Lez. 1 Algebra Superiore

giovedì 8 ottobre 2020 18:20

G gruppo X insieme

azione di G su X: omomorf. di gruppi

$\varphi : G \longrightarrow \{\text{biiezioni } X \to X\}$

si scrive anche

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto \varphi(g)(x) = g \cdot x = gx$$

Consideriamo il quoziente $X/G = \{\text{orbite di } G \text{ su } X\}$

(ricordiamo: dato $x \in X$, l'orbita di x è l'insieme $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$)

Spesso l'obiettivo sarà dotare X/G di strutture simili a quella data su X (es. var. algebrica, o diff., ecc...).

Primi esempi

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \mathbb{R}^*$$

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^*$$

Esercizio: trovare var. diff. X con azione di $\mathbb{R}^*$ per diffeomorfismi, tale che $X/\mathbb{R}^*$ non è di Hausdorff.

Eppure $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ ha struttura naturale di var. diff.:

$$U_i = \{ \underbrace{[x_0, \dots, x_i, \dots, x_n]}_{\displaystyle \parallel} \mid x_i \neq 0 \}$$

$$\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]$$

carta locale: $\downarrow$

$$\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Altro esempio:

La Graßmanniana dei sottosp. vett. di dim. d in $\mathbb{R}^n$: $Gr(d, n)$

Un qualsiasi $W \in Gr(d, n)$ è dato da una

Un qualsiasi $W \in Gr(d,n)$ è dato da una sua base $(w_1, .., w_d)$, scriviamo i vettori di colonna

$$\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_d \end{pmatrix}$$

ci saranno indici $i_1, .., i_d$ tali da individuare un minore $d \times d$ invertibile.

Posso rendere quel minore uguale alla matrice identità I $(d \times d)$ con op. elem. di colonna:

es.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{d+1,1} & a_{d+1,2} & \cdots & a_{d+1,d} \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_{n,d} \end{pmatrix}$$

le entrate non appartenenti a questo minore danno la carta locale.

<u>Esercizio:</u> Esprimere le carte locali in funzione di <u>tutte</u> le entrate della matrice $n \times d$, non mettendo le entrate delle d righe prescelte

mettendo le entrate delle d righe prescelte uguali a I.

Nel corso studieremo tecniche per dotare X/G di strutture alg. / diff., che generalizzano questi esempi, e sfrutteranno il fatto che su $\mathbb{P}^n$ e su $Gr(d,n)$ si possono definire azioni transitive di gruppi dotati di strutture geometriche.

Un altro esempio

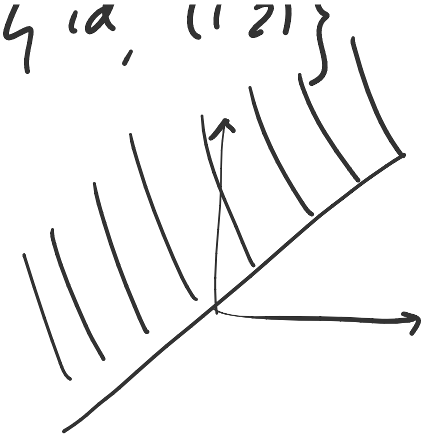
Sia $X = \mathbb{R}^n$ e $G = S_n$ (gruppo simmetrico) che agisce permutando le coordinate:

$$\sigma \in S_n \qquad \sigma \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$

Come pensare X/G ?

Es. $n=2$ $\quad S_2 = \{ id, (1\,2) \}$, Es. $n=2$ $\quad S_2 = \{ id, (1\,2) \}$

$\mathbb{R}^2 / S_2 \quad \longleftrightarrow$



Sembra improbabile dotare $\mathbb{R}^n / S_n$ di struttura di var. differenziabile. Cerchiamo di studiare <u>funzioni</u> su $\mathbb{R}^n / S_n$, usando l'applicazione naturale

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / S_n$$
$$x \longmapsto G \cdot x$$

se abbiamo $f : \mathbb{R}^n / S_n \longrightarrow \mathbb{R}$

possiamo comporre con π e otteniamo

$$f \circ \pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione invariante per l'azione di G, cioè è costante sulle G-orbite.

cioè è costante sulle G-orbite.

<u>Richiamo:</u> Se G agisce su un insieme X, allora è definita naturalm. un'azione di G sulle funzioni da X in un altro insieme qualsiasi Z:

data $f: X \to Z$ e $g \in G$,

l'applicazione $g \cdot f$ è def. come

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$$

Corrisponde intuitivamente a "spostare" il grafico di f seguendo l'azione di G su X.

<u>Esercizio:</u> Verificare che questa def. è effettivam. un'azione di G sull'insieme delle funzioni $X \to Z$.

