Algebra Superiore lez. 10

mercoledì 18 novembre 2020 07:45

Richiami di geom. algebrica

Oss.: Sia $\varphi: X \longrightarrow Y$ regolare fra var. affini

$Im(\varphi)$ può non essere loc. chiusa, ad es.

ad es. $\varphi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$(a,b) \longmapsto (a, ab)$

è un aperto di $\overline{Im(\varphi)}$

$$Im(\varphi) = \{(x,y) \mid x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$$

non è localm. chiusa, $\overline{Im(\varphi)} = \mathbb{C}^2$.

Per studiare l'imm. delle appl. regolari:

Def.: Sia $\varphi: X \longrightarrow Y$ appl. reg. fra var. affini.

φ si dice *finita* se:

$$\mathcal{O}(X) = \sum_{i=1}^{m} \underline{\varphi^*(\mathcal{O}(Y))} \cdot f_i$$

dove $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X)$.

Questa condizione si esprime anche dicendo che $\mathcal{O}(X)$ è un $\varphi^*(\mathcal{O}(Y))$-modulo finito.

$\mathcal{O}(X)$ è un $\varphi^*(\mathcal{O}(Y))$-modulo finito.

<u>Esempio</u>: 1) $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è finita, infatti
$z \mapsto z^2$

$$\varphi^*(\mathbb{C}[x]) = \underline{\mathbb{C}[x^2]} \subseteq \underline{\mathbb{C}[x]} = \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

e abb.: $\mathbb{C}[x] = \underset{f_1}{\underline{1}} \cdot \mathbb{C}[x^2] + \underset{f_2}{\underline{x}} \cdot \mathbb{C}[x^2]$

2) $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
$(x,y) \mapsto x$

Esercizio: dim. che φ non è finita.

3) Se X è un chiuso di Y, allora l'inclusione $\varphi: X \to Y$ è finita perché $\varphi^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ è suriettiva quindi $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) = \mathcal{O}(X)$.

<u>Teorema</u>: Sia $\varphi: X \to Y$ finita, allora è chiusa.

Per la dim.:

Lemma: Siano $\mathcal{O}(X) = B$ e $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) = A$ come

Lemma: Siano $\mathcal{O}(X) = B$ e $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) = A$ come nel teorema. Sia $I \subseteq A$ un ideale proprio, allora IB è un ideale proprio di B.
$\nwarrow$ l'ideale gen. da I in B.

Dim.: Supp. per assurdo che $\underline{\underline{IB}} = \underline{\underline{B}}$. Siano $\underline{f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(X)}$ come nella def.. Allora

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$$

con $a_{ij} \in I$ (visto che $B = IB$ allora
$$B = I(\underbrace{f_1 A}_{} + \dots + f_m A) = f_1 I + \dots + f_m I \quad)$$

Allora
$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{(a_{ij} - \delta_{ij})} f_j = 0 \quad \Bigg]$$

che posso interpretare come prodotto

$$\underbrace{R \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = 0}$$

dove R è la matrice $(a_{ij} - \delta_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,m\}}$

Sia $K=(c_{ij})$ la matrice dei cofattori di R.

Moltiplichiamo a sinistra per K:

$$\underbrace{K\cdot R}_{\parallel}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}\det(R) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det(R)\end{pmatrix}$$

Allora $\det(R)\cdot f_i=0$ $\forall i$, cioè

$\det(R)\cdot B=0$. Ora

$$R=\begin{pmatrix}a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & a_{22}-1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & & a_{mm}-1\end{pmatrix}$$

$\det(R)=\pm 1+(\text{elt di } I)$

Allora $(1+a)\cdot B=0$ per qualche $a\in I$.

Cioè $\forall b\in B$ abbiamo $(1+a)\cdot b=0$, cioè

$b=-ab$

$b = -ab$

Applicando a $b=1$ otteniamo $1 \in I$.

Cioè I non è un ideale proprio di A: assurdo.

□

<u>Dim. del teorema</u>: Sia $Z \subseteq X$ un chiuso, e

consid. $\psi = \varphi|_Z : Z \longrightarrow Y' = \overline{\varphi(Z)}$.

