Algebra Superiore lez. 13

giovedì 26 novembre 2020 14:54

Richiami: geometria algebrica proiettiva

"Spazio ambiente": $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

E' definita la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$: i chiusi sono il luogo degli zeri di polinomi nelle variabili $x_0, \dots, x_n$ di $\mathbb{P}^n$, si richiede che siano polinomi omogenei. Infatti dato $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n$ e un pol. omogeneo $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, non è ben definito in generale il valore di f in $[a_0, \dots, a_n]$, però è ben definito se $[a_0, \dots, a_n]$ è uno zero di f (cioè se $[b_0, \dots, b_n] = [a_0, \dots, a_n]$

$\Downarrow$ $f(a_0, \dots, a_n) = 0 \Longleftrightarrow f(b_0, \dots, b_n) = 0$)

allora $f(a_0, \dots, a_n) = 0 \iff f(b_0, \dots, b_n) = 0$)

Def.: I chiusi di $\mathbb{P}^n$ si chiamano varietà proiettive, e i localmente chiusi si chiamano varietà quasi proiettive.

Oss.: Se $f = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogenei dello stesso grado, e $b(a_0, \dots, a_n) \neq 0$, allora il valore di f è ben definito sul punto $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n$.

Def.: Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ loc. chiuso. Si definisce l'anello delle funzioni regolari $\mathcal{O}(X)$ nel modo seguente: $f \in \mathcal{O}(X)$ se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ ed esiste un ricoprimento se $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ed esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X e polinomi $a_i, b_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogenei, e

$\forall i$: a_i, b_i devono avere lo stesso grado, b_i non si annulla mai su U_i, e

$$f|_{U_i} = \frac{a_i}{b_i}$$

sfruttando il fatto che una funzione di questo genere è ben definita su tutti i punti di U_i.

(att.: né a_i, né b_i in generale sono funzioni definite su U_i)

<u>Oss.:</u> 1) Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ è ricoperto da $n+1$ aperti che sono "copie" di $\mathbb{C}^n$, cioè quelli del tipo $\{x_i \neq 0\}$ per

cioè quelli del tipo ...

$i \in \{0, \dots, n\}$. La topologia indotta da quella di Zariski su $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{C}^n$ è proprio la top. di Zariski su $\mathbb{C}^n$, passando da polinomi omogenei in $x_0, \dots, x_n$ a polinomi qualsiasi in $\underbrace{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n}$ ponendo $x_i = 1$, e viceversa passando da un polinomio qualsiasi nelle $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ a un polinomio omogeneo che ha anche x_i (moltiplicando ogni monomio per una potenza opportuna di x_i).

Es: $f = \boxed{x_0^2 x_1 + x_2 x_3^2}$ in $\mathbb{P}^4$

$\mathbb{C}^4 = \{[a_0, a_1, a_2, a_3] \mid a_3 \neq 0\}$

Il chiuso def. da f interseca questo $\mathbb{C}^4$ nel chiuso def da $x_0^2 x_1 + x_2 = 0$

d) Se X è localm. chiuso in un diagrest...

2) Se X è localm. chiuso in uno di questi $\mathbb{C}^n$ dentro $\mathbb{P}^n$, allora è una varietà quasi affine dentro $\mathbb{C}^n$ (vecchia def.), e una varietà quasi proiettiva (def. di oggi).

Si dimostra facilmente: le due definizioni di $\underline{\mathcal{O}(X)}$ date coincidono (esercizio).

<u>Def</u>: Siano X, Y varietà quasi proiettive, un'applicazione $\varphi : X \longrightarrow Y$ si dice <u>regolare</u> se esistono ricoprimenti $\{U_i\}$ di X e $\{V_j\}$ di Y tali che U_i e V_j sono tutti aperti affini (cioè aperti risp. in X e Y, e sono varietà affini), e $\forall i$ $\varphi(U_i)$ è contenuto in qualche V_j, e $\varphi|_{U_i} : U_i \longrightarrow V_j$ è un'applicazione regolare fra varietà affini.

Oss.: Se X e Y sono varietà affini in qualche $\mathbb{C}^n$ dentro $\mathbb{P}^n$ (nel senso di prima), allora la definizione di applicazione regolare è la stessa di quella che avevamo dato fra varietà affini (esercizio).

