Algebra Superiore lez. 11

giovedì 19 novembre 2020 15:48

<u>Corollario</u>: Sia G gruppo alg. lineare, X una G-varietà affine, allora ogni chiuso G-stabile non vuoto di X contiene almeno una G-orbita chiusa.

<u>Dim.</u>: Sia $Y_1 \subseteq X$ chiuso G-stabile non vuoto, allora è unione di G-orbite, sia Z una di esse. Consid.

$$Y_2 = \underbrace{\overline{Z}}_{\text{chiuso} \subseteq Y_1} \setminus \underbrace{Z}_{\text{ap. in } \overline{Z}}$$

quindi Y_2 è un chiuso G-stabile.

Abb.: se $Y_2 = \emptyset$ allora $Z = \overline{Z}$, abb. finito.

Altrim. andiamo avanti, scegliendo un'orbita in Y_2, ecc.

Otteniamo una sequenza di chiusi G-stabili

$$Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$$

Si stabilizza per forza in $Y_k = \emptyset$,

si stabilizza, per forza in $\mathbb{k}^N$,
e l'ultimo termine non vuoto è una G-orbita chiusa
in Y_1.

$\square$

<u>Corollario:</u> Sia G gr. alg. lin. linearm. riduttivo,
X una G-var. affine, e $\pi: X \to X/\!\!/G$.
Allora ogni fibra di π contiene esattam.
una G-orbita chiusa.

<u>Dim.:</u> π è suriettiva e costante sulle orbite, quindi le fibre di π sono
chiusi G-stabili non vuoti.

$\square$

<u>Corollario:</u> Nelle stesse ipotesi, se X contiene
una G-orbita densa ($\Rightarrow$ aperta), allora contiene
esattamente una G-orbita chiusa.

<u>Dim.:</u> Abb. già osservato: se X contiene una
G-orbita densa, allora $\mathcal{O}(X)^G = \{\text{costanti}\}$,
quindi $X/\!\!/G = \{\text{punto}\}$, e X è l'unica

quindi $X/\!\!/G = \{\text{punto}\}$, e Λ è l'unica fibra di $\pi : X \to X/\!\!/G$.

$\square$

<u>Esempio</u>: Se $X = GL(n)$ e $G = B(n)$ che agisce per moltiplicaz. a destra $g \cdot x = x g^{-1}$, allora $B(n)$ non è linearm. riduttivo per $n > 1$, le G-orbite di X sono tutte chiuse, essendo le classi lat. sinistre di $B(n)$ in $GL(n)$, però

$$\mathcal{O}(X)^G = \{\text{costanti}\}$$

e il quoziente categorico esiste ed è un singolo punto.

Dall'esempio vediamo che le proprietà di $\pi : X \to X/\!\!/G$ che abb. visto valgono solo se G è linearm. riduttivo.

<u>Altri gruppi linearmente riduttivi: i gruppi autoaggiunti</u>

Ripasso sul prodotto tensoriale

Siano V, W sp. vettoriali di dim. finita, allora è definito il prodotto tensoriale $V \otimes W$ nel modo seguente:

date $(v_1, \dots, v_n)$ base di V e $(w_1, \dots, w_m)$ base di W, allora $V \otimes W$ è lo sp. vettoriale di base $(v_i \otimes w_j)$, ed è definita anche l'applicaz. bilineare

$$
\begin{aligned}
V \times W &\longrightarrow V \otimes W \\
(v_i, v_j) &\longmapsto v_i \otimes v_j
\end{aligned}
$$

L'immagine di (v, w) si denota anche con $v \otimes w$.

Allora valgono le regole usuali della bilinearità:

$$
\begin{aligned}
(v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w. \\
(\lambda v) \otimes w &= \lambda (v \otimes w)
\end{aligned}
$$

e analogamente sul secondo fattore.

Si definiscono anche, dato V sp. vett. di

dim. [illegible] la potenza simmetrica d-esima dim. finita n la potenza simmetrica d-esima: ($d \geq 1$)

$$S^dV = \frac{\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{d}}{\mathrm{span}\{v_1\otimes\cdots\otimes v_i\otimes v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_d - v_1\otimes\cdots\otimes v_{i+1}\otimes v_i\otimes\cdots\otimes v_d\}}$$

e la potenza esterna d-esima

$$\Lambda^dV = \frac{\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{d}}{\mathrm{span}\{v_1\otimes\cdots\otimes v_i\otimes v_i\otimes v_{i+2}\otimes\cdots\otimes v_d\}}$$

grazie alla multilinearità, vale ad es.

$$[v\otimes w] = -[w\otimes v] \quad \text{in } \Lambda^2V.$$

Oss.: Consid. $V=\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Ogni variabile x_i è un elem. di V^*, quindi possiamo identificare $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]_d$ con $S^d(V^*)$.

identificare $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]_d$ con $S^d(V^*)$.

<u>Oss.</u>: 1) Se G è un gruppo alg. lineare e V, U sono G-moduli regolari, allora $V \otimes U$ ha struttura naturale di G-modulo regolare tramite la formula

$$g \cdot (\underset{\in V}{v} \otimes \underset{\in W}{w}) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w).$$

2) lo stesso vale per $S^d V$ e $\Lambda^d V$.

<u>Notazione</u>: la classe di $[v \otimes w]$ in $\Lambda^2 V$ si scrive anche $v \wedge w$, analogamente in $\Lambda^d V$.