Allora $\psi^* : \mathcal{O}(Y') \to \mathcal{O}(Z)$ è <u>iniettiva</u>,

$$\mathcal{O}(Y') = \frac{\mathcal{O}(Y)}{I_Y(Y')} \qquad \mathcal{O}(Z) = \frac{\mathcal{O}(X)}{I_X(Z)}$$

ed è indotta su questi quozienti da $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Segue che ψ è finita.

Dimostriamo che ψ è suriettiva. Sia $y' \in Y'$,

e $I = I_{Y'}(\{y'\})$. E' un ideale proprio, e

consideriamo $J = \psi^*(I)$. Per il lemma

genera un ideale proprio di $\mathcal{O}(Z)$, ed è <u>l'ideale</u>

<u>della controimmagine</u> $\psi^{-1}(y')$. Per il Nullstellensatz,

è un id. proprio

$\psi^{-1}(y')$ è non vuoto. Quindi ψ è suriettiva,

□

di proprio di $\varphi^*(\mathcal{O}(Y'))$ perché φ^* è iniettiva

$\varphi^{-1}(Y')$ è non vuoto. Quindi φ è surgettiva, e φ è chiusa. $\square$

<u>Corollario:</u> Sia $\varphi: X \to Y$ un'appl. reg. fra var. affini. Allora $\varphi(X)$ contiene un aperto denso di $\overline{\varphi(X)}$.

<u>Notazione:</u> Se Z è una var. affine irriducibile, allora $\mathcal{O}(Z)$ è un dominio di integrità, quindi è definito il suo campo dei quozienti. Si usa la notazione $\mathbb{C}(Z)$ (si usa assieme alla notazione $\mathbb{C}[Z]$ per $\mathcal{O}(Z)$).

<u>Dim.:</u> Visto che X è unione finita di comp. irriducibili, possiamo assumere che X è irriducibile, e allora $\overline{\varphi(X)}$ è irriducibile. Assumiamo allora che anche Y è irriducibile e $Y = \overline{\varphi(X)}$. Allora

anche Y è irriducibile e $Y = \varphi(X)$. Allora

$\varphi^*: \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ è iniettiva,

sono definiti i campi $\mathbb{C}(X)$ e $\mathbb{C}(Y)$,

e φ^* induce un omom. $\mathbb{C}(Y) \longrightarrow \mathbb{C}(X)$ iniettivo.

Identifichiamo allora $\mathcal{O}(Y)$ col sottoanello $\varphi^*(\mathcal{O}(Y))$ di $\mathcal{O}(X)$, e $K = \mathbb{C}(Y)$ con il corrisp. sottocampo di $L = \mathbb{C}(X)$.

Sia r il grado di trascendenza di L su K, cioè sia r il massimo intero tale che L contiene un sottocampo isomorfo a $\underbrace{K(x_1, \ldots, x_r)}_{\text{f.ni raz. a coeff. in } K}$.

Allora esistono elementi $u_1, \ldots, u_r \in L$ tali che $\underbrace{K(u_1, \ldots, u_r)}_{\text{sottocampo di } L}$ è isom. a $\underbrace{K(x_1, \ldots, x_r)}$.

Primo passo: posso scegliere $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{O}(X)$.

<u>Esercizio</u>: dimostrarlo. (Sugg.: se ogni elem. di $\mathcal{O}(X)$ è algebrico su K, allora $\mathcal{O}(X)$ è un campo (perché?). Allora avrei $\mathcal{O}(X) = L$ e $r = 0$. Altrimenti

Allora avrei $\mathcal{O}(X) = L$ e' $r=0$. Altrimenti esiste $u_1 \in \mathcal{O}(X)$ trascendente su K, e si va avanti.)

Consid. allora:

$$(L \supseteq) \quad \mathcal{O}(X) \supseteq \underline{\mathcal{O}(Y)[u_1, .., u_r]} \supseteq \mathcal{O}(Y)$$

contiene $K(u_1,..,u_r) \cong K(x_1,..,x_r)$

polinomi a coeff. in $\mathcal{O}(Y)$ nelle f.ni $u_1,..,u_r$

Oss.: gli u_i sono funzioni in $\mathcal{O}(Y)$ ma sono algebricam. indipendenti su K, posso considerarli come "variabili".

Quindi $\mathcal{O}(Y)[u_1,..,u_r]$ è isomorfo all'anello dei polinomi a coeff. in $\mathcal{O}(Y)$ in r variabili.

