Algebra Superiore lez. 15

venerdì 27 novembre 2020 10:57

Vediamo il viceversa della proposiz. della lez. scorsa.

Proposizione: Sia $\varphi : X \to Y$ appl. regolare fra varietà algebriche affini irriducibili, e supp. esista un aperto $V \subseteq Y$ denso, tale che $\varphi|_U : U \to \underline{V}$ è un isom., dove $U = \varphi^{-1}(V)$. Allora $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, è iniettiva, e induce un isom. $\mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$.

Dim.: Sappiamo che φ^* è iniettiva, perché $\varphi(X) \supseteq V \leftarrow$ denso in Y. Identifichiamo tramite φ^* l'anello $\mathcal{O}(Y)$ con un sottoanello di $\underline{\mathcal{O}(X)}$, e $\mathbb{C}(Y)$ con un sottocampo di $\mathbb{C}(X)$.

Per assurdo sia $f \in \underline{\mathbb{C}(X)} \setminus \mathbb{C}(Y)$.

$\boxed{\text{Se } f \text{ è ...dente:}}$ Possiamo assumere $f \in \mathcal{O}(X)$ / concluderemo

$\boxed{\text{Se } f \text{ è trascendente}}$: Possiamo assumere $f \in \mathcal{O}(X)$ (concluderemo che ogni elem. di $\mathcal{O}(X)$ è algebrico, quindi anche ogni elem. di $\mathbb{C}(X)$).

Consid.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(Y) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\varphi^*"] & \mathcal{O}(Y)[z] \arrow[r] & \mathcal{O}(X)
\end{tikzcd}
$$

inclusione

$$
\begin{aligned}
a \in \mathcal{O}(Y) &\longmapsto \varphi^*(a) \\
z &\longmapsto f \in \mathcal{O}(X)
\end{aligned}
$$

Abb. $\mathcal{O}(Y)[z] = \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C})$

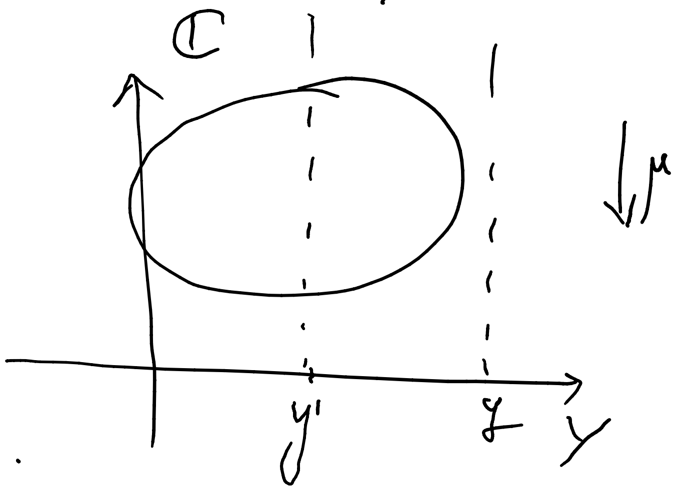
e queste applicazioni corrispondono a fattorizzare φ come

$$
X \xrightarrow{\eta} Y \times \mathbb{C} \xrightarrow{\mu} Y
$$

$$
x \longmapsto (\varphi(x), f(x))
$$

$$
(y, t) \longmapsto y
$$

Abbiamo due casi: se f è trascendente su $\mathbb{C}(Y)$, non è zero di alcun polinomio a coeff. in $\mathbb{C}(Y)$, quindi anche a coeff. a $\mathcal{O}(Y)$. In questo caso l'immagine di in $\mathcal{O}(Y)$. In questo caso l'immagine di η non è contenuta in alcun chiuso proprio di $Y \times \mathbb{C}$. Quindi l'immagine di η è densa in $Y \times \mathbb{C}$, e allora contiene un aperto denso di $Y \times \mathbb{C}$. Questo contraddice il fatto che $\varphi|_U : U \to V$ è iniettiva. Perché anche $\eta(U)$ contiene un aperto denso di $Y \times \mathbb{C}$, e un tale aperto interseca sicuramente delle fibre di μ in infiniti punti.



(gli aperti non vuoti di $\mathbb{C}$ hanno infiniti punti). Quindi: assurdo.

→ L'altro caso è quello in cui f è alg. su $\mathbb{C}(Y)$.

Oss.: per la prima parte della dim, l'estensione di campi $\mathbb{C}(X) \supset \mathbb{C}(Y)$ è algebrica.

