Algebra Superiore lez. 20

giovedì 7 gennaio 2021 16:01

Correzione alla def. di quoz. categorico (lez. 7)
la fattorizzazione di φ tramite π dev'essere unica. Fra l'altro, serve per l'unicità del quoziente categorico, perché se $\pi : X \to Y$ e $\pi' : X \to Y'$ sono quoz categorici, allora si fattorizzano l'un l'altro:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & Y \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
& Y' \arrow[u, shift left, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

e α e β sono una l'inversa dell'altra perché

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "\beta"] & Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \\
& Y \arrow[rr, "id"] & & Y
\end{tikzcd}$$

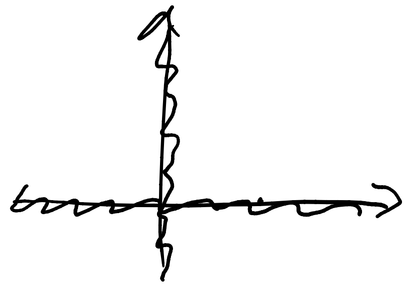
sono fattorizzazioni di π.

sono fattorizzazioni di π.

L'algebra di Lie di un gruppo algebrico lineare.

Sia $G \leq GL(n)$ un gruppo alg. lineare, vogliamo considerarlo come var. differenziabile immersa in $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \underline{\mathbb{R}^{2n^2}}$.

Questo non è possibile per ogni varietà algebrica, ad es.



$\{xy=0\}$ in $\mathbb{C}^2$

non è una sottovarietà differenziabile.

Spieghiamo perché per G invece funziona: siano $f_1, \dots, f_m$ polinomi tali che

$G = Z(f_1, \ldots, f_m) \cap GL(n)$ (in $M_n(\mathbb{C})$).

Consideriamo separatamente le parti reali e immaginarie delle f_i, e quindi consid. G come sottoinsieme localm. chiuso (in top. euclidea) dato da equazioni polinomiali.

Prendiamo la matrice Jacobiana delle equazioni al variare di $g \in G$, e prendiamo il sottoinsieme dei punti $g \in G$ per cui la matrice ha rango massimo. Per il teorema della f.ne implicita, in un intorno (euclideo) di ciascuno di questi punti, G è una sottovarietà differenziabile immersa. Questo vale sia come sottovar. reale immersa in $\mathbb{R}^{2n^2}$, sia come sottovar. complessa immersa in $\mathbb{C}^{n^2}$.

Questo varrebbe per ogni sottovarietà quasi affine di $M_n(\mathbb{C})$, però in aggiunta G è un gruppo alg., e agisce su se stesso ad es. con la moltipl. a sinistra, in modo transitivo.

dato $g \in G$ $\qquad x \longmapsto gx$

è un isomorfismo $G \to G$, che si estende ad un isomorfismo $M_n \to M_n$ dello spazio ambiente (con la stessa formula).

Quindi le proprietà topologiche locali di G come sottoinsieme di M_n sono le <u>stesse</u> in <u>tutti</u> i punti di G. Allora <u>tutto il gruppo</u> G è una sottovarietà differenziabile immersa in M_n.

Vogliamo def <u>l'algebra di Lie</u> di G.

Ricordiamo le costruzioni seguenti.

Prendiamo $X \in M_n(\mathbb{C})$. Lo consideriamo come un <u>vettore tangente</u> a $M_n(\mathbb{C})$ in I_n, identificandolo con l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial X}(I_n) : \mathcal{O}(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\overset{\shortparallel}{\delta} \qquad\qquad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial X}(I_n)$$

Questa applicazione è lineare, e soddisfa

$$\delta(f_1 f_2) = \delta(f_1) f_2(I_n) + f_1(I_n)\delta(f_2),\ \forall f_1, f_2.$$

Questa in realtà è una biiezione, cioè data

$$\delta : \mathcal{O}(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

lineare, che soddisfa l'uguaglianza di prima, esiste $X \in M_n(\mathbb{C})$ tale che

$$\delta = \frac{\partial}{\partial X}(I_n).$$

Il vettore si trova calcolando δ sulle funzioni coordinate x_{ij} (= le entrate della matrice);

le entrate di X cioè sono i numeri $\delta(x_{ij})$.

Allora avremo $\delta = \frac{\partial}{\partial X}(I_n)$, perché l'uguagl. è vera per costruzione sulle funzioni x_{ij}, e allora vale per tutti i polinomi in esse.

La stessa costruzione si può fare partendo da un gruppo algebrico lineare $G \subseteq GL(n) \subseteq M_n$, cioè consideriamo vettori $X \in M_n$ tangenti a G nell'identità. Prendiamo allora $x \in T_{I_n} G$, e lo identifichiamo con

$$\frac{\partial}{\partial x}(I_n) : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

perché se $x \in T_{I_n} G$ allora $\frac{\partial}{\partial x}(I_n)$ si annulla sulle funzioni $f \in I(G)$, e quindi $\frac{\partial}{\partial x}(I_n)$ passa al quoziente.

Identifichiamo allora (o definiamo) $T_{I_n} G$ con l'insieme delle appl. lineari

$$\delta : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

tali che $\delta(f_1 f_2) = \delta(f_1) f_2(I_n) + f_1(I_n) \delta(f_2)$

Possiamo anche considerare una versione *globale* della costruzione: consideriamo derivazioni dell'algebra $\mathcal{O}(G)$, cioè appl. lineari

$$\delta: \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

tali che $\delta(f_1 f_2) = \delta(f_1) f_2 + f_1 \delta(f_2)$.

Queste si interpretano come campi vettoriali regolari tangenti a G: una δ siffatta corrisponde al campo vettoriale che nel punto $g \in G$ fornisce il vettore tangente $\delta(-)(g)$: $\mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}$, cioè il vettore tangente x tale che

$$\delta(f)(g) = \frac{\partial f}{\partial x}(g).$$

Def: Sia G un gruppo alg. lineare, si definisce <u>l'algebra di Lie</u> di G, in simboli $\mathrm{Lie}(G)$ oppure $\mathfrak{g}$, come lo spazio vettoriale dei campi vettoriali tangenti a G e invarianti per traslazione a sinistra, cioè l'insieme delle applicazioni lineari $\mathcal{O}(G) \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}(G)$ tali che

$$\delta(f_1 f_2) = \delta(f_1) f_2 + f_1 \delta(f_2) \quad \text{e}$$

$$\forall g \in G \quad \text{vale} \quad \delta(g \cdot f) = g \cdot \delta(f),$$

dove G agisce su $\mathcal{O}(G)$ per traslaz. a sinistra.

Oss.: Siano $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Lie}(G)$. Allora il bracket

$$[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1 : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$$

è anch'essa un elem. di $\mathrm{Lie}(G)$ (verifica è anch'essa un elem. di $Lie(G)$ (verifica della regola di Leibnitz per la derivata del prodotto: esercizio). Quindi $Lie(G)$ è un' <u>algebra di Lie</u> in senso astratto, cioè uno sp. vett. L dotato di un'appl. bilineare

$[\ ,\ ] : L \times L \to L$ antisimmetrica e tale che

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

$\forall x,y,z \in L$.