Algebra superiore lez. 2

mercoledì 14 ottobre 2020 10:38

Ricordiamo: G = gruppo

X = insieme, con azione di G

Obiettivo è studiare X/G

Esempio: $X = \mathbb{C}^n$, azione di $G = S_n$

Vedremo: $\mathbb{C}^n/S_n$ "=" $\mathbb{C}^n$

Funzioni simmetriche e radici dei polinomi

Prendiamo un intero $n \geq 1$ e n numeri complessi $p_1, \dots, p_n$. Il polinomio monico

$$f_{p_1,\dots,p_n}(x) = (x-p_1)\cdot \ldots \cdot (x-p_n)$$

ha radici esattam. $p_1, \dots, p_n$.

Consideriamo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (p_1,\dots,p_n) & \longmapsto & f_{p_1,\dots,p_n}(x) \end{array}$$

(considerando le sue entrate

(considerando le sue entrate tranne il coeff direttore:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Quest'applicazione é suriettiva, per il teorema fondamentale dell'algebra, e le controimmagini sono esattamente le orbite di $G = S_n$. Cioè in un certo senso abbiamo "realizzato" il quoziente

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n / S_n$$

In coordinate:

$$f_{p_1, \dots p_n}(x) = x^n - (p_1 + \dots + p_n) x^{n-1} + \underbrace{(p_1 p_2 + \dots + p_{n-1} p_n)}_{} x^{n-2}$$
$$\dots + \underbrace{(-1)^n p_1 \cdots p_n}_{}$$

Stiamo cioè rifacendo la stessa cosa dell'altra volta.

Abb. visto:

<u>Proposizione</u>: I coefficienti di un polinomio monico $f \in \mathbb{C}[x]$, presi a

monico $f \in \mathbb{C}[x]$, a meno di segni alterni, sono uguali alle f.ni simmetriche elementari negli zeri di f.

<u>Corollario</u>: Esiste un polinomio $D \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tale che, per ogni $f \in \mathbb{C}[x]$ monico di grado n, scrivendo

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

si ha: $D(a_1, \dots, a_n) = 0$ se e solo se f ha radici multiple.

<u>Dim.</u>: Definiamo $C \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ tale che $C = 0$ esattam. quando alcune variabili coincidono:

$$C = \prod_{1 \le i < j \le n} (y_i - y_j)^2$$

Si tratta di un polinomio simmetrico, per il teo. visto l'altra volta esiste $D \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tale che

$$C(y_1,\dots,y_n) = D\big(-\sigma_1(y_1,\dots,y_n), +\sigma_2(y_1,\dots,y_n), \dots, (-1)^n \sigma_n(y_1,\dots,y_n)\big)$$

Questo D soddisfa la tesi del corollario, perché calcolare D in $a_1,\dots,a_n$ è lo stesso che calcolare C sulle radici di f. $\square$

Coniugio di matrici

Abb. qui $G = GL(n,\mathbb{C}) = GL(n)$ che agisce per coniugio su $M_n(\mathbb{C}) = \underline{M}_n$, cioè

$$\underset{\substack{\cap \\ GL(n)}}{g} \cdot \underset{\substack{\cap \\ M_n}}{A} = gAg^{-1}$$

Vogliamo studiare $M_n / GL(n)$.

Come spazio topologico (partendo ad es. dalla top. euclidea su $M_n = \mathbb{C}^{n^2}$) non è di Hausdorff.

Ad es. consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' facile dimostrare che l'orbita $GL(n) \cdot A$ (cioè la classe di coniugio) ha nella chiusura la matrice nulla (es.: dimostrarlo), quindi corrisponde nel quoziente a un punto non chiuso.

In algebra si studiano però le funzioni polinomiali su M_n invarianti per coniugio:

<u>Notazione</u>: $\mathbb{C}[M_n]$ = polinomi su $M_n (= \mathbb{C}^{n^2})$

(cioè $= \mathbb{C}[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}]$)

$\mathbb{C}[M_n]^{GL(n)}$ = polinomi su M_n invarianti per coniugio.

L'idea è:

$$\pi : M_n \longrightarrow \underbrace{M_n / GL(n)}$$

(quoziente insiemistico)

Componendo "funzioni polinomiali su $M_n/GL(n)$" col quoziente π otterremmo polinomi invarianti su

M_n.

Studiamo allora $\mathbb{C}[M_n]^{GL(n)}$:

es. $x \in M_n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

$\det(x)$ è un polinomio invarante per coniugio

$tr(x)$ ——— , ———

Consideriamo il polinomio caratteristico di x

$p_x(t) := \det(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{variabile} \\ \text{di } p_x(t)}}{t} I - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{x})$ è un polinomio

monico nella variabile t, a coefficienti che sono polinomi nelle entrate x_{ij} della matrice x.

Visto che $p_x(t)$ non cambia se rimpiazzo la matrice x con una coniugata, i coeff di $p_x(t)$ sono invarianti per l'azione di coniugio. D'altronde questi coeff sono le funzioni simm. elementari calcolate sono le funzioni simm. elementari calcolate negli autovalori della matrice (a segni alterni).

<u>Teorema</u>: Sia $f(x) \in \mathbb{C}[M_n]^{GL(n)}$, allora $f(x)$ è esprimibile in modo unico come polinomio nei coeff. del polinomio caratteristico di x.

