Algebra Superiore lez. 16
mercoledì 9 dicembre 2020 09:04

Per la dim. del Teorema 2 della lez. 14:

<u>Lemma</u>: Sia G un gruppo alg. lineare, e siano X, Y G-varietà quasi proiettive costituite ciascuna da una singola G-orbita. Se esiste $\varphi: X \to Y$ G-equivariante biiettiva, allora φ è un isomorfismo.

<u>Dim.</u>: Visto che φ è biiettiva, $\varphi^{-1}: Y \to X$ esiste, e dobbiamo solo dim. che è regolare.

Considero $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ (localm. chiusi), e prendiamo $Y' \subseteq Y$

aperto affine denso.

(Esercizio: un tale Y' esiste. Sugg.:

$\mathbb{P}^m$ è ricoperto da $m+1$ copie di $\mathbb{C}^m$

Sono i $\mathbb{P}^m_{y_i}$ $\quad i \in \{0, .., m\}$

i-esima coord. omogenea

e Y è ricoperto dalle int. $Y \cap \mathbb{P}^m_{y_i}$ che sono quasi affini.

Dimostrare che, a meno di un cambiam. lineare di coordinate $y_0, .., y_m$, esiste i tale che

$Y \cap \mathbb{P}^m_{y_i}$ è denso in Y.

Poi usare il fatto che la top. di Zariski su $\mathbb{C}^m$ ha una base fatta di aperti che sono varietà affini.)

Consid. $\varphi^{-1}(Y')$ aperto denso di X e denso. $\varphi^{-1}(Y')$ aperto denso in X e

$X' \subseteq \varphi^{-1}(Y')$ aperto denso affine di X.

Adesso $\varphi|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$, ed è

biettiva da X' nella sua immagine.

Per il corollario della lez. precedente,

esistono aperti densi $U' \subseteq X$, $V' \subseteq Y$ tali

che $\varphi|_{U'} : U' \longrightarrow \varphi(U') = V'$ è un isom.

Cioè $\varphi^{-1}|_{V'} : V' \longrightarrow \varphi^{-1}(V') = U'$ è

regolare.

Visto che φ è G-equivariante, allora

$$\varphi|_{g \cdot U'} : \underline{g \cdot U'} \longrightarrow \underline{g \cdot V'}$$

è un isom. per ogni $g \in G$.

[illegible] è un ricoprimento aperto X

Infine, $\{g.U' \mid g \in G\}$ è un ricoprim. aperto di X, e $\{g.V' \mid g \in G\}$ è un ricoprim. aperto di Y.

Allora φ' è regolare se ristretta ad aperti di ricoprim. rispettivi di X e Y: è regolare su tutta Y.

$\square$

<u>Dim. del teorema 2 della lez. 14</u>

Sia Z una G-varietà quasi proiettiva, e $\varphi: G \to Z$ regolare, costante sulle classi lat. sinistre di H.

Vogliamo dim. che esiste $\psi: G/_H \to Z$ tale che $\varphi = \psi \circ \pi$ dove $\pi: G \to G/_H$ è il quoziente. D'altronde per questo deve valere $\psi(gH) = \varphi(g)$

valore $\psi(gH) = \varphi(g)$

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[d, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto] & G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z & \varphi(g) \\
gH \arrow[urrrr, bend right, mapsto] & & G/H \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Questo definisce ψ come applicazione, dobb. dim. che è regolare.

Sia $z = \varphi(e)$, allora
$\uparrow$ el. neutro di G

$\varphi : G \longrightarrow Z$ si scrive anche come

$$\varphi(g) = g \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ \varphi(e)}}{z}$$

Def. $\Phi : G \longrightarrow \boxed{G/H \times W}$

dove W è l'immagine di φ, e Φ

dove $\underline{W}$ è l'immagine di φ, e Φ

è def. come $\Phi(g) = (\underline{gH}, \underline{g \cdot z})$.

Abb. già osservato: W è una G-orbita in Z, quindi è localm. chiusa, cioè è quasi proiettiva.

Sia $D = \Phi(G)$, anche D è una G-orbita, perché

$$\Phi(g) = g \cdot (H, z)$$

dove G agisce su $G/H \times W$ in „diagonale"

$$g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y).$$

Allora anche D è quasi proiettiva.

