Algebra Superiore lez. 18

mercoledì 16 dicembre 2020 09:12

<u>Teorema</u> (di densità di Jacobson):

Sia A un'algebra associativa unitaria, e V un A-modulo irriducibile.
Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\underline{A} \cdot (v_1, \dots, v_n) = \underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_{n \text{ volte}}$.

<u>Dim.</u>: Usiamo la notazione $V^n = \underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_{n \text{ copie}}$,

e procediamo per induzione su n.

Con $n=1$, sia v_1 lin. indipendente, cioè $v_1 \neq 0$. Allora $\underbrace{A \cdot v_1}_{\ni\, 1_A \cdot v_1 = v_1}$ è un sottomodulo non nullo, per cui $A \cdot v_1 = V$ perché V è irriduc.

Dimostriamo il passo induttivo: sia $n \geq 1$, assumiamo il teorema per n, e prendiamo $v_1, \dots, v_{n+1}$ linearm. indipendenti in V.

Siano $x_1, \dots, x_{n+1} \in V$ qualsiasi, dobb. dim. $\exists a \in A$ tale che $a \cdot v_i = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$

Per ipotesi induttiva esiste $a_0 \in A$ tale che

$a_0 \cdot v_i = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Definiamo $B = \{a \in A \mid b \cdot v_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

è una sottoalgebra associativa di A.

Consid. $B \cdot v_{n+1} = \{b \cdot v_{n+1} \mid b \in B\}$. E' un sottospazio vettoriale, ed è A-stabile, infatti dati $a \in A$ e $b \in B$ abb.:

$$(a \cdot b) \cdot v_i = a \cdot (b \cdot v_i) = a \cdot 0 = 0$$

allora $ab \in B$. Allora segue:

$$a \cdot (b \cdot v_{n+1}) = (a b) \cdot v_{n+1} \in B \cdot v_{n+1}$$

$$a \cdot (b \cdot v_{n+1}) = \underbrace{(ab)}_{\in B} \cdot v_{n+1} \in B \cdot v_{n+1}.$$

Cioè $B \cdot v_{n+1}$ è un A-sottomodulo di V.

Visto che V è irriducibile, abbiamo $B \cdot v_{n+1} = \{0\}$ oppure V. Supponiamo prima di tutto che $B \cdot v_{n+1} = V$. Allora anche l'elemento

$x_{n+1} - a_0 v_{n+1}$ è in $B \cdot v_{n+1}$.

Cioè esiste $b_0 \in B$ tale che $x_{n+1} - a_0 v_{n+1} = b_0 v_{n+1}$, e allora

$$\underbrace{a_0 v_{n+1} + b_0 v_{n+1}}_{\substack{\parallel \\ (a_0 + b_0) v_{n+1}}} = x_{n+1}$$

Cioè l'elem. a cercato può essere preso come $a = a_0 + b_0$. Quindi in questo caso come $a = a_0 + b_0$. Quindi in questo caso il teorema è vero.

Rimane da considerare il caso $B \cdot v_{n+1} = \{0\}$, e dim. che porta a un assurdo.

Consideriamo

$$\underline{W} = A \cdot (v_1, .., v_{n+1}) \subseteq V^{n+1}$$

e

$$U = \{(\underbrace{0, .., 0}_{n}, \underline{v}) \mid v \in V\} \subseteq V^{n+1}$$

Per ipotesi induttiva, la proiezione di W sui primi n addendi di V^{n+1} è tutto V^n. Segue che

$$W + U = V^{n+1}.$$

Dim. che la somma è diretta: sia $\underline{w} \in W \cap U$.

Dim. che la somma è diretta. Sia $\underline{w} \in W \cap U$.

Essendo in W, si scrive come $c\cdot(v_1,\dots,v_{n+1})$ per qualche $c \in A$. Essendo anche in U, è del tipo $(0,\dots,0,*)$. Cioè $c\cdot v_i = 0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, e allora $c \in B$.
Per la nostra ipotesi che $B\cdot v_{n+1} \neq \{0\}$ abb.

