1), \varepsilon(\delta_2)]$.

E' equivalente verificare che

$$\underbrace{[*X, *Y]}_{} = \underbrace{*[X,Y]}_{?}$$

$\forall X, Y \in T_{I_n}(G)$, però va verificato anche che $[X,Y] \in T_{I_n}(G)$.

Calcoliamo intanto $[*X, *Y] =$

$(*X) \circ (*Y) - (*Y) \circ (*X)$ su una funzione f, prendendo prima di tutto $f = x_{ij}$ l'entrata al posto (i,j) della matrici.

Inoltre usiamo per un po' funzioni f definite su M_n invece che su G, e anche la formula su M_n invece che su G, e anche la formula $*X$ la interpretiamo come derivazione

$$\mathcal{O}(M_n) \longrightarrow \mathcal{O}(M_n).$$

o equivalentemente come $\mathcal{O}(GL(n)) \to \mathcal{O}(GL(n))$

Abbiamo:

$$\underbrace{(g^{-1} \cdot x_{ij})(h)} = x_{ij}(gh) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{x_{ik}(g)\, x_{kj}(h)},$$

Consid. qui g come fissato, e h come la variabile. Allora:

$$\underline{x_{ij}} * Y : \quad g \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) \underline{\frac{\partial x_{kj}}{\partial Y}}(I_n) = \ldots$$

Chiamiamo Y_{ij} le entrate della matrice Y, allora

$$\partial x_{ki} \quad \leq \left(\partial x_{ki}\right) \ldots$$

$$\frac{\partial x_{kj}}{\partial Y} = \sum_{r,s} \frac{\partial x_{kj}}{\partial x_{r,s}} Y_{r,s} =$$

$=1 \iff \begin{cases} k=r \\ j=s \end{cases}$

altrim. $=0$

$$= Y_{kj}$$

deduciamo

$$\ldots = \sum_k x_{ik}(g)\, Y_{kj}$$

Cioè:

$$x_{ij} * Y = \boxed{\sum_k x_{ik} Y_{kj}}$$

Allora:

$$(x_{ij} * Y) * X = \sum_k \Big(\underbrace{\sum_r x_{ir} X_{rk}}_{x_{ik} * X}\Big) Y_{kj} = \ldots$$

dove le entrate di X sono denotate come X_{rk}.

$$\dots = \sum_r x_{ir} \left(\sum_k X_{rk} Y_{kj} \right)$$

Allora

$$(x_{ij} * Y) * X - (x_{ij} * X) * Y =$$

$$= \sum_r x_{ir} \left(\underbrace{\sum_k \left(X_{rk} Y_{kj} - Y_{rk} X_{kj} \right)}_{\shortparallel} \right) =$$

l'entrata di $[X, Y]$ al posto (r, j).

Cioè $[*X, *Y]$ e $*[X, Y]$ coincidono sulle funzioni x_{ij} $\forall i, j$. Le stiamo consid. entrambe come derivazioni $\mathcal{O}(M_n) \longrightarrow \mathcal{O}(M_n)$.

Per la regola di Leibnitz, queste due derivazioni coincidono su tutto $\mathcal{O}(M_n)$.

Se ora due coincidono anche come derivazioni:

Segue che coincidono anche come derivazioni

$$\mathcal{O}(GL(n)) \to \mathcal{O}(GL(n))$$

(per le derivazioni vale la solita regola della derivata di un quoziente $\frac{f_1}{f_2}$, conseguenza di Leibnitz).

Siano ora X e Y in $T_{I_n}(G)$ come all'inizio. I conti che abbiamo fatto valgono allo stesso modo, consid. le funzioni definite solo su G (ad es. consid. $x_{ij}|_G$ invece che $x_{ij} \in \mathcal{O}(M_n)$).

consid. come $\mathcal{O}(GL(n)) \to \mathcal{O}(GL(n))$

Inoltre $[*X, *Y]$ annulla tutte le funzioni di $I_{GL(n)}(G)$, allora

$*[X, Y]$ anche annulla tutte le funzioni di $I_{GL(n)}(G)$

funzioni di $I_{GL(n)}(G)$.