Consid. $\eta : \underset{G/H \times W}{\overset{\cap}{D}} \to G/H$ la proiez. su G/H. E' regolare, è G-equivariante, è

G/H. E' regolare, è G-equivariante, è biiettiva perchè $g \cdot z$ dipende solo da gH perchè φ è costante sulle classi laterali.
Inoltre D e G/H sono costituite ciascuna da una singola G-orbita.

Dal lemma: η è un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & D \subset G/H \times W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift left, "\eta"] & W \subseteq Z \\
& G/H \arrow[u, shift left, "\eta^{-1}"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Sia μ la proiez. sul secondo fattore, e oss. che $\psi = \mu \circ \eta^{-1}$, quindi ψ è regolare.

$\square$

<u>Oss.</u>: Nelle ipotesi del teorema 2,

Z è una G-varietà con un punto $\varphi(e) = z$ fissato da H. D'altronde per ogni fissato da H. D'altronde per ogni G-varietà Z con un punto $z \in Z$ fissato da H, esiste un'unica appl. regolare $\varphi : G \to Z$ costante sulle classi lat. sinistre di H che manda $e \in G$ in z: $gH \mapsto g \cdot z$.

Def.: Dati G e H come nel teorema, G/H con str. di varietà come nel teorema si dice spazio omogeneo (o varietà omogenea).

Es.: Consid. di nuovo $G = GL(2)$, $H = H(2) \cong (\mathbb{C}^*)^2$

Abb. visto G/H come sottovar. quasi proiettiva di $\mathbb{P}(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}_{\cong \mathbb{C}^4}) \cong \mathbb{P}^3$.

Si può vedere G/H in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ anche in un altro modo:

Consideriamo l'immersione di Segre

$$S : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$
$$([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \longmapsto ([x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1])$$

Si può far vedere che G/H è nell'immagine di S (scelto l'ordine delle coord. su $\mathbb{P}^3$ nel modo giusto), ed è precisamente

$$S\left((\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \operatorname{diag}(\mathbb{P}^1)\right)$$

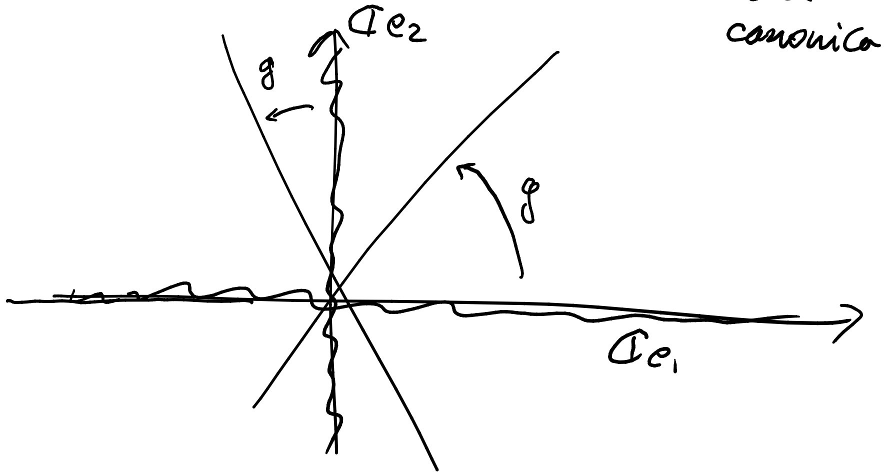
D'altronde: G agisce diagonalmente su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

$$g \cdot ([u], [v]) = ([g \cdot u], [g \cdot v])$$

e H è il sottogruppo di G degli elem. che stabilizzano $\mathbb{C}e_1$ e $\mathbb{C}e_2$.

che stabilizzano $\mathbb{C}e_1$ e $\mathbb{C}e_2$.

base canonica



e G agisce in effetti transitivam. su $\underbrace{(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \mathrm{diag}(\mathbb{P}^1)}$, che quindi è in biiezione naturale con G/H.

<u>Esercizio:</u> dim. che G/H è affine,

facendo vedere che si ottiene intersecando $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^3$ con un sp. affine di $\mathbb{P}^3$.