Applicazione: Corollario al teo. di Chevalley:

Siano G gruppo alg. lineare, $H \leq G$ sottogr. chiuso, e siano V, U come nel teorema di Chevalley. Allora G/H si identifica all'insieme $\{g \cdot U\} \subseteq \mathbb{P}(V)$, che è localmente chiuso in $\mathbb{P}(V)$, inoltre

$$\underset{\sim}{\pi}: G \longrightarrow G/H$$

$$g \longmapsto g \cdot U \in \mathbb{P}(V)$$

$$g \longmapsto g\cdot U \in \mathbb{P}^1(V)$$

è regolare. e tutti i sottosp. del tipo $g\cdot U$

<u>Dim.:</u> Consideriamo $U^\vee$ come punti di $\mathbb{P}(V)$.

l'applicazione $G/H \longrightarrow \{g\cdot U \mid g\in G\} (\subseteq \mathbb{P}(V))$ è

$$gH \longrightarrow \underline{g\cdot U}$$

ben definita, e biiettiva. Quindi G/H in questo modo è in biiezione con $\{g\cdot U\}$.

Per dim. il resto: scegliamo $\underline{u} \in U \setminus \{0\}$.

Allora l'applicazione π si può scrivere come

$$\pi: G \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$g \longmapsto [g\cdot u] \leftarrow$$

Dim. che π è un'applicazione regolare fra varietà quasi proiettive.

Consideriamo π "in coordinate": siano

$u \quad u$ coordinate su V e consid. l'applicaz

$y_0, \dots, y_m$ coordinate su V e consid. l'applicaz.

$g \longmapsto g \cdot u$. È un'applicaz. regolare $G \to V$,

cioè esistono funzioni reg. $a_0, \dots, a_m \in \mathcal{O}(G)$

tali che $g \cdot u = (a_0(g), \dots, a_m(g))$.

Prendiamo $\underline{\mathbb{C}^m} \subseteq \mathbb{P}(V)$ come l'aperto

dove $y_i \neq 0$. Consid. $G_{a_i} = \{a_i \neq 0\}$

Allora $\pi|_{G_{a_i}} : G_{a_i} \longrightarrow \mathbb{C}^m \subseteq \mathbb{P}(V)$.

inoltre G_{a_i} è un aperto affine di G,

e $\pi|_{G_{a_i}}$ in coordinate è:

$$g \longmapsto \left(\frac{a_0(g)}{a_i(g)}, \dots, \frac{a_{i-1}(g)}{a_i(g)}, \frac{a_{i+1}(g)}{a_i(g)}, \dots, \frac{a_m(g)}{a_i(g)} \right)$$

(le coord. su questo $\mathbb{C}^m$ sono $\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots$

(le coord. su questo $\mathbb{C}^i$ sono $\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_m}{y_i}$).

Segue: π è applicaz. regolare fra varietà quasi proiettive. Rimane da dimostrare: $\mathrm{Im}(\pi)$ è localmente chiusa. Vale: l'immagine di $\pi|_{G_{a_i}}$ contiene un aperto denso della sua chiusura nel rispettivo $\mathbb{C}^m$, $\forall i$.

Allora l'immagine di π contiene un aperto denso W della sua chiusura in $\mathbb{P}(V)$, inoltre

$$\mathrm{Im}(\pi) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g \cdot W}$$

è W „traslato" per un autom. lineare di V, quindi è sempre aperto nella chiusura di $\mathrm{Im}(\pi)$.

e segue: $\mathrm{Im}(\pi)$ è aperta nella sua chiusura.

$\square$

$\square$

Esempi: 1) $G = GL(2)$, $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}_{\in GL(2)}$

Nel teorema di Chevalley, possiamo prendere $V = \mathbb{C}^2$ (az. usuale).

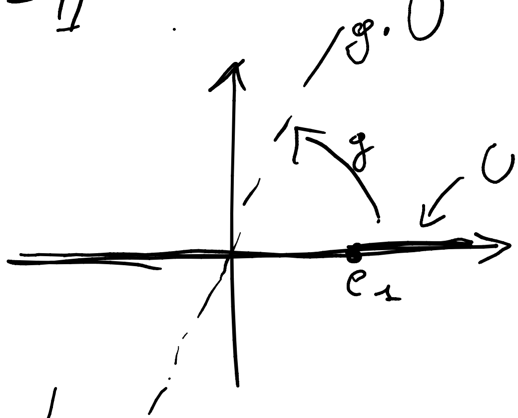
Allora $H = \{ g \cdot \overbrace{[e_1]}^{U} = [e_1] \}$

(e_1, e_2) base canonica

G/H è una varietà quasi proiettiva, localm. chiusa in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1$.