Cerchiamo di considerare qualche funzione

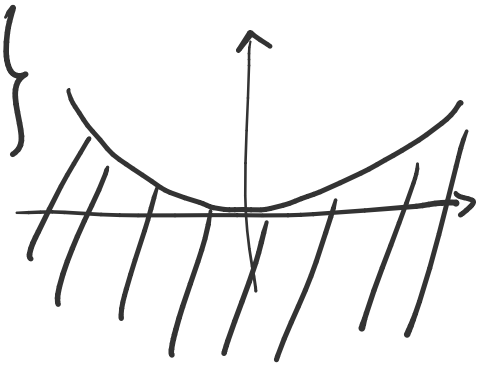
Cerchiamo di considerare qualche funzione S_2-invariante su $\mathbb{R}^2$: es. $x+y$ e $x \cdot y$

Mettiamole insieme:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (x+y,\, xy)$$

Ha immagine $Q = \{ y \leq x^2/4 \}$



Le controimmagini di punti di Q sono esattamente le G-orbite su $\mathbb{R}^2$.

Allora Q è in <u>biiezione</u> con $\mathbb{R}^2/S_2$.

Inoltre, prendendo su $\mathbb{R}^2$ la topolog. euclidea, sul quoziente $\mathbb{R}^2/S_2$ è definita la topologia quoziente, e si può far vedere che con essa il quoziente $\mathbb{R}^2/S_2$ è omeomorfo a Q.

<u>Funzioni simmetriche elementari</u>

Quello che abb. visto su $\mathbb{R}^n$ si generalizza, e si possono studiare facilmente le funzioni

Quello che abb[illegible]

si possono studiare facilmente le funzioni polinomiali simmetriche su qualsiasi anello.

Sia R anello commutativo unitario, consideriamo l'anello dei polinomi $R[x_1, .., x_n]$.

Consideriamo l'azione di S_n su $R[x_1, .., x_n]$ per permutazione delle variabili:

$$\sigma \in S_n, \quad f(x_1, .., x_n):$$

$$(\sigma \cdot f) = f(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)})$$

Un polinomio $f \in R[x_1, .., x_n]$ si dice <u>simmetrico</u> se $\sigma \cdot f = f \quad \forall \sigma \in S_n$; l'insieme dei polinomi simmetrici si scrive $R[x_1, .., x_n]^{S_n}$.

<u>Def.</u>: Le <u>funzioni simmetriche elementari</u> in n variabili sono:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n$$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$

$\vdots$

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$$

$\vdots$

$\sigma_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$

Usiamo anche la notazione $\sigma_k^{(n)}$ per sottolineare che è in n variabili.

__Teorema:__ L'anello dei polinomi simmetrici $R[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ è un anello di polinomi, in $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Detto più precisamente: fissiamo n variabili $y_1, \dots, y_n$, e consid. l'omom. di anelli

$$\begin{aligned} R[y_1, \dots, y_n] &\longrightarrow R[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \\ y_i &\longmapsto \sigma_i \end{aligned}$$

Allora questo è un isomorfismo.

__Oss.:__ Quindi un qualsiasi polinomio simm.

Oss.: Quindi un qualsiasi polinomio simm.
ad es. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, si
scrive come polinomio in $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
in modo unico

Dim.: Per induzione su n, e sul grado dei polinomi. Dim. che ogni f simm. si scrive in modo unico come pol. in $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Consid.: $\rho: R[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow R[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

dato da $\rho(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

ρ manda $R[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ in $R[x_1, \dots, x_{n-1}]^{S_{n-1}}$.

Inoltre $\rho(\sigma_i^{(n)}) = \sigma_i^{(n-1)}$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Sia f come prima; supp. $\boxed{\rho(f) = 0}$.

Allora x_n divide f (cioè x_n è presente in tutti i monomi di f), e per simmetria ogni variabile divide f. Cioè esiste un polinomio simmetrico g tale che

$$f = g \cdot \sigma_n^{(n)}.$$

$$f = g \cdot \sigma_n^{(n)} .$$

Ora g ha grado minore di f, quindi per induzione si scrive in modo unico come polinomio in $\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_n^{(n)}$. Allora anche f.

Rimane il caso $\rho(f) \neq 0$. Allora esiste un unico pol. in $n-1$ variabili p tale che

$$\rho(f) = p\left(\sigma_1^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}\right) .$$

Consideriamo

$$f - \underbrace{p\left(\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}\right)}$$

Vale

$$\rho\Big(\underbrace{f - p\left(\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}\right)}_{h}\Big) = 0$$

Per la prima parte: h si scrive in modo unico come polinomio in $\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_n^{(n)}$.

Allora vale la stessa cosa per f. $\square$

Allora vale la stessa cosa per f. $\square$

<u>Applicazione del teorema:</u> Consid. $\mathbb{C} = R$.

Il teorema ci permetterà di far vedere che $\mathbb{C}^n / S_n \cong \mathbb{C}^n$.