Allora $\mathcal{O}(Y)[u_1,..,u_r] \cong \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$

e le inclusioni di anelli viste prima corrispondono a fattorizzare $\varphi: X \to Y$ in

$$X \xrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\rho} Y \qquad \leftarrow$$

a fattorizzare $\varphi : X \longrightarrow Y$ in

$$X \xrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\rho} Y \quad \leftarrow$$

e ρ è la proiezione sul primo fattore.
Vogliamo ottenere: ψ finita. Ora: L è algebrico su $K(u_1, \dots, u_r)$, in particolare ogni elem. f di $\mathcal{O}(X)$ è algebrico su $K(u_1, \dots, u_r)$, cioè soddisfa un polinomio:

$$c_n f^n + \dots + c_1 f + c_0 = 0 \quad \text{con } c_i \in K(u_1, \dots, u_r)$$

Posso "eliminare tutti i denominatori degli c_i" moltiplicando per elt di $\mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$, quindi posso assumere che $c_i \in \mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$.
Inoltre posso moltiplicare f per un elem. di $\mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$ e ottenere un elemento integrale su $\mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$, cioè radice di un polinomio monico.
Siano allora $f_1, \dots, f_m$ generatori di $\mathcal{O}(X)$

Siano allora $f_1, \dots, f_m$ generatori di $\mathcal{O}(X)$

come algebra, siano $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$

tali che $a_i f_i$ è integrale su $\mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_r]$.

Oss.: Se ogni f_i fosse integrale su $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$,

(da chiarire) ② allora ogni potenza abbastanza alta di f_i si scrive usando un numero finito di potenze di f_i e coefficienti in $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$.

Da questo segue: $\mathcal{O}(X) = \sum_{i=1}^{s} g_i \, \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$

(da chiarire) ① per certi elem. $g_i \in \mathcal{O}(X)$.

Otterrei che $\varphi: X \to Y \times \mathbb{C}^r$ è finita.

Chiariamo ①: Sia $p_i(x)$ un pol. monico di grado d_i tale che $p_i(f_i) = 0$, p_i a coeff in $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$,

allora $f_i^{d_i} \in \sum_{e_i=0}^{d_i - 1} f_i^{e_i} \, \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$.

Segue:

$$\mathcal{O}(X) = \sum_{e_1, \dots, e_r = 0}^{\max\{d_i - 1\}} f_1^{e_1} \cdots f_m^{e_m} \cdot \mathcal{O}(Y \times \mathbb{C}^r)$$

quindi effettivam. $X \to Y \times \mathbb{C}^r$ sarebbe

f...

quindi effettivam. ... è finita.

<u>Chiariamo</u> (2): "rendiamo" f_i integrale su $\mathcal{O}(Y\times\mathbb{C}^r)$ rendendo invertibili gli a_i.

Poniamo cioè $F = a_1 \cdots a_r \in \mathcal{O}(Y\times\mathbb{C}^r)$ e consid. l'aperto affine $(Y\times\mathbb{C}^r)_F$ e l'aperto $X_{\psi^*(F)}$, e la restrizione

$$\psi' = \psi|_{X'} : X' \longrightarrow Z'$$

$$X' = X_{\psi^*(F)}, \qquad Z' = (\underbrace{Y\times\mathbb{C}^r}_{=Z})_F .$$

Su X' e Z' le funzioni a_i sono invertibili (come prima identifico $\mathcal{O}(Z')$ col sottoanello $\psi^*(\mathcal{O}(Z'))$ di $\mathcal{O}(X)$).

Quindi $f_i|_{X'}$ è integrale su $\mathcal{O}(Z')$ per ogni i, inoltre $\mathcal{O}(X')$ è generato come algebra da $\underbrace{f_i|_{X'}}$ e da $\dfrac{1}{\underbrace{F|_{X'}}}$

$\underbrace{}_{\text{integrale su } \mathcal{O}(Z')}$ $\qquad$ $\overbrace{}^{X'}$ in $\mathcal{O}(Z')$

Quindi $\psi' : X' \to Z'$ è finita. Inoltre l'immagine $\psi'(X')$ è densa nella sua chiusura (perché ψ^* è iniettiva), e quindi ψ' <u>suriettiva</u>.