Segue facilmente: se X e $Y \in T_{I_n}(G)$

allora $[X,Y] \in T_{I_n}(G)$.

Concludiamo che $[*X, *Y] = *[X,Y]$ come

derivazioni $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$.

$\square$

<u>Esempi</u>: 1) $\mathrm{Lie}(GL(n)) = M_n$

che si denota anche come $\mathfrak{gl}(n)$.

2) $$\underset{\substack{\| \\ GL(1)}}{\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)} = \underset{\substack{\| \\ M_1}}{\mathbb{C}}$$

con bracket $[x,y]=0 \ \forall x,y \in \mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)$.

D'altronde $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)$ ha dim. 1,

e allora il bracket è sicuram. nullo

per antisimmetria.

3) $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cong \mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)$

$$\mathrm{Lie}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C} \right\}$$

perché $\mathrm{Lie}(\mathbb{C})$ ha dimensione 1 e quindi

il bracket è nullo anche qui.

4) Calcoliamo $\mathrm{Lie}(SL(n)) = T_{I_n}(SL(n))$.

Si tratta di matrici X tali che

$$\frac{\partial(\det - 1)}{\partial X}(I_n) = 0$$

Per calcolare questa derivata della funzione

$g \mapsto \det(g)$, cambiamo variabile:

$(GL(n))$

$g = I_n + X$

$$g = I_n + X$$

dove X è in un intorno ap. di I_n in $GL(n)$.

Adesso: $$\det(I_n + X) = 1 + X_{11} + \dots + X_{nn}$$

$$I_n + X = \begin{pmatrix} (1+X_{11}) & X_{12} & \cdots & \\ X_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \cdots & (1+X_{nn}) \end{pmatrix}$$ + (termini di grado ≥ 2)

cioè $\det(I_n + X)$ è un polinomio nelle entrate di X, il cui termine di primo grado è $Tr(X)$.

Segue: $$T_{I_n}(SL(n)) = \{ X \in M_n \mid Tr(X) = 0 \}$$

cioè $$Lie(SL(n)) \underset{\uparrow \text{ come alg. di Lie}}{\cong} \{ X \mid Tr(X) = 0 \}$$

che si denota anche come $\mathfrak{sl}(n)$.

5) Con consid. simili si calcolano

$$\mathrm{Lie}(O(n,\mathbb{C})) \cong \mathrm{Lie}(SO(n,\mathbb{C})) \cong$$

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{ X \in M_n \mid X + {}^tX = 0 \}$$

e

$$\mathrm{Lie}(Sp(2n,\mathbb{C})) \cong$$

$$\cong \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) = \{ X \in M_n \mid XJ + J\,{}^tX = 0 \}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & & & \vdots \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Per le algebre di Lie si definiscono come per i gruppi: sottoalgebre, omomorfismi e anche rappresentazioni: cioè una <u>rappresentazione</u>

è anche rappresentazioni: cioè una rappresentazione di un'algebra di Lie L è un omomorfismo di algebre di Lie

$$L \longrightarrow gl(V) = End(V,V)$$

con il bracket fra endom. $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$

dove V è uno sp. vettoriale.

Caso particolare $V = \mathbb{C}^n$:

$$L \longrightarrow gl(n)$$

con il bracket fra matrici

Le nozioni di L-modulo, sottomodulo, modulo irriducibile e completam. riducibile sono date in modo ovvio come per i gruppi e le algebre associative viste nel corso.

Attenzione: L non è in generale associativa, quindi alcune cose sono diverse dal caso delle algebre associative, ad es.

se $\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(n)$ è una rappr., e $v \in \mathbb{C}^n$, allora

$$L.v = \{ \Phi(x)v \mid x \in L \}$$

in generale <u>non</u> è un L-sottomodulo, come invece avrei se Φ fosse rappr. di un'algebra associativa:

$$\Phi(y)\Phi(x)v = \cancel{\Phi(yx)}\, v$$