di campi $\mathbb{C}(X) \supset \mathbb{C}(Y)$ è algebrica.
D'altronde $\mathbb{C}(X)$ è un campo f.gen. su $\mathbb{C}$, e allora l'estensione è finita.
Quindi possiamo supporre che l'estensione sia gen. da un singolo elem., il nostro $f \in \mathbb{C}(X)$. Esercizio: possiamo supporre che $f \in \mathcal{O}(X)$ (sugg.: se un'estensione finita di due campi contenenti $\mathbb{C}$ è gen. da due elem. a, b, allora è gen. da un singolo elem. c che si può prendere come comb. lin. di a, b a coeff. in $\mathbb{C}$).
Allora: $\mathbb{C}(X)$ è isomorfo al campo

$$\frac{\mathbb{C}(Y)[z]}{(p(z))}$$

dove $p(z)$ è un polinomio irriducibile in $\underline{\mathbb{C}(Y)}[z]$,

[illegible] $p(z)$ = pol. minimo di f

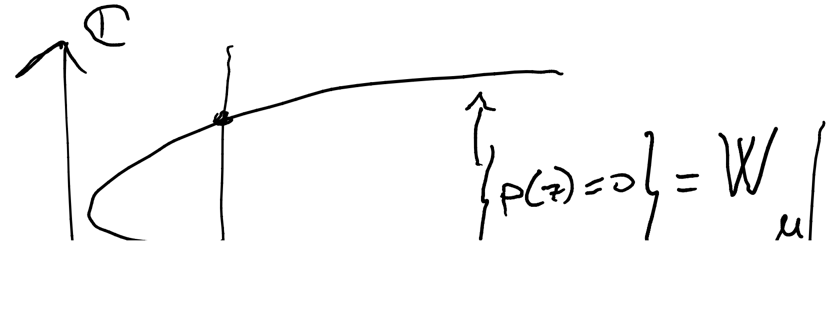
possiamo prendere $p(z)$ = pol. minimo di f.
($p(z)$ monico).

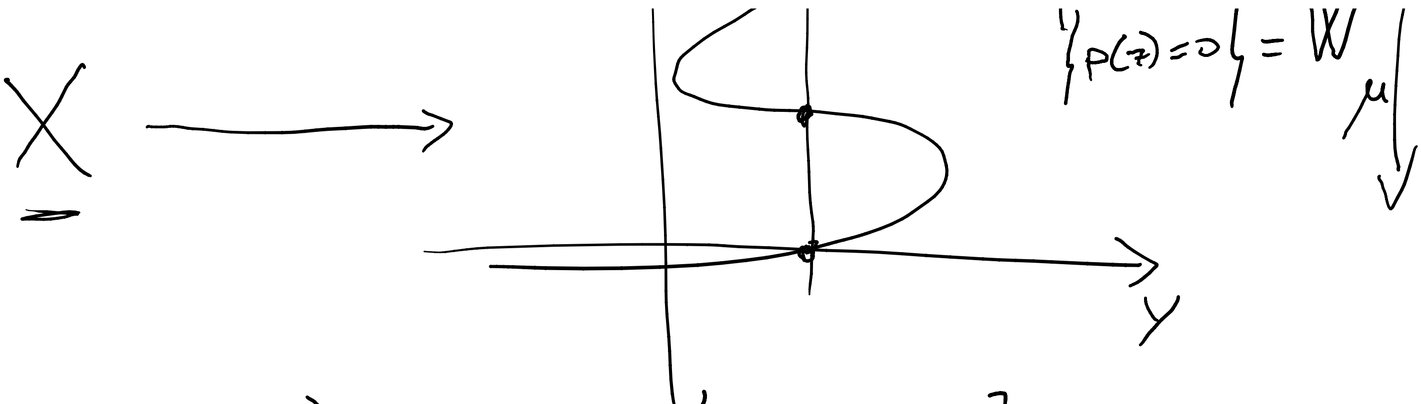
Sia F il prodotto dei denominatori dei coeff. di $P(z)$, coeff. scritti come frazioni di elt di $\mathcal{O}(Y)$. Consid. Y_F ($\neq \emptyset$) e la controimmagine

$$\varphi^{-1}(Y_F) = X_{\varphi^*(F)}.$$

Rimpiazziamo X con $X_{\varphi^*(F)}$ e Y con Y_F (soddisfano anch'essi le ipotesi della prop.),

e assumiamo che i coeff. di $p(z)$ siano in $\mathcal{O}(Y)$. Interpretando $p(z)$ come elem. di $\mathcal{O}(Y\times\mathbb{C})$, otteniamo: l'immagine di η non è densa in $Y\times\mathbb{C}$:





$$\eta(X) \subseteq W = \underbrace{\{p(z)=0\}}_{\text{in } Y\times\mathbb{C}}$$

Come nella lez. 10 (fattorizzazione

$$\underbrace{X \xrightarrow{\psi} Y\times\mathbb{C}}\ \cancel{\xrightarrow{r\ \ p} Y},$$ qui vale $r=0$)

possiamo rimpiazzare X e Y con aperti affini densi, tali che $\varphi : X \to Y$ diventa finita, quindi chiusa, e allora suriettiva.

Riscriviamo:

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & Y \\ & Y\times\mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

e φ è finita. Segue: anche η è e φ è finita. Segue: anche η è finita; infatti φ è finita, quindi

$$\mathcal{O}(X) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{m} \varphi^*(\underline{\mathcal{O}(Y)}) \cdot f_i$$

alcune f.ni in $\mathcal{O}(X)$

ma $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \subseteq \eta^*(\mathcal{O}(W))$, e allora

$$\mathcal{O}(X) = \sum_{i=1}^{m} \eta^*(\mathcal{O}(W)) \cdot f_i .$$

Quindi $\eta : X \to W$ è chiusa.

