Algebra Superiore lez. 14

mercoledì 2 dicembre 2020 08:10

__Esempio:__ 1) $GL(n) = G \qquad B(n) = H$

var. ~~quasi~~ proiettiva $\longrightarrow$ $G/H = \{\text{bandiere in } \mathbb{C}^n\} = X$

bandiera: $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$

dove V_i è sottosp. vettoriale di dim. i.

X ha un'azione di G data da

$$g \cdot (V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n) = (g \cdot V_0) \subset (g \cdot V_1) \subset \dots \subset (g \cdot V_n)$$

L'azione è transitiva (esercizio).

Se $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{C}^n$, allora $B(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$

è lo stabilizzatore della $\uparrow\uparrow\dots$ bandiera

$\{0\} \subset \mathrm{span}\{e_1\} \subset \dots \subset \mathrm{span}\{e_1, .., e_d\} \subset \dots \subset \mathbb{C}^n$

2) l'esempio si generalizza alle <u>bandiere parziali</u>,
cioè fissiamo una sequenza strettam. crescente
di indici $(i_1, .., i_m) = \underline{i}$ dove

$0 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$

e consid. $\left\{ \begin{array}{c} \text{bandiere parziali} \\ \text{risp. a } \underline{i} \end{array} \right\} =$

$= \left\{ V_{i_1} \subset \dots \subset V_{i_m} \;\middle|\; \begin{array}{l} V_{i_j} \text{ è sottosp. vett.} \\ \text{di dim. } i_j \end{array} \right\}$

Di nuovo $GL(n)$ ha un'azione naturale transitiva
(come prima), e consid.

$\mathrm{span}\{e_1, e_2, .., e_{i_1}\} \subset \mathrm{span}\{e_1, e_2, .., e_{i_1}, .., e_{i_2}\} \subset \dots$

$\dots \subset \mathrm{span}\{e_1, .., e_{i_m}\}$

lo stab. di questa bandiera è

$\left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{*}}^{i_1} & \overset{i_2 - i_1}{} & * \\ & \ddots & \end{pmatrix} \right\}$ dove i blocchi

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{*} & \overbrace{}^{i_2 - i_1} & & * \\ & \boxed{*} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{*} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xleftrightarrow{\quad i_1 \quad} \qquad \xleftrightarrow{\quad i_2 \quad} \qquad \xleftrightarrow{\quad i_m \quad}$$

dove i blocchi sono $(i_1 \times i_1)$, $(i_2 - i_1) \times (i_2 - i_1)$, ..., $(i_m - i_{m-1}) \times (i_m - i_{m-1})$

è un sottogruppo H che contiene $B(n)$; e G/H è una varietà proiettiva.

3) Prendiamo il caso $m = 1$, cioè sto consid. l'insieme dei sottosp. di $\mathbb{C}^n$ di dim. fissata $i_1 (= d)$. Cioè sto considerando la Graßmanniana $Gr(d, n)$ dei sottosp. di dim. d (fissata) in $\mathbb{C}^n$.

Poniamo di nuovo $G = GL(n)$, $H =$ stabilizz. di $\mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_d\}$, cioè

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{*} & * \\ \underbrace{0}_{d} & \underbrace{\boxed{*}}_{n-d} \end{pmatrix} \right\} \leftarrow H$$

$n-d$

Come nella dim. del teorema di Chevalley prendiamo un G-modulo regolare V' e un sottosp. U' di cui H è lo stabilizzatore. Qui prendiamo $V' = \mathbb{C}^n \supset U' =$

$= \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_d\}$

Allora H è lo stab. di $U = \Lambda^d U'$ in $V = \Lambda^d V'$ e U ha dim. 1. Poi si "vede" G/H come l'insieme $\{g \cdot U\}$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\underline{\Lambda^d \mathbb{C}^n})$.

Vediamo che in questo modo G/H è un *chiuso* di $\mathbb{P}(V)$, vedendo l'inclusione in coordinate.

Base di V è data dai vettori $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ dove $(i_1, \dots, i_d) = \underline{i}$ è tale che $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$.

A ogni vettore di questo tipo è associata una coordinata su V chiamiamola $x_{\underline{i}}$:

una coordinata su V, chiamiamola x_i.

Le coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ sono le x_i, e sugli aperti $\mathbb{C}^{\dim(V)}$ dentro $\mathbb{P}(V)$ le coordinate sono $\dfrac{x_i}{x_j}$.