$c\cdot v_{n+1} = 0$, cioè $w = 0$.

Concludiamo: $W \oplus U = V^{n+1}$. Sia

P la proiezione $V^{n+1} \longrightarrow W$ lungo U.

Visto che U e W sono A-sottomoduli, P è A-equivariante:

$$P(\underbrace{a\cdot(w+u)}_{\text{elem. qualsiasi di } V}) = P(\overset{W}{\overset{\Downarrow}{aw}} + \overset{U}{\overset{\Downarrow}{au}}) = a\overset{P(w+u)}{\overset{\parallel}{w}} = aP(w+u)$$

Siano $P_1,\dots,P_{n+1} : V^{n+1} \longrightarrow V$ le

Siano $P_1, \dots, P_{m+1} : V^{m+1} \longrightarrow V$ le componenti di P, cioè

$$P(v) = \left(P_1(v), \dots, P_{m+1}(v)\right) \quad \forall v \in V^{m+1}$$

Considero $P_{ij} : V \to V$ la restrizione di P_i all'addendo j-esimo di $V \oplus \dots \oplus V = V^{m+1}$.

Cioè:

$$P(r_1, \dots, r_{m+1}) = \left(\sum_{j=1}^{m+1} P_{1j}(r_j), \dots, \sum_{j=1}^{m+1} P_{m+1,j}(r_j) \right)$$

Visto che P è A-equivariante, lo sono anche le $P_{ij} : V \to V$. Visto che V è irriducibile, per il lemma di Schur ogni P_{ij} è la moltiplicazione per un $q_{ij} \in \mathbb{C}$.

Segue anche che dato $Z \subseteq V$ un

Segue anche che dato $Z \subseteq V$ un sottospazio qualsiasi di V, abb.

$$Z^{n+1} \subseteq V^{n+1},$$

e vale anche

$$\boxed{P(Z^{n+1}) \subseteq Z^{n+1}}.$$

Applichiamo questo a $Z = \mathrm{Span}\{v_1, .., v_{n+1}\}$.
Siano $w_1, .., w_{n+1} \in V$ arbitrari, allora esiste $T \in \mathrm{End}(V)$ tale che $T(v_i) = w_i \ \forall i \in \{1, .., n+1\}$ perché $v_1, .., v_{n+1}$ sono lin. indipendenti.
Denotiamo sempre con T l'endomorfismo di V^{n+1} che è T applicato ad ogni componente.
Calcoliamo:

$$T\Big(P(v_1, .., v_{n+1})\Big) = T\Big(\sum_{j=1}^{n+1} P_{1j}(v_j), .., \sum^{n+1} P\ (v_j)\Big) = T\Big(\sum^{n+1} a\ v\ \ \sum^{n+1} a\ v\Big) -$$

$$\sum_{j=1}^{\dots} P_{n+1,j}(v_j)\Big) = T\Big(\sum_{j=1}^{n+1} q_{1j}\, v_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} q_{n+1,j}\, v_j\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n+1} q_{1j}\, T(v_j), \dots, \sum_{j=1}^{n+1} q_{n+1,j}\, T(v_j)\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n+1} q_{1j}\, w_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} q_{n+1,j}\, w_j\Big) =$$

$$= P(w_1, \dots, w_j)$$

Inoltre $P(v_1, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{n+1})$, perché $(v_1, \dots, v_{n+1}) \in W$, e $T(P(v_1, \dots, v_{n+1})) =$

$$T(v_1, \dots, v_{n+1}) = (T(v_1), \dots, T(v_{n+1})) = (w_1, \dots, w_{n+1}).$$

Segue: $P(w_1, \dots, w_{n+1}) = (w_1, \dots, w_{n+1})$.

Ma allora $W = V^{n+1}$, perché solo su W P è l'identità. Questo contraddice

$$\underset{\substack{\neq \\ \{0\}}}{W \oplus U} = V^{n+1} \quad : \text{ assurdo.}$$

$\square$

<u>Corollario</u> (Teo. di Wedderburn): Sia A algebra associativa unitaria, e $\varphi : A \to End(V)$ una rappresentazione con V di dim. finita e $\neq \{0\}$. Allora φ è irriducibile se e solo se è suriettiva.