<u>Osservazione</u>: Dato V un G-modulo regolare, e U un sottomodulo, anche il quoziente V/U ha struttura naturale di G-modulo

$/U$

regolare: $\quad g\cdot(v+U) = (g\cdot v)+U$

<u>Lemma:</u> Sia G un gruppo alg. lineare e V un G-modulo regolare. Allora V è isomorfo a un sottomodulo di $\mathcal{O}(G)^n$ per qualche $n \geq 0$. Qui stiamo considerando $\mathcal{O}(G)$ come G-modulo con la traslazione a <u>destra</u>. (Sarebbe lo stesso se considerassimo la traslazione a <u>sinistra</u>.)

<u>Dim.:</u> Se V ha dim. 0 allora il lemma è ovvio, sia allora $\dim(V) = n > 0$, e vediamo V "dentro" $\mathcal{O}(G)^n$.

Sia $(\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n})$ base di V^*, e def.

$$\varphi : V \longrightarrow \mathcal{O}(G)^n$$

$$\varphi : V \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

$$\underline{v} \longmapsto \Big(g \longmapsto (u_1(g\cdot v), \dots, u_m(g\cdot v))\Big)$$

E' un'applicazione G-equivariante, infatti $h \in G$ manda v in $h \cdot v$, e $h \cdot v$ viene mandato nella m-upla di funzioni $g \longmapsto (u_1(\underline{g\cdot(h\cdot v)}), \dots)$.

Vediamo come agisce h per traslaz. a destra sulle funzioni $g \longmapsto u_i(g\cdot v)$. Applicare h a questa funzione dà la funzione che a $g \in G$ associa il valore della vecchia funzione su gh.

Cioè $h \cdot \big(g \mapsto u_i(g\cdot v)\big)$ è la funzione

$$g \longmapsto u_i\big(\underline{(gh)}\cdot v\big)$$

che è la stessa cosa di prima.

Allora φ è un omom. di G-moduli, ed è iniettivo, basta calcolare le funzioni in $g=e$. $\square$

ES.: $G = \underline{GL(n)}$ $\underline{\underline{V}} = \mathbb{C}^n$, $\underline{U = \mathbb{C}}$ rappr. $g \mapsto \underline{\det(g)^{-1}}$

Es.: $G = GL(n)$ $F = \mathbb{C}$; $U = \mathbb{C}$ rappr. $g \mapsto \det(g)$ $\square$

Teorema: Sia $G \subseteq GL(V)$ un gruppo alg. lineare. Sia U un G-modulo regolare, allora $U \otimes \mathbb{C}_d$ (dove $\mathbb{C}_d$ è la rappresentazione $G \to GL(1)$, $g \mapsto \det(g)^d$, per $d \in \mathbb{Z}$)

è isomorfo a un quoziente di un sottomodulo di

$$\underbrace{V^{\otimes m_1} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes m_s}}$$

per certi $d, s, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$, $m_1, \ldots, m_s, s > 0$.

Qui $V^{\otimes m_j} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{m_j}$.

Oss.: $U \otimes \mathbb{C}_d$ come sp. vettoriale è isomorfo a U, posso definire un isomorfismo

$$U \longrightarrow U \otimes \mathbb{C}_d$$

$$U \longrightarrow \underline{U \otimes \mathbb{C}_d}$$
$$u \longmapsto u \otimes 1$$

E' suriettivo, perchè se abb. un elem. qualsiasi di $U \otimes \mathbb{C}_d$ lo poss. scrivere come $u_1 \otimes \alpha_1 + \ldots + u_k \otimes \alpha_k$ $u_i \in U$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ma

$$u_i \otimes \alpha_i = \alpha_i \cdot (u_i \otimes 1) = (\alpha_i u_i) \otimes 1$$

e l'elem. originario è $(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) \otimes 1$.

Come G-modulo:

$$g \cdot (u \otimes 1) = (g \cdot u) \otimes (\det(g)^d) =$$
$$= (\det(g)^d (g \cdot u)) \otimes 1$$

Quindi passando da U a $U \otimes \mathbb{C}_d$ in un certo senso passo da $\varphi : G \longrightarrow GL(U)$ a

$$\varphi_d : G \longrightarrow GL(u)$$
$$g \longmapsto \varphi(g) \cdot \det(g)^d$$

Prima della dim., vediamo come applicare il teorema.

Def.: Sia $G \subseteq GL(n)$ gr. alg. lineare. G si dice autoaggiunto se $\forall g \in G$ anche ${}^t\overline{g} \in G$.

Lemma: Sia G come sopra, allora $\mathbb{C}^n$ come G-modulo è completam. riducibile.

Dim.: Sia U un G-sottomodulo, consideriamo $U^\perp$ rispetto alla forma Hermitiana standard $\langle -,- \rangle$:

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\in\, \mathbb{C}^n}, \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\in\, \mathbb{C}^n} \right\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$$

Allora $U \oplus U^\perp = \mathbb{C}^n$, d'altronde

$U^\perp$ è G-stabile: se $g \in G$ e $v \in U^\perp$, $\forall u \in U$:

$$\langle g \cdot v, u \rangle = \langle v, \overbrace{\underbrace{{}^t\bar{g}}_{\in G} \cdot u}^{\in U} \rangle = 0$$

$\square$