<u>Dim.</u>: Sia D_n l'insieme delle matrici diagonali, identificato con $\mathbb{C}^n$.
Sia $K \cong S_n$ il sottogruppo di $GL(n)$ delle matrici di permutazione.
A meno di identificare K con S_n e D_n con $\mathbb{C}^n$, l'azione di K su D_n per coniugio è la stessa di S_n su $\mathbb{C}^n$.
Sia ora $f(x) \in \mathbb{C}[M_n]^{GL(n)}$, e consid. $f|_{D_n} \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]^{S_n}$

cioè $f|_{D_n}$ è un polinomio nelle funz. simm. elementari calcolate nelle entrate sulla

elementari calcolate nelle entrate sulla diagonale delle matrici in D_n, entrate che sono gli autovalori della matrice.
Cioè esiste p polinomio in n variabili tale che

$$f|_{D_n} = p(a_1|_{D_n}, \dots, a_n|_{D_n})$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono i coeff. del pol. caratteristico $p_x(t)$.
Consideriamo

$$F(x) = p(a_1(x), \dots, a_n(x))$$

è un polinomio nelle entrate $x_{11}, x_{12}, \dots$ di x, ed è invariante per coniugio. D'altronde $f(x)$ e $F(x)$ coincidono su D_n per costruzione. Per invarianza per coniugio, f e F coincidono sull'insieme delle matrici diagonalizzabili. Visto che questo insieme è denso in M_n, F e f coincidono su tutto M_n, cioè $f = F$. $\square$

Esercizio: Dimostrare che l'insieme delle matrici diagonalizzabili è denso in M_n (suggerimento: le matrici con n autovalori distinti sono diagonalizzabili).

GRUPPI ALGÈBRICI LINEARI

Consideriamo come campo $k = \mathbb{C}$.
Scriveremo spesso $GL(n)$ invece di $GL(n, \mathbb{C})$, ecc...

Def.: Un gruppo algebrico lineare (su $\mathbb{C}$) è un sottogruppo $G \subseteq GL(n)$ tale che esistono polinomi $f_1, .., f_m$ su M_n tali che

$$G = \{ g \in GL(n) \mid f_i(g) = 0 \ \forall i \in \{1, .., m\} \}$$

Esempio: 1) $GL(n)$, $SL(n)$ sono gruppi alg. lin.

2) $\{I\} \subseteq GL(n)$ anche,
matrice identità $n \times n$
basta prendere $f_1(x) = x_{11} - 1$
$f_2(x) = x_{12}$

3) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con la usuale moltipl., è $GL(1)$

4) $\mathbb{C}$ con la somma: lo poss. consid. come gruppo alg. lineare, identificandolo con $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{C} \right\}$,

infatti $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) Ogni gruppo finito G si può considerare come gruppo algebrico lineare:

$G \subseteq S_n$ per qualche n,

e „$S_n \subseteq GL(n)$" come il sottogruppo delle matrici di permutazione.

6) $H(n) = \{$matrici diagonali in $GL(n)\}$

$B(n) = \{$matrici triangolari superiori$\}$

$U(n) = \{$matr. triangolari superiori della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \end{pmatrix}$$

$\}$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots\; 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg) \quad \Bigg)$$

Oss.: Se abbiamo V spazio vett. su $\mathbb{C}$ di dim. finita, allora fissando una base possiamo identificare V con $\mathbb{C}^n$, $GL(V)$ con $GL(n)$, $End(V)$ con M_n.

Anche un sottogruppo $G \subseteq GL(V)$ si dice <u>gruppo alg. lineare</u> se corrisponde a un gr. alg. lin. di $G(n)$.

<u>Obiettivo</u>: definire „<u>funzioni polinomiali</u> su $GL(n)$".

<u>Oss.</u>: Si può dare la definizione delle f.ni regolari

$$\mathbb{C}[GL(n)] = \mathbb{C}\left[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, \frac{1}{\det(x)}\right]$$

Richiami di geometria algebrica

(obiettivo: giustificare la def. di $\mathbb{C}[GL(n)]$)

Consideriamo $\mathbb{C}^n$ con la topologia di Zariski. Cioè, ricordiamo, un sottoinsieme è <u>chiuso</u>

se è luogo degli zeri simultaneamente di una famiglia di polinomi in $\mathbb{C}[x_1,..,x_n]$.

<u>Notazioni</u>: Dato $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$, si definisce il luogo degli zeri comuni come $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$.
Dato $X \subseteq \mathbb{C}^n$, si denota con $\underline{I}(X)$ l'insieme dei polinomi che svaniscono su tutto X.
Dato $X \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f \in \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$, si denota con X_f l'insieme degli elt di X dove f <u>non si annulla</u>.

<u>Es.</u>: $GL(n) = (M_n)_{\det(x)}$

<u>Def.</u>: Una <u>varietà affine</u> è un chiuso di Zariski di un qualche $\mathbb{C}^n$. Data una varietà affine $X \subseteq \mathbb{C}^n$, si definisce l'<u>anello delle funzioni regolari</u> su X:

$\mathcal{O}(X) = \{ f: X \to \mathbb{C} \mid f$ è la restrizione (oppure $\mathbb{C}[X]$) a X di un polinomio in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ $\}$

s.i.

La definizione di $\mathcal{O}(X)$ si estende a <u>localmente chiusi</u> in top. di Zariski:

<u>Def.</u>: Sia $X \subseteq \mathbb{C}^n$ localmente chiuso, si definisce <u>l'anello delle f.ni regolari</u> su $X \subseteq \mathbb{C}^n$, denotato $\mathcal{O}(X)$ o $\mathbb{C}[X]$, l'insieme delle funzioni $f: X \to \mathbb{C}$ tali che esiste un ricoprim. aperto $\{U_i\}$ di X, e polinomi $a_i, b_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tali che, per ogni i, b_i non si annulla su U_i, e

$$f|_{U_i} = \frac{a_i|_{U_i}}{b_i|_{U_i}}$$