Prendiamo V_d = sottosp. vett. di $\mathbb{C}^n$ di dim. d

Prendiamo una base $(v_1, \dots, v_d)$ di V_d, mettiamo questi vettori in colonna in una matrice $n \times d$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nd} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \hspace{2em} & \hspace{2em} \uparrow \\ v_1 \hspace{2em} & \hspace{2em} v_d \end{matrix} \end{array}$$

chiamiamo le entrate a_{ij}

in $Gr(d,n)$, V_d è il punto

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d \in \Lambda^d \mathbb{C}^n$$

Ris. per ogni altra base $(w_1, \dots, w_d)$ di

Oss.: per ogni altra base $(w_1, \ldots, w_d)$ di V_d, scrivendo $w_1 \wedge \ldots \wedge w_d =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{comb. lin.} \\ \text{di } v_1, \ldots, v_d}}{w_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comb. lin.} \\ \text{di } v_1, \ldots, v_d}}{w_d} =$$

$$(c_{11} v_1 + \ldots + c_{1n} v_n) \wedge \ldots \wedge (c_{n1} v_1 + \ldots + c_{nn} v_n)$$

si svolge il prodotto grazie alla multilinearità, e rimane un multiplo di $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

Calcoliamo in un certo senso le coordinate $\underline{x}_i$ di V_d, calcolando le $\underline{x}_i$ su $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$

Scriviamo ogni v_i come comb. lin. di $e_1, \ldots, e_n$

$$v_i = \underline{a_{1i} e_1 + \ldots + a_{ni} e_n}$$ ed esplicitiamo il prodotto $\underline{v_1 \wedge \ldots \wedge v_d}$: vogliamo trovare il termine che è un multiplo di $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$.

Sarà del tipo

$$q_{\underline{i}}(\underline{A})\, \underline{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}}$$

dove $q_{\underline{i}}(A) \in \mathbb{C}$. Abb.:

1) $q_{\underline{i}}(A)$ dipende solo dal minore $d \times d$ di A che coinvolge le righe $i_1, \dots, i_d$

2) $q_{\underline{i}}(A) = 1$ se questo minore è I_d

3) $q_{\underline{i}}(A)$ è alterna nelle colonne di questo minore (scambiando due colonne $q_{\underline{i}}(A)$ cambia segno)

4) $q_{\underline{i}}(A)$ è multilineare nelle colonne (esercizio: dim. bene)

Segue: $q_{\underline{i}}(A)$ = determinante del minore $d \times d$ di A che coinvolge le righe $i_1, \dots, i_d$.

Quindi $\underset{\underset{\det(\dots)}{\parallel}}{q_{\underline{i}}(A)}$ sono le coord. risp. alla base scelta per $\Lambda^d \mathbb{C}^n$. Al sottosp. $V_d \in Gr(d,n)$ associamo il punto in $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathbb{C}^n)$ che ha associamo il punto di $\mathbb{P}(\Lambda^d\mathbb{C}^n)$ che ha coord. omogenee $q_{\underline{i}}(A)$ per ogni $\underline{i}$.

Oss.: il valore $q_{\underline{i}}(A)$ dipende non solo da V_d ma dalla scelta della base $(v_1,..,v_d)$, ma ad. es. i quozienti $\dfrac{q_{\underline{i}}(A)}{q_{\underline{j}}(A)}$ dip. solo da V_d e non dalla base.

Queste coordinate omogenee su $Gr(d,n)$ si chiamano coord. di Plücker. Si possono esplicitare delle relaz. soddisfatte da queste coord. per tutti i punti della Graßmanniana, che def. $Gr(d,n)$ come chiuso di $\mathbb{P}(\Lambda^d\mathbb{C}^n)$.

Non le vediamo, ma dim. che $Gr(d,n)$ è un chiuso di $\mathbb{P}(\Lambda^d\mathbb{C}^n)$. Dim. allora che

$$Gr(d,n) \cap \underbrace{\mathbb{P}(\Lambda^d\mathbb{C}^n)_{x_{\underline{i}}}}_{\mathbb{C}^{\dim(\Lambda^d\mathbb{C}^n)=N}} \text{ è un chiuso}$$

di $\mathbb{C}^N$ per ogni $\underline{i}$. Per semplicità assumiamo $i_1 = 1, \ldots, i_d = d$. Se V_d è in questa intersez., posso scegliere A tale che

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{d+1,1} & \cdots & \cdots & a_{d+1,d} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,d} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} d \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array}$$

Le coord. su questo $\mathbb{C}^N$ sono $\dfrac{x_{\underline{j}}}{x_{\underline{i}}} = y_{\underline{j}}$

dove $\underline{i} = (1, \ldots, d)$, per ogni scelta di $\underline{j} \neq \underline{i}$.

Allora $y_{\underline{j}}(V_d) = \dfrac{x_{\underline{j}}(A)}{x_{\underline{i}}(A)} = \dfrac{q_{\underline{j}}(A)}{\underbrace{q_{\underline{i}}(A)}_{=1}}$ ← det. del minore....

