Algebra Superiore lez. 12

mercoledì 25 novembre 2020 07:56

$G \leq GL(\underline{n})$ autoaggiunto

Possiamo considerare anche V (di dim. finita) con un prodotto hermitiano $\langle -, - \rangle$, allora è definita A^* per ogni $A \in GL(V)$, con la formula $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle \quad \forall v, w \in V$.

Come la lezione scorsa, si conclude:

se $g^* \in G \quad \forall g \in G \leq GL(V)$ (G si dice anche in questo caso <u>autoaggiunto</u>) allora V è completam. riducibile.

<u>Corollario</u> (del lemma della lez. precedente): Se

$G \leq GL(V)$ è autoaggiunto, allora

$V^{\otimes m}$ è completamente riducibile $\forall m$ intero positivo.

intero positivo.

<u>Dim.:</u> Anche $V^{\otimes m}$ è di Hilbert:

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m , w_1 \otimes \dots \otimes w_m \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_m, w_m \rangle$$

(per dim. che è non degenere basta calcolare la matrice di questa forma nella base di vettori $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$ dove $(e_1, \dots, e_n)$ è base ortonormale di V).

Ricordiamo inoltre: G agisce su $V^{\otimes m}$ come

$$g \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = (g \cdot v_1) \otimes \dots \otimes (g \cdot v_m)$$

L'immagine di G in $GL(V^{\otimes m})$ è un sottogruppo (chiuso) di $GL(V^{\otimes m})$ ed è autoaggiunto: infatti si verifica facilmente che l'immagine di g^* è l'aggiunto dell'immagine di g, in simboli: $(g^*)^{\otimes m} = (g^{\otimes m})^*$. $\square$

Corollario: Se $G \subseteq GL(n)$ è autoaggiunto,

Corollario: Se $G \subseteq GL(n)$ è autoaggiunto,
gr. alg. lineare

allora è linearmente riduttivo.

Dim.: Sia U un G-modulo regolare, poniamo $V = \mathbb{C}^n$, allora per l'ultimo teorema visto, U è un quoziente di un sottomodulo di

$$V^{\otimes m_1} \oplus \dots \oplus V^{\otimes m_s}$$

per certi interi positivi $s, m_1, .., m_s$.
Questa somma diretta è completam. riducibile, e così ogni suo sottomodulo, e ogni quoziente (esercizio) di ogni sottomodulo. $\square$

Esempio: Sono autoaggiunti, quindi linearmente riduttivi, i gruppi:

$GL(n)$ $SL(n)$ $O(n, \mathbb{C})$ $SO(n, \mathbb{C})$

$GL(n)$, $SL(n)$, $O(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$

e $Sp(2n,\mathbb{C})$, definito come:

$$Sp(2n,\mathbb{C}) = \{ A \in GL(2n) \mid AJA^t = J \}$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array}$$

Dimostrazione del teorema della lezione precedente.

Per il lemma precedente al teorema, $\underline{U}$ è isomorfo a un sottomodulo di $\mathcal{O}(G)^n$ per un n intero positivo. Ricordiamo: $\boxed{G \subseteq M_d}$ (scegliamo una base di V, e $V \cong \mathbb{C}^d$) come localm. chiuso, precisam. è un chiuso di M_d a cui togliamo i punti con det. $= 0$.

Le sue funzioni regolari sono generate dalle funzioni "entrate della matrice in M_d" ristrette a G

funzioni "entrate della matrice in M_d" ristrette a G e da $\dfrac{1}{\det(x)|_G}$. Chiamiamo $A \subseteq \mathcal{O}(G)$ l'algebra generata dalle prime, cioè dalle entrate della matrice.

Abbiamo allora: U è isomorfo ad un sottomodulo di $\left(\underbrace{A \cdot \dfrac{1}{\det(x)|_G^D}}\right)^n$ per qualche D intero positivo.

Allora $U \otimes \mathbb{C}_D$ è isomorfo a un sottomodulo di A^n, basta riguardare come abb. definito l'omomorfismo iniettivo $U \longrightarrow \mathcal{O}(G)^n$.

<u>Oss.:</u> A è la restrizione a G delle funzioni regolari su M_d, cioè delle funzioni regolari su $End(V)$.

Quindi a meno di isomorfismi $U \otimes \mathbb{C}_D \subseteq A^n$, e A^n è un quoziente di $\mathcal{O}(End(V))^m$.

Qui stiamo considerando $\mathcal{O}(G)$ e $\mathcal{O}(\mathrm{End}(V))$ come G-moduli, tramite la traslazione a destra.

Consideriamo $\mathrm{End}(V)$ come G-modulo con la traslazione a destra: è isomorfo a $(V^*)^{d}$, $d = \dim(V)$.

