Algebra Superiore lez. 19

giovedì 17 dicembre 2020 14:19

Teorema: Siano G, H gruppi alg. lineari linearmente riduttivi e V, W rispettivam. un G-modulo e un H-modulo.

Se V e W sono regolari e irriducibili, allora $V \otimes W$ è un $G \times H$-modulo regolare e irriducibile.

Inoltre ogni $G \times H$-modulo regolare irriducibile è di questa forma.

Dim.: Abb. già osservato che $V \otimes W$ è regolare, dobb. dim. che è irriducibile.

V è un G-modulo irriduc. di dim. finita, quindi è un $\mathbb{C}[G]$-modulo irriducibile di dim. finita, quindi irriducibile di dim. finita, quindi l'immagine di $\mathbb{C}[G]$ in $\mathrm{End}(V)$ è tutta l'algebra $\mathrm{End}(V)$. Analogamente per W e H. D'altronde l'azione di $\boxed{\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W)}$ su $V \otimes W$ definita prima estende l'azione di $G \times H$ su $V \otimes W$, nel senso:

considero $G \times H$ come il sottoinsieme $\{ g \otimes h \mid g \in G,\ h \in H \} \subseteq \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[H]$

Visto che l'immagine di G genera tutta $\mathrm{End}(V)$, e l'immagine di H genera tutta $\mathrm{End}(W)$, allora l'immagine di $G \times H$ in $\mathrm{End}(V \otimes W)$ genera tutta la sottoalgebra $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W)$.

Per l'ultimo lemma visto, abb.
$End(V) \otimes End(W) = End(V \otimes W)$, quindi
l'immagine di $G \times H$ è tutta $\underline{End(V \otimes W)}$.
Ne deduciamo che $\mathbb{C}[\underline{G \times H}]$ viene
mandata suriettivam. su $End(V \otimes W)$.
Allora (teo. di Wedderburn) $V \otimes W$ è
irriducibile come $\mathbb{C}[G \times H]$-modulo, e
allora anche come $G \times H$-modulo.

Viceversa, sia $\boxed{U}$ un $G \times H$-modulo
regolare irriducibile. Dobbiamo trovare V, W
tali che $U \cong V \otimes W$.

<u>Oss.</u>: Dati V e W, il prodotto
tensoriale $V \otimes W$ come G-modulo
è $\underline{V} \otimes (\mathbb{C} w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} w_m) =$

$$V \otimes \left(\mathbb{C}w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}w_m \right) =$$

base di W

$$\cong \underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_{m \text{ volte}} \leftarrow$$

(identificando come G-moduli V e $V \otimes \mathbb{C}w_i$)

Seguendo quest'idea, decomponiamo U come G-modulo in somma diretta di irriducibili: $U = \bigoplus_i V_i$

Consideriamo lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari G-equivarianti $\varphi : V_1 \to U$ (per semplicità poniamo $V = V_1$).

Chiamiamo Z questo spazio vettoriale.

Chiamiamo Z questo spazio vettoriale.

Z è non nullo, perché contiene almeno l'inclusione di V_1 in U (stiamo supponendo che $U \neq \{0\}$).

Inoltre Z è un H-modulo, con la struttura seguente: data $\varphi : V \to U$ G-equivariante e $h \in H$, poniamo

$$\underbrace{(h\cdot\varphi)}_{\text{un'altra appl. } G\text{-equivar. } V \to U}(\overset{\in V}{v}) = \underbrace{(e_G, h)}_{\in G\times H}\cdot\overbrace{\varphi(v)}^{\in U}$$

Con questa definizione si verifica che Z è un H-modulo regolare.

Visto che H è lin. riduttivo, possiamo scegliere un addendo irriducibile di Z, chiamiamolo W.

Consid. $V \otimes W$ come $G\times H$-modulo, e def. un'applicazione lineare

$$\Phi : V \otimes \underline{W} \longrightarrow U$$

$$v \otimes \underline{\varphi} \longmapsto \varphi(v)$$

$$\varphi : V \to U$$

Si verifica facilmente che è ben definita e $G \times H$ equivariante. L'immagine contiene V_1, quindi è $\neq \{0\}$, quindi l'immagine di $V \otimes W$ è U. Quindi Φ è suriettiva, ed è iniettiva perché $V \otimes W$ è irriducibile per la prima parte della dim.. Allora $U \cong V \otimes W$.

$\square$

<u>Oss.</u>: Si può scegliere $V \subseteq U$ come G-sottomodulo minimale $\neq \{0\}$ e $W \subseteq Z$ come H-sottomodulo minimale $\neq \{0\}$ e la dim. funziona anche con G e H non linearmente riduttivi.

con G e H non linearmente riduttivi.

<u>Corollario</u> („versione algebrica" del teorema di Peter-Weyl) Sia G gruppo alg. lineare, linearm. riduttivo. Consid. $\mathcal{O}(G)$ come $G \times G$-modulo: il primo fattore agisce per traslaz. a sinistra, il secondo a destra. Allora

$$\mathcal{O}(G) \cong \bigoplus_{V} V^* \otimes V$$

dove l'isom. è di $G \times G$-moduli, e la somma è sugli elem. V di un insieme di G-moduli irriducibili regolari, insieme che contiene esattam. un elem. di ciascuna classe di isomorfismo. Ciascun addendo $V^* \otimes V$ è isomorfismo. Ciascun addendo $V^* \otimes V$ è la componente isotipica di tipo V^* per traslaz. a sinistra, e quella di tipo V per traslaz. a destra.