↑ come punto di $\mathbb{C}^N$

Per dim. che $Gr(d, n) \cap \mathbb{C}^N$ è un chiuso di $\mathbb{C}^N$, oss.:

le entrate $a_{d+1,1}, \ldots, a_{n,d}$ determinano

...

le entrate $a_{d+1,1}, \ldots, a_{n,d}$ determinano

univocam. il sottospazio V_d, a ogni scelta

di valori per queste entrate corrisponde un sottosp.

V_d, e queste entrate compaiono come

<u>alcune</u> delle coordinate $y_{\underline{j}}$ (a meno del segno). Ad es.

se scelgo $\underline{j} = (1, 2, \ldots, d-1, d+1)$ ottengo

$$q_{\underline{j}}(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{d+1,1} & \cdots & & & a_{d+1,d} \end{pmatrix} = a_{d+1,d}.$$

Allora $\underbrace{Gr(d,n) \cap \mathbb{C}^N}$ è l'insieme dei

punti di coordinate

$(a_{d+1,1}, \ldots, a_{n,d}, (\text{polinomi in } a_{d+1,1}, \ldots, a_{n,d}))$

Cioè è un caso del tipo seguente:

$$\left\{ \left(z_1, \dots, z_k, P_1(z_1,\dots,z_k), \dots, P_r(z_1,\dots,z_k) \right) \;\middle|\; z_1,\dots,z_k \in \mathbb{C},\ P_1,\dots,P_r \text{ polinomi} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{k+r}$$

Questo è sempre un chiuso di $\mathbb{C}^{k+r}$, ha equazioni

$$\begin{cases} z_{k+1} = P_1(z_1,\dots,z_k) \\ z_{k+2} = P_2(z_1,\dots,z_k) \\ \vdots \\ z_{k+r} = P_r(z_1,\dots,z_k) \end{cases}$$

Allora $Gr(d,n) \cap \mathbb{P}(\Lambda^d \mathbb{C}^n)_{x_{\underline{i}}}$ è un chiuso di $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathbb{C}^n)_{x_{\underline{i}}}$ per ogni $\underline{i}$, e allora $Gr(d,n)$ è un <u>chiuso</u> di $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathbb{C}^n)$, cioè è una varietà proiettiva.

Abb. visto dunque una struttura di var. proiettiva su G/H, G gruppo alg. lineare, proiettiva su G/H, G gruppo alg. lineare, H sgr chiuso. Questa struttura è unica, grazie alla seguente proprietà universale:

<u>Teorema 1</u>: Nelle ip. precedenti, spp. che G/H sia dotato di una struttura di var. quasi proiettiva, tale che

$$\pi : G \longrightarrow G/H \quad g \longmapsto gH$$

sia regolare. Allora, per ogni appl. regolare $\varphi : G \longrightarrow \underline{Z}$ dove Z è quasi proiettiva, e φ è costante sulle classi laterali sinistre di H, <u>esiste</u> $\psi : G/_H \to Z$ tale che $\varphi = \psi \circ \pi$ e ψ è regolare.

$gH \mapsto \varphi(g)$

Non dimostriamo il teorema, dimostriamo però una versione più debole:

Teorema 2: Nelle ip. del teorema precedente, supponiamo Z sia una G-varietà regolare, e φ sia G-equivariante. Allora esiste ψ come nel teorema precedente.

Per precisare l'enunciato, ricordiamo il prodotto di varietà quasi proiettive. Per costruire $X \times Y$ dove $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ dovrei consid. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, che in generale non è $\mathbb{P}^{n+m}$ (in modo naturale). Il prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è in modo naturale una varietà proiettiva, per:

Proposizione: L'applicazione

$$S: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

$$([x_0,..,x_n],[y_0,..,y_m]) \longmapsto [x_0y_0, x_1y_0,..,x_ny_0, x_0y_1,..$$
$$..,x_ny_1,..,x_0y_m,..,x_ny_m]$$

è ben definita, è una biiezione fra $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e la sua immagine, che è un chiuso di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$.

<u>Dim.</u>: L'immagine è def osservando che

$$x_i y_j x_r y_s = x_i y_s x_r y_j$$

e quindi chiamando z_{ij} le coord. su $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ per ogni $i \in \{0,..,n\}$, $j \in \{0,..,m\}$

allora l'immagine di S è nel chiuso def. dalle eq. $z_{ij} z_{rs} = z_{is} z_{rj}$.

<u>Esercizio</u>: dim. che l'immagine è uguale a questo chiuso, e che S è una biiezione sull'immagine.

$\square$

S si usa per dotare $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ di struttura di var. proiettiva, e dati localm. chiusi $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$, allora $S(X \times Y)$ è localmente chiuso (esercizio).