In questo caso

$\{g \cdot U\} = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$



Come prima, π in coordinate:

$$\pi : G \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot e_1 \right] = [a, c]$$

$a_1 \in \mathcal{O}(G)$

$a_0 \in \mathcal{O}(G)$

$$G_0 \longrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1 \leftarrow \text{coordinate } [y_0, y_1]$$

$G_{a_0} \longrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1 \leftarrow$ coordinate $[y_0, y_1]$

$\uparrow$ coordinate $\dfrac{y_1}{y_0}$

è $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \dfrac{c}{a}$ ($a \neq 0$)

invece $G_{a_1} \longrightarrow \mathbb{C}$ è $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \dfrac{a}{c}$. ($c \neq 0$)

2) $G = GL(2)$ $H = H(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$

Usiamo $\mathbb{C}^2$ come prima,

si potrebbe tentare con $V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$

base (e_1, e_2) (e_1', e_2')

Prendiamo $U = \mathbb{C} \cdot (e_1 + e_2')$

e_1 nel primo $\mathbb{C}^2$, e_2' nel secondo $\mathbb{C}^2$

Lo stabilizzatore di $\mathbb{C}(e_1 + e_2')$ è:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{g=} \cdot (e_1 + e_2') = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot e_1 \right) + \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot e_2' \right) =$$

U $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\begin{pmatrix} & \\ c & d \end{pmatrix} \cdot e_2' \right) =$

$$= (ae_1 + ce_2) \underline{\pm} (be_1' + de_2') = \dots$$

Se $\in U$ allora $c = b = 0$: $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

però devo anche avere $a = d$

$$\dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } c=b=0}}{=} ae_1 + de_2'$$

Allora lo stabilizzatore di U <u>non è</u> H.

Scegliamo allora $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ e

$U = \mathbb{C} \cdot (e_1 \otimes e_2')$.

Allora $g \cdot (\underline{e_1 \otimes e_2'}) = \cancel{ae_1 \otimes be_1'} + ae_1 \otimes de_2' +$
$+ \cancel{ce_2 \otimes be_1'} + \cancel{ce_2 \otimes de_2'}$.

Se $g \cdot U = U$ allora $ab = 0$, $cb = 0$, $cd = 0$

Allora $b = 0$, $c = 0$, ma a, d sono

arbitrari $\neq 0$, perché $ae_1 \otimes de_2' = \underline{ad} \cdot (e_1 \otimes e_2')$

Allora lo stab. di U è proprio H.

Allora lo stab. di v è proprio H.

Quindi G/H si realizza come localm. chiuso di $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}_{\text{ha dim. } 4})$

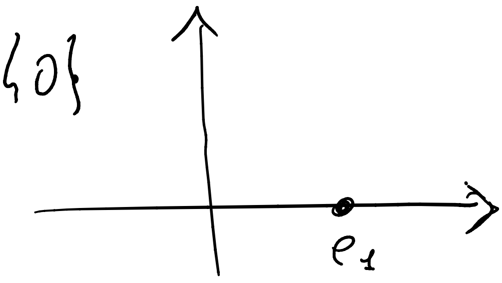
3) $G = SL(2)$ $\quad H = U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

H è lo stabilizzatore di $e_1 \in \mathbb{C}^2$.

Allora G/H lo possiamo vedere come la G-orbita di e_1 in $\mathbb{C}^2$

Questa G-orbita è $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

perché dato $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$



esiste sempre una matrice in $SL(2)$ del tipo $\begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix}$. In questo caso allora G/H è quasi affine.

Lo stab. di $\mathbb{C} \cdot e_1$ in $SL(2)$ non è H (è più grande), quindi cerchiamo un altro V e (è più grande), quindi cerchiamo un altro V e U come nel teorema. Usiamo:

$$V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$$

G-modulo banale

e prendiamo $U = \mathbb{C}\cdot\left(\underset{\mathbb{C}^2}{\underset{\cap}{e_1}} + \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{1}}\right)$

Adesso: si verifica facilmente che H è lo stabilizzatore di U; infatti $g \in G$ agisce su $e_1 + 1$ come $g\cdot(\underline{e_1 + 1}) =$

$$= (g\cdot e_1) + 1$$

Se $(g\cdot e_1)+1$ è un multiplo scalare di $e_1 + 1$, allora quello scalare è $= 1$.

Allora g stabilizza $e_1 \iff$ stabilizza U.

Ovviamente G/H visto in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})$ è sempre isomorfo a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (esercizio).

Allora

Ovviamente G/H visto in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C})$ è sempre isomorfo a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (esercizio).