<u>Dim.</u>: Se φ è suriettiva, allora V è irriducibile. Viceversa, sia V irriducibile, e sia $L \in End(V)$ qualsiasi.

Sia $(v_1, .., v_n)$ base di V, e per il teorema esiste $a \in A$ tale che $\varphi(a)(v_i) = L(v_i) \; \forall i$.

Segue: $\varphi(a) = L$, cioè φ è suriettiva.

$\square$

<u>Esercizio</u>: Dimostrare che $\mathbb{C}^n$ è un

Esercizio: Dimostrare che $\mathbb{C}^n$ è un $O(n,\mathbb{C})$-modulo irriducibile e un $Sp(n,\mathbb{C})$-modulo irriducibile (quest'ultimo per n pari). Dedurne che $O(n,\mathbb{C})$ e $Sp(n,\mathbb{C})$ (per n pari) generano $M_n(\mathbb{C})$ come algebra.

Osservazioni:

1) Date due algebre associative unitarie A, B, il prodotto tensoriale $A\otimes B$ ha una struttura naturale di algebra associativa unitaria:

prodotto: $(a\otimes b)\cdot(c\otimes d)=(ac)\otimes(bd)$.

unità: $1_A\otimes 1_B$

(verificare per esercizio che con queste def.

... per esercizio che con questi reg.
$A \otimes B$ è associativa unitaria).

2) Siano G, H gruppi algebrici lineari,

e V, W risp. un G-modulo e un H-modulo, allora

$V \otimes W$ ha una struttura naturale di

$G \times H$ - modulo:

$$(a,b) \cdot (v \otimes w) = \underline{(a \cdot v) \otimes (b \cdot w)}.$$

6.

Se V e W sono regolari anche $V \otimes W$ è regolare.

3) Siano $A := End(V)$

3) Siano $A = End(V)$ e $B = End(W)$ dove V e W sono sp. vettoriali. Allora $A \otimes B$ è una algebra associativa, ed esiste un omom. naturale di algebre assoc. unitarie

$$End(V) \otimes End(W) \longrightarrow End(V \otimes W)$$

$$\eta \otimes \mu \longmapsto \left(v \otimes w \mapsto \eta(v) \otimes \mu(w) \right)$$

cioè $V \otimes W$ ha una struttura naturale di $A \otimes B$-modulo.

Lemma: Siano V, W spazi vettoriali di dim. finita, allora

$$End(V \otimes W) \cong \underbrace{End(V) \otimes End(W)}$$

tramite l'omom. dell'osservaz. 3).

<u>Dim.</u>: Supponiamo V e W non nulli, allora $V \otimes W \neq \{0\}$. Per il corollario, basta dim. che $V \otimes W$ è un $C = \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W)$-modulo irriducibile.

Questo dirà che l'omom. è suriettivo, allora è iniettivo (confrontando le dimensioni).

Per dimostrare l'irriducibilità, consid. un vettore qualsiasi

$$u = \sum_i v_i \otimes w_i$$

di $V \otimes W$, con $v_i \in V$, $w_i \in W$.

Dim. che $C \cdot u = V \otimes W$.

Possiamo supporre che $v_i \neq 0$ $\forall i$, e che i w_i siano linearm. indipendenti.

(ad es. $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + v_3 \otimes (w_1 + w_2) =$

(ad es. $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \underbrace{v_3 \otimes (w_1 + w_2)} =$

$= (v_1 + v_3) \otimes w_1 + (v_2 + v_3) \otimes w_2$)

Scelgo $b \in End(W)$ tale che

$b(w_i) = 0 \quad \forall i \neq 1$, e $b(w_1) = w_1$.

Allora $c = Id_V \otimes b$ e

vale $c \cdot u = v_1 \otimes w_1$

Segue facilmente che $C \cdot u$ contiene

$\{ v \otimes w \mid v \in V, w \in W \}$.

Allora $C \cdot u = V \otimes W$.

$\square$