Segue: $\varphi(X)$ contiene un aperto di $Y \times \mathbb{C}^r$, e precisamente $(Y \times \mathbb{C}^r)_F$.

Vorremmo concludere: $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\rho((Y \times \mathbb{C}^r)_F) \text{ è aperto}}$, e quindi abb. trovato un ap. contenuto in $\varphi(X)$.

Non possiamo usare che ρ è aperta perché è una proiezione: la top. di Zariski su un prodotto <u>non</u> è la topologia prodotto (es.: $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$: la topologia prodotto è meno fine della top. di Zariski su $\mathbb{C}^2$, <u>esercizio</u>).

Dim. che $\rho((Y \times \mathbb{C}^r)_F)$ contiene un aperto denso ($\Leftrightarrow$ ap. non vuoto, perché Y è irriducibile).

$\mathcal{O}(Y)$

Scriviamo

$$F = \sum_{i_1,\dots,i_r} \underbrace{F_{i_1,\dots,i_r}}_{\in \mathcal{O}(Y)} \, u_1^{i_1} \cdots u_r^{i_r}$$

erano le "coord." su $\mathbb{C}^r$

Sia $y \in Y$ tale che almeno una delle $F_{i_1,\dots,i_r}$ sia nonnulla su y, allora esistono valori da assegnare alle variabili u_i, diciamo $u_i = \tau_i$, tali che

$$F(y, \tau_1, \dots, \tau_r) = \sum F_{i_1,\dots,i_r}(y)\, \tau_1^{i_1} \cdots \tau_r^{i_r} \neq 0$$

(esercizio: dim. che i valori τ_j esistono).

Segue:

$$\rho\left((Y \times \mathbb{C}^r)_F\right) \supseteq \bigcup_{i_1,\dots,i_r} Y_{F_{i_1,\dots,i_r}}$$

cioè l'immagine di ρ contiene un aperto denso di Y. $\square$

Applichiamo il corollario ai gruppi algebrici:

<u>Proposizione</u>: Sia $\varphi: G \to H$ un omomorfismo (di gruppi) regolare fra gruppi alg. lineari. Allora $\varphi(G)$ è chiuso.

<u>Dim.</u>: Per il corollario, $\varphi(G)$ contiene un aperto denso U della chiusura $\overline{\varphi(G)}$.

Ora: $\varphi(G)$ è un sottogruppo di H, e allora anche $\overline{\varphi(G)}$ è un sottogruppo (è facile verificarlo).

Allora vale $\overline{\varphi(G)} = U \cdot U$, infatti:

se $h \in \overline{\varphi(G)}$, allora:

$\underbrace{U^{-1}}_{\{u^{-1} \mid u \in U\}}$ è un aperto denso di $\overline{\varphi(G)}$, e anche

$h \cdot U^{-1}$ è un ap. denso di $\overline{\varphi(G)}$

quindi $U \cap (hU^{-1}) \neq \emptyset$

quindi $U \cap (hU^{-1}) \neq \emptyset$

otteniamo $h \in U \cdot U$.

Ma $U \subseteq \varphi(G)$ e $U \cdot U \subseteq \varphi(G)$, quindi

$\varphi(G) = \overline{\varphi(G)}$.

$\square$

<u>Oss.</u>: Nella dim. abb. anche visto:

se U è aperto denso di G gruppo alg. lin., allora $G = U \cdot U$.

Se G è connesso ($\iff$ irriducibile), allora se U è ap. non vuoto allora $G = U \cdot U$.

<u>Prop.</u>: Sia G gruppo alg. lineare e X una G-var. affine. Allora ogni G-orbita di X è aperta nella propria chiusura. In particolare è localmente chiusa.

<u>Dim.</u>: Sia $Y = \{ g \cdot x \mid g \in G \}$ con $x \in X$ un'orbita, allora Y è l'immagine di

un'orbita, allora Y è l'immagine di

$$G \to \overline{Y}$$

$$g \mapsto g.x$$

quindi Y contiene un $\overbrace{\text{aperto di}}^{\text{denso } U}$ $\overline{Y}$:

$$Y = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g.U}_{\text{aperto in } \overline{Y}}$$

e quindi Y è aperto in $\overline{Y}$.

$\square$