I teoremi 1 e 2 valgono anche per H linearmente riduttivo, per il quale avevamo però anche $G/\!/H$!

però anche $G/\!/H$

H-var. affine   quoz. categorico

Prop.: Siano G gruppo alg. lineare, H sottogr. chiuso lin. riduttivo, e G/H var. quasi proiettiva come nei teo. 1 e 2. Allora G/H è affine e isomorfa al quoz. categorico $G/\!/H$.

Dim.: Consid. $\pi : G \longrightarrow G/\!/H$ del quoz. categorico. Visto che tutte le H-orbite sono chiuse (sono le classi lat. sinistre), allora le fibre di π sono le H-orbite.
E' facile vedere che $G/\!/H$ eredita l'op. di G per moltiplicaz. a sinistra, e π è G-equivariante e costante sulle cl. laterali.

G-equivariante e costante sulle cl. laterali.
Per il teorema 2, esiste

$$\psi : \underbrace{G/H}_{} \longrightarrow \underbrace{G/\!/H}_{\text{affine}}$$

G-equivariante, biiettiva, e le var. sono costituite ciascuna da una G-orbita.
Per il lemma di oggi: ψ è isom.

$\square$

Per sottogruppi normali vale: se H è chiuso in G e normale (non supponiamo che G o H siano lin. riduttivi), allora G/H è affine, ed è un gruppo algebrico lineare in modo naturale, e $\pi : G \to G/H$ è un omom. di gruppi regolare.
Non dim. questo fatto, dimostriamo una

Non dim. questo punto, dimostriamo una versione più debole (ignorando volutamente il teorema 1 e quindi il fatto che una struttura di varietà su G/H è unica):

<u>Teorema</u>: Sia G gruppo alg. lineare, H sottogruppo chiuso <u>normale</u>, allora esiste un gruppo alg. lineare K e un omom. regolare suriettivo $G \to K$ con nucleo H.

<u>Dim.</u>: Per il teo. di Chevalley, esiste V G-modulo regolare e $U \subseteq V$ sottosp. di dim. 1 con stabilizzatore H. Allora $h \in H$ agisce su U come la moltipl. per uno scalare $\chi(h) \in \mathbb{C}^*$. Come in una dim. già vista $\chi : H \to \mathbb{C}^*$

Come in una dim. già vista, $\chi : H \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $h \longmapsto \chi(h)$

è regolare. Inoltre

$$\chi(h_1 h_2) = \chi(h_1)\chi(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

cioè χ è un omom. di gruppi.

In generale gli omom. regolari da un gruppo nel gruppo $\mathbb{C}^*$ si chiamano

<u>**caratteri**</u>.

Consideriamo ora in generale un carattere

$\mu : H \longrightarrow \mathbb{C}^*$ e

il sottosp. vett. degli autovettori per H di autovalore dato da μ:

$$V_\mu = \{ v \in V \mid h \cdot v = \mu(h) v \}$$

(può essere: $V_\mu = \{0\}$).

(può essere: $V_\mu = \{0\}$).

Sia $g \in G$: visto che H è normale, abb. $\boxed{g \cdot V_\mu \text{ è dentro un } V_{\mu'}}$ per qualche μ' carattere di H:

$$\underset{\substack{\cap \\ H}}{h} \cdot (\underset{\substack{\cap \\ G}}{g} \cdot \underset{\substack{\cap \\ V_\mu}}{v}) = g \cdot \underbrace{(g^{-1} h g)}_{\substack{\cap \\ H}} \cdot v =$$

$$= g \cdot \underbrace{\mu(g^{-1}hg)}_{\in \mathbb{C}^*} v = \mu(g^{-1}hg)(g \cdot v)$$

quindi basta prendere $\mu'(h) := \mu(g^{-1}hg)$.

Segue: la somma dei sottospazi V_μ al variare di μ fra tutti i caratteri di H è stabile per l'azione di G.

di H è stabile per l'azione di O.

Esercizio: è una somma diretta.

Rimpiazziamo V con questa somma,

cioè supponiamo

$$V = \bigoplus_{\substack{\mu \text{ carattere} \\ \text{di } H}} V_\mu .$$