<u>Dim.</u>: Sia V come nell'enunciato, def.

$$\iota_V : \underline{V}^* \otimes \underline{V} \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$
$$\varphi \otimes v \longmapsto \left(g \mapsto \underline{\varphi(g \cdot v)}\right)$$

È ben definita, ed è $G \times G$-equivariante (<u>esercizio</u>, è la stessa verifica fatta già in un lemma a lezione).

Ora: V è irriducibile, V^* anche, infatti se V^* ha un sottospazio proprio non nullo G-stabile, allora l'intersezione di tutti i nuclei è un sottospazio proprio G-stabile non nullo di V.

Allora $V^* \otimes V$ è irriducibile e allora ι_V è

Allora $V^*\otimes V$ è irriducibile, e allora c_V è iniettiva perché ha immagine non nulla.

Per concludere la dimostrazione, basta dimostrare le ultime affermazioni del teorema, cioè

$c_V(V^*\otimes V)$ è la comp. isotipica di tipo V per traslaz. a destra in $\mathcal{O}(G)$

(quella per traslaz. a sinistra è simile).

Dim. prima che se V, U sono G-moduli irriducibili isomorfi allora

$$c_V(V^*\otimes V) = c_U(U^*\otimes U)$$

Sia $\varphi : V \to U$ isom. di G-moduli, allora è indotto un isom. $\varphi^* : U^* \to V^*$ di G-moduli, ponendo

$$\underset{\substack{\cap \\ U^*}}{\varphi^*(\eta)}\ \underset{\substack{\cap \\ V}}{(v)} = \eta(\varphi(v))$$

U^* V

Allora dati $g \in G$, $\eta \in U^*$, $v \in V$:

$$\varphi^*(\eta)(g \cdot v) = \eta(\varphi(g \cdot v)) =$$

$$= \eta(g \cdot \varphi(v)) = \iota_U(\eta \otimes \varphi(v))(g)$$

$$\iota_V(\varphi^*(\eta) \otimes v)(g)$$

Questo dimostra che $\iota_V(V^* \otimes V) = \iota_U(U^* \otimes U)$ perché se v è „qualsiasi" in V allora $\varphi(v)$ è „qualsiasi" in U, e se η è „qualsiasi" in U^* allora $\varphi^*(\eta)$ è „qualsiasi" in V^*.

Sia ora U un sottomodulo irriducibile di $\mathcal{O}(G)$ per traslaz. a destra.

Dimostriamo che U è nell'immagine di

Dimostriamo che U è nell'immagine di ι_U, questo concluderà la dimostrazione.

Scegliamo $\eta \in U^*$ ponendo

$$\rightarrow \eta(\underset{U}{\underset{\cap}{u}}) = \underset{\mathcal{O}(G)}{\underset{\cap}{u}}(e_G) \qquad \forall u \in U$$

Adesso l'elemento $\iota_U(\eta \otimes u)$ è la funzione

$$g \longmapsto \eta(\underline{g} \cdot u) = (\underline{g} \cdot u)(e_G) =$$

$$= u(e_G \cdot g) = u(g).$$

Cioè con questa η, per ogni $u \in U$ abb. $\iota_U(\eta \otimes u)$ coincide con u come funzione su G.

$\square$

Es.: Per $G = \mathbb{C}^*$ la decomp. del corollario è proprio quella ovvia

$$\mathcal{O}(G) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\mathbb{C} \cdot t^n}_{\substack{\| \\ V^* \otimes V}}$$

Def.: Gli elem. di $V^* \otimes V$ in $\mathcal{O}(G)$ sono detti <u>coefficienti matriciali</u> di G.

Corollario: Se G e H sono gruppi algebrici lineari lin. riduttivi, allora $G \times H$ è linearmente riduttivo.

Dim.: Basta dimostrare che $\mathcal{O}(G \times H)$ è un $G \times H$-modulo completamente riducibile per traslazioni completamente riducibile per traslazione a destra, e poi si usa che ogni $G \times H$-modulo regolare è dentro (a meno di isom.) $\mathcal{O}(G\times H)^m$ per qualche m.

Abb. per il corollario precedente:

$$\mathcal{O}(G\times H) \xleftarrow{} \mathcal{O}(G)\otimes \mathcal{O}(H) =$$

$\exists$ Suriettiva $G\times H$-equivariante

$$= \Big(\bigoplus_{V} V^* \otimes \underline{V}\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{U} U^* \otimes \underline{U}\Big) =$$

V: G-moduli come nel coroll.

U: H-moduli come nel coroll.

$$\cong \bigoplus_{V,U} V^* \otimes V \otimes U^* \otimes U \cong$$

$$\cong \bigoplus \big(V^* \otimes U^*\big) \otimes \big(V \otimes U\big)$$

$$\cong \bigoplus_{V,U} (V^* \otimes U^*) \otimes \underline{(V \otimes U)}$$

$G \times H$ agisce solo qui

Quindi $\mathcal{O}(G \times H)$ è completam. riducibile come $G \times H$-modulo per traslaz. a destra.

$\square$