Dimostriamo che è suriettiva. Per il lemma di ieri abb.: W è irriducibile,

e $\mathbb{C}(W) \cong \dfrac{\mathbb{C}(Y)[z]}{(p(z))}$.

Allora $\mathbb{C}(X) \cong \mathbb{C}(W)$, e per la proposiz. di ieri otteniamo: X e W contengono aperti densi isomorfi tramite η.

Deduciamo: η suriettiva.

Deduciamo: φ iniettiva.

Allora troviamo un assurdo se dimostriamo: esiste un aperto non vuoto V' di Y tale che le fibre di μ su di esso hanno tutte cardinalità $d = \deg_z p(z)$. Basterà, perché questo aperto interseca V, e allora φ non potrebbe essere iniettiva da $U = \varphi^{-1}(V)$ in V.

Dimostriamo l'esistenza di V' usando il polinomio D della lezione 2.

<u>Oss.</u>: D si può prendere a coeff. interi, perché era ottenuto dal pol. C che è a coeff. interi, perché il teorema della lez. 1 vale anche per $R = \mathbb{Z}$.

In particolare, se

$$p(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_{d-1} z + a_d$$

con $a_i \in \underline{\mathbb{C}(Y)}$, allora

$$D(a_1, \dots, a_d) = 0 \quad \text{se e solo se}$$

$D(a_1, \dots, a_d) = 0$ se e solo se

$p(z)$ ha radici multiple nella chiusura algebrica $\underline{K}$ di $\mathbb{C}(Y)$.

D'altronde $p(z)$ è irriducibile in $\mathbb{C}(Y)[z]$.

$\uparrow$ non nec. $= K$

Però se $p(z)$ ha radici multiple come polinomio in $\underline{\underline{K[z]}}$, allora ha MCD $\neq 1$ con $p'(z)$. Ma $p(z), p'(z) \in \mathbb{C}(Y)[z]$ e allora avrebbero MCD $\neq 1$ anche in $\mathbb{C}(Y)[z]$: quindi $p(z)$ non ha radici multiple in K.

Allora $\underline{D}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_d) \neq 0$ come elem. di K. Ma $\underline{D(a_1, \dots, a_d)} \neq 0$ come funzione in $\mathcal{O}(Y)$. Cioè

$(Y_2)\, V' = \{ D(a_1(y), \dots, a_d(y)) \neq 0 \}$ è

$(\Leftarrow)$ $\underline{V}' = \{ D(a_1(y), .., a_d(y)) \neq 0 \}$ è

un aperto non vuoto, e per ogni $v \in V'$

il polinomio

$$z^d + a_1(v) z^{d-1} + \dots + a_{d-1}(v) z + a_0(v) \in \mathbb{C}[z]$$

ha esattamente d radici distinte,

che formano la controimmagine di $v \in V'$ in W.

Questo contraddice appunto l'iniettività di

$\varphi|_U$, e quindi è un assurdo. $\square$

Sempre per la dim. del teorema (vers. debole)

di ieri:

<u>Corollario</u>: Sia $\varphi: X \to Y$ un'appl.

reg. fra varietà affini. Supp. esista

$V \subseteq Y$ aperto denso tale che $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}:$

$\varphi^{-1}(V) \to V$ è biiettiva.

Allora esistono ap. densi $U' \subseteq X$, $V' \subseteq Y$

Allora esistono ap. densi $U' \subseteq X$, $V' \subseteq Y$ tali che $\varphi(U') = V'$ e $\varphi|_{U'} : U' \to V'$ è un isomorfismo.

<u>Dim.</u>: Ci si riduce al caso X, Y irriducibili: per ogni comp. irr. Y_i di Y esiste X_i comp. irridur. di X la cui immagine è cont. in Y_i e ne contiene un aperto. Allora $U \cap X_i$, $V \cap Y_i$ sono non vuoti, e densi in X_i, Y_i

e $\varphi(\underbrace{U \cap X_i}_{\varphi^{-1}(V)})$ contiene un aperto denso V_i di $V \cap Y_i$. Poniamo $U_i = \varphi^{-1}(V_i)$.

Allora $\varphi|_{U_i} : U_i \to V_i$ soddisfa le ipotesi, con U_i, V_i irriducibili.

Il "caso irriducibile" fornisce $U_i' \subseteq U_i$, $V_i' \subseteq V_i$ tali che $\varphi|_{U_i'} : U_i' \to V_i'$ è isom. A meno di restringere gli U_i' e V_i'

isom.. A meno di restringere gli U_i' e V_i' possiamo assumere $U_i' \cap U_j' = \emptyset$, $V_i' \cap V_j' = \emptyset$ $\forall i \neq j$, e allora basta porre $U' = \bigcup_i U_i$ e $V' = \bigcup_i V_i'$.

Il „caso irriducibile": φ^* induce isom. fra $\mathbb{C}(Y)$ e $\mathbb{C}(X)$ per la prop., e U', V' esistono per la prop. di ieri.

$\square$