In questo modo posso definire una G-varietà quasi proiettiva Z come una varietà quasi proiett. con un'azione di G tale che l'appl. corrisp.

$$G \times Z \longrightarrow Z \quad \text{è regolare.}$$

Per la dim. del teorema 2, facciamo altri richiami di geom. algebrica, sulle appl. regolari fra varietà affini, <u>biiettive</u> se ristrette ad aperti densi (idea: avremo

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr] & \\ G/H \arrow[rr, dashed, "\psi(?)"'] & & Z \end{tikzcd}$$

η G-equivar. biiettiva)

Iniziamo con una prop. sulle varietà irriducibili.

Iniziamo con una prop. sulle varietà irriducibili:

Prop.: Siano X, Y var. affini irriducibili, e $\varphi : X \to Y$ regolare. Supp. φ^* iniettiva (cioè l'immagine è densa in Y), e che φ^* induca un isom. $\mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$. Allora esiste $V \subseteq Y$ aperto denso, tale che

$\varphi|_U : U \to V$ è isom., dove $U = \varphi^{-1}(V)$.

Dim.: Siano $f_1, \dots, f_m$ generatori di $\mathcal{O}(X)$, sono elem. di $\underline{\mathbb{C}(X)}$, quindi esistono

$a_i, \underset{\neq 0}{b_i} \in \mathcal{O}(Y)$ tali che

$$f_i = \frac{\varphi^*(a_i)}{\underbrace{\varphi^*(b_i)}} \qquad \text{(come elt. di } \underline{\mathbb{C}(X)}\text{)}$$

Sia $b = b_1 \cdots b_m$, $B = \varphi^*(b)$, e

$Y_b \subseteq Y$ è un aperto non vuoto quindi denso (tutto perché Y è irriducibile), e $X_B = \varphi^{-1}(Y_b)$.

Consid. $\varphi|_{X_B} : X_B \to Y_b$. E' un isom., perché $(\varphi|_{X_B})^* : \mathcal{O}(Y_b) \longrightarrow \mathcal{O}(X_B)$

è iniettiva ($\varphi(X_B)$ è denso in Y_b), e anche suriettiva, perché $\mathcal{O}(X_B)$ è generato da $f_1, \dots, f_m$ che sono nell'imm. di $(\varphi|_{X_B})^*$:

$$f_i = \varphi^*\left(a_i \cdot \frac{1}{b_i}\right)$$

regolari su Y_b

e anche da $\frac{1}{B} = \varphi^*\left(\frac{1}{b}\right)$.

reg. su Y_b

Segue: $\varphi|_U : U \to V$ è isom., ponendo $U = X_B$, $V = Y_b$. $\square$

$U = X_B$, $V = Y_b$. $\square$

Sempre per il teorema 2:

<u>Lemma</u>: Sia Y affine irriducibile, e $p(z)$ un polinomio monico in $\mathcal{O}(Y)[z]$.

Sia $W \subseteq Y \times \mathbb{C}$ definita da $p(z) = 0$. Se $p(z)$ è irriducibile in $\mathbb{C}(Y)[z]$, allora W è <u>irriducibile</u>, e il suo ideale in $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{C})$ è gen. da $p(z)$.

<u>Dim.</u>: Dim. che $I = I_{Y \times \mathbb{C}}(W)$ è primo, siano $f_1(z), f_2(z) \in \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}) = \mathcal{O}(Y)[z]$ tali che $f_1(z) f_2(z)$ si annulla su W.

Per il Nullstellensatz, una potenza positiva $f_1(z)^d f_2(z)^d$ è divisibile per $p(z)$.

$f_1(z)^d f_2(z)^d$ è divisibile per $p(z)$.

Facciamo la div. con resto in $\mathbb{C}(Y)[z]$:

$$f_i(z) = p(z)\, q_i(z) + r_i(z)$$

grado in z minore di quello di $p(z)$

Sostituendo in $f_1(z)^d f_2(z)^d$, otteniamo

$$(\text{polinomio}) \cdot p(z) + r_1(z)^d r_2(z)^d = f_1^d f_2^d$$

In $\mathbb{C}(Y)[z]$, $p(z)$ è primo.

Ora: $p(z)$ divide $f_1^d f_2^d$, quindi divide $r_1^d r_2^d$, quindi divide r_1 opp. r_2.

Per il grado in z, $r_1 = 0$ opp. $r_2 = 0$.

Allora f_1 opp. f_2 è divisibile per $p(z)$.

Questo dim. che W è irriduc., e anche che l'ideale è gen. da $p(z)$.

$\square$

l'ideale è gen. da $p(z)$.

$\square$