Infatti

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{End}(V)}}{A} \cdot \underset{\substack{\cap \\ G}}{g^{-1}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

come matrice di M_d

dove $\boxed{r_i = (i\text{-esima riga di } A) \cdot g^{-1}}$

e i vettori riga si possono identificare con gli elem. di V^*, e il "prodotto" $\eta \in V^*$ per $v \in V$ è il prodotto riga per colonna.

Inoltre g agisce su $\eta \in V^*$ come

$$g \cdot \eta = \underline{\eta(g^{-1} \cdot -)}$$

quindi effettivamente posso vedere $\mathrm{End}(V)$ con quindi effettivamente posso vedere $End(V)$ con quest'operazione come la somma diretta di d copie del G-modulo V^*.

Quindi, come G-modulo, $\mathcal{O}(End(V))$ è isomorfo a $\mathcal{O}((V^*)^d)$.

D'altronde $\mathcal{O}((V^*)^d) =$

$$= \mathcal{O}(\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{d \text{ copie}})$$

e $\boxed{\mathcal{O}(V^* \times \dots \times V^*)_{\leq a}} = \underbrace{\mathcal{O}(V^*)_{\leq a} \otimes \dots}_{d \text{ copie}}$

$\otimes\, \mathcal{O}(V^*)_{\leq a}$

Inoltre $\mathcal{O}(V^*)_a = S^a((V^*)^*) =$

polinomi omogenei di grado a

$= S^a(V)$ ← quoziente di $V^{\otimes a}$

$= S^{\cdot}(V)^{\leq \cdot}$

In conclusione: dato $\mathcal{O}(\mathrm{End}(V))^n$, esiste una somma diretta (al più numerabile) di potenze tensoriali di V:

$$\underbrace{V^{\otimes b_1} \oplus V^{\otimes b_2} \oplus \dots}_{}$$

e un omomorfismo suriettivo di G-moduli da questa somma in $\mathcal{O}(\mathrm{End}(V))^n$.

D'altronde $U \otimes \mathbb{C}_D \subseteq \mathcal{O}(\mathrm{End}(V))^n$, e basta scegliere abbastanza addendi nella somma qui sopra in modo tale che l'immagine contenga $U \otimes \mathbb{C}_D$. Allora l'immagine inversa di $U \otimes \mathbb{C}_D$ è un sottomodulo di questa somma diretta finita, e $U \otimes \mathbb{C}_D$ è un quoziente di questo sottomodulo.

$\square$

SPAZI OMOGENEI

Consideriamo azioni di gruppi non lin. riduttivi su varietà affini. L'unico caso, essenzialm., che si riesce a studiare in generale è l'azione per traslaz. a destra o sinistra di un sottogruppo chiuso $\underline{H}$ su $\underline{G}$ gruppo alg. affine.

Il quoziente insiemistico è G/H (opp. $H\backslash G$) l'insieme delle classi laterali.

Esempio: $G = B(n)$, $H = \underline{U(n)}$ agisce per moltiplicazione a destra.

Anche se H non è lin. riduttivo, il quoziente si può studiare facilmente:

ogni $g \in G$ si scrive in modo unico come $t \cdot h$ dove t è diagonale e $h \in H$ basta prendere gli elem.

$h \in H$ basta prendere gli elem. sulla diagonale di g:

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

poniamo $t = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

allora $t^{-1} g$ ha entrate tutte $= 1$ sulla diagonale, quindi poniamo $h = t^{-1} \cdot g$, abb. $g = \underline{t} \cdot h$ e $h \in H$.

Oss. anche che data g, t e h sono univocam. determinate.

Allora possiamo "realizzare" il quoziente insiemistico come

$$G \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n$$

$\Big(a_{11} \; * \quad *$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

Inoltre questo è proprio il quoz. categorico $G//H$ come l'abbiamo visto per la GIT.

Infatti: ogni funzione H-invariante a destra su G dipende solo da t della decomp. $g = t \cdot h$, quindi è un polinomio di Laurent nelle entrate sulla diagonale di g, e viceversa ogni tale polinomio di Laurent si può considerare come una f.ne su G, H-invariante:

$$\mathbb{C}[G]^H = \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n).$$

Vogliamo studiare questi quozienti G/H con strumenti diversi, dove G è un gruppo

[illegible]

algebrico lineare, e H è un sottogruppo chiuso.

<u>Teorema</u> (Chevalley): Siano G e H come sopra, allora esiste un G-modulo regolare V e un sottospazio $U \subseteq V$ di dimensione 1 tali che H è lo stabilizzatore di U, cioè

$$H = \{ g \in G \mid g \cdot U = U \}$$

<u>Dim</u>: Innanzi tutto troviamo V', U' come V e U, ma con U' di dim. qualsiasi.

Consid. $\mathcal{O}(G)$ e l'ideale $I_G(H)$ di H in G. Possiamo trovare un sottospazio vettoriale $U' \subseteq I_G(H)$ di dim. finita, che genera $I_G(H)$ come dim. finita, che genera $I_G(H)$ come ideale. Consid. $\mathcal{O}(G)$ come G-modulo per traslazione a destra, è loc. regolare, quindi $U' \subseteq V'$ dove V' è un sottomodulo regolare di $\mathcal{O}(G)$.

Vogliamo dim. che $H = \{ g \in G \mid g.U' = U' \}$.

Per questo osserviamo: G è una varietà affine, e allora $\mathcal{O}(G)$ è localmente regolare anche come H-modulo.

Quindi tutti i sottospazi $h.U'$ sono tutti contenuti in un <u>sottospazio vettoriale</u> di dim. finita di $\mathcal{O}(G)$, H-stabile.

Inoltre sono tutti contenuti in $I_G(H)$, perché se $f \in I_G(H)$, allora

$$(h.f) = f(\underline{- \cdot h})$$

è in H se "$-$" è in H

appartiene a $I_G(H)$.

Quindi, a meno di sostituire U' con un sottosp. di $I_G(H)$ più grande, poss. assumere che U' sia stabile per H.

Allora l'inclusione $H \subseteq \{ g \in G \mid g \cdot U' = U' \}$ è vera, dimostriamo "$\supseteq$".

Sia $g \in G$ con $g \cdot U' = U'$. Visto che U' genera l'ideale $I_G(H)$, allora

$$g \cdot I_G(H) = I_G(H).$$

Per dim. che $g \in H$, prendiamo una $f \in I_G(H)$ qualsiasi, e calcoliamo $f(g)$:

$$f(g) = f(\underset{\substack{\text{elt}\\ \text{neutro}}}{e}\, g) = (\underbrace{g \cdot f}_{\in I_G(H)})(\underset{\in H}{e}) = 0$$

Segue $g \in V_G(I_G(H)) = H$.

segue $g \in V_G(I_G(H)) = H$.

Cioè H è lo stabilizzatore di U'.

Abb. trovato V', U', troviamo V e U.

Poniamo $V = \bigwedge^{\dim(U')} V'$ e

$$U = \bigwedge^{\dim(U')} U'$$

abb. $U \subseteq V$, e V è un G-modulo.

Inoltre $\dim(U) = 1$, è generato da

$$\boxed{u_1 \wedge \dots \wedge u_{\dim(U')}}$$

dove $(u_1, .., u_{\dim(U')})$ è una qualsiasi base di U' (esercizio).

Inoltre H stabilizza U, perché manda ogni vettore di U in U.

Rimane da dim. che H è lo stabilizzatore,

G tale che

quindi prendiamo $g \in G$ tale che $\boxed{g \cdot U = U}$.

Dim. che $g \cdot U' = U'$ (non è ovvio che, se $g \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_{\dim(U')}) \in U$ allora $g \cdot u_i \in U \quad \forall i$).

Per questo scegliamo una base $(u_1, \ldots, u_n)$ di V', in modo che $(u_1, \boxed{\ldots, u_d})$ sia una base di U'.

Consid. $g \cdot u_1, \ldots, g \cdot u_d$: alcuni saranno dentro U', altri no. Tra quelli fuori di U', possiamo sceglierne in modo che messi insieme a $u_1, \ldots, u_d$ formino un insieme lin. indipendente. Scegliamoli come nuovi vettori $\boxed{u_{d+1}, \ldots, u_{d+r}}$ della base di V', e completiamo $(u_1, \ldots, u_{d+r})$ a una nuova base di V' $(u_1, \ldots, u_n)$.

$(u_1, \dots, u_n)$.

Cioè possiamo assumere di aver scelto una base $\boxed{(u_1, \dots, u_n)}$ di V' tale che $(u_1, \dots, u_d)$ sia una base di U', e tale che $(u_{1+r}, u_{2+r}, \dots, u_{d+r})$ sia una base di $\boxed{g \cdot U'}$, per qualche intero non negativo r.

Vediamo allora l'azione di g su U:

g manda una base di U in una base di U, ma U ha dim. 1, con base $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$.

Allora $g \cdot (u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$ è un multiplo scalare di $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$. D'altronde:

$g \cdot (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = (g \cdot u_1) \wedge \dots \wedge (g \cdot u_d) =$

$$g \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d) = (g \cdot u_1) \wedge \ldots \wedge (g \cdot u_d) =$$

base di $g \cdot U'$

$= $ multiplo scalare di $u_{r+1} \wedge \ldots \wedge u_{r+d}$

Una base di V è data dai prodotti

$$u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_d} \quad \text{con } 1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n$$

Segue che $r = 0$, cioè $g \cdot U' = U'$.

Dalla prima parte: $g \in H$. Cioè H è lo stabilizzatore di U.

$\square$