Corso di Combinatoria

A. Machì

Dispensa IV

Sistemi di rappresentanti distinti. Matching. Reti e flussi

1 Teorema di Hall

Dati un insieme $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ e una famiglia $A_1, A_2, \ldots, A_m$ di sottoinsiemi di A, in numero finito ma non necessariamente distinti, un *sistema di rappresentanti distinti* (SRD) per gli insiemi della famiglia è un insieme di elementi distinti $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con $a_i \in A_i$ (questi elementi si pensano rappresentare ciascuno un insieme della famiglia). Un SRD si dice anche *trasversale* della famiglia.

Esempi. **1.** Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, e siano
$A_1 = \{5, 6, 7\}$, $A_2 = \{1, 5, 8\}$, $A_3 = \{4, 5, 7\}$, $A_4 = \{1, 6\}$, $A_5 = \{2, 4, 6, 7\}$, $A_6 = \{3, 7\}$, $A_7 = \{3\}$.

Un SRD è dato da $5, 1, 4, 6, 2, 7, 3$, un altro da $6, 5, 4, 1, 2, 7, 3$, un altro ancora da $6, 8, 4, 1, 2, 7, 3$. Si osservi che gli elementi dei primi due sistemi formano lo stesso insieme, ma i due SRD sono diversi: nel primo sistema l'insieme A_1 è rappresentato dall'elemento 5, mentre nel secondo da 6.

2. La famiglia:

$$A_1 = \{1, 2, 3\},\ A_2 = \{1, 3\},\ A_3 = \{2, 3\},\ A_4 = \{1, 2\},$$

non ammette SRD: non possiamo trovare 4 elementi distinti perché vi sono in tutto solo tre elementi disponibili.

3. Nella famiglia:

$$A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{1, 3\},\ A_3 = \{2, 3\},\ A_4 = \{2\},\ A_5 = \{1, 4, 5\}$$

vi sono 5 elementi disponibili, ma non possiamo scegliere 5 elementi distinti da ciascuno degli insiemi in quanto i primi 4 insiemi contengono in tutto 3 elementi.

Dagli esempi precedenti si vede come per l'esistenza di un trasversale per una famiglia A_1,A_2,...,A_m sia necessario che per ogni k, $k = 1, 2, \ldots, m$, scelti comunque k insiemi $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ della famiglia, la loro unione contenga almeno k elementi. Formalmente:

$$|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}| \geq k, \quad \text{per ogni } \; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

La (1) va sotto il nome di *condizione di Hall*. Un teorema dello stesso Hall afferma che essa è anche sufficiente.

Teorema 1 (Ph. Hall, 1935). *La condizione* (1) *è necessaria e sufficiente per l'esistenza di un* SRD *per la famiglia* A_1,A_2,...,A_m.

Dim. La necessità è stata già vista. Per la sufficienza, se $m = 1$, il risultato è ovvio. Sia $m > 1$, e per induzione supponiamo che, per ogni $k < m$, k insiemi contengano almeno $k + 1$ elementi. Sia $x \in A_1$; togliamo l'insieme A_1 e l'elemento x. La condizione di Hall resta soddisfatta per gli $m - 1$ insiemi $A_2^{'}, A_3^{'}, \ldots, A_m^{'}$ che risultano; per induzione, esiste un trasversale per questa famiglia di $m-1$ insiemi; aggiungendo x se ne ottiene uno per la famiglia di origine.

Resta da considerare il caso in cui per un certo $k < m$ vi sono k degli A_i la cui unione contiene esattamente k elementi. L'ipotesi del teorema è soddisfatta per questi sottoinsiemi, ed essendo $k < m$ per induzione esiste un trasversale per questi k insiemi. Togliamo i k elementi del trasversale dagli $m - k$ insiemi restanti. Presi comunque h di questi $m - k$ insiemi ($h = 1, 2, \ldots, m - k$), essi contengono almeno h elementi, altrimenti gli h insiemi, più i k di prima, che ne contengono in tutto k, conterrebbero meno di $h+k$ elementi, contro l'ipotesi. Anche questi $m-k$ insiemi soddisfano allora l'ipotesi, e quindi per induzione essi ammettono un trasversale; assieme al trasversale per i k insiemi precedenti ne otteniamo uno per la famiglia di partenza. $\diamondsuit$

Il teorema è noto nella letteratura anche come "teorema dei matrimoni", e viene enunciato in questo modo: sia dato un gruppo di ragazze che cercano marito, ognuna con una lista di ragazzi che sposerebbe. Allora tutte le ragazze raggiungono lo scopo se e solo se, per ogni sottoinsieme di k ragazze, i ragazzi che queste k hanno nelle loro liste sono in totale almeno k. Qui l'insieme A è l'insieme dei ragazzi, e un sottoinsieme A_i è l'insieme dei ragazzi che si trovano nella lista della ragazza i. Un altro enunciato è il seguente: dato un insieme di persone, ciascuna delle quali è qualificata per compiere un certo numero di lavori si può assegnare a ognuna un lavoro per il quale essa è qualificata se e solo se per ogni sottoinsieme di k persone i lavori per i quali queste k sono qualificate sono in totale almeno k. Qui l'insieme A è l'insieme dei lavori, e un sottoinsieme A_i è l'insieme dei lavori per i quali è qualificata la persona i.

1.1 Il teorema di Hall per matrici 0–1

Al teorema di Hall si può dare la forma matriciale seguente. Ricordiamo che una famiglia di sottoinsiemi A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, di un insieme $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, si può rappresentare mediante una matrice $m \times n$ di 0 e 1, la *matrice di incidenza* della famiglia, che ha 1 nel posto (i, j) se $j \in A_i$, e 0 se $j \notin A_i$. Ad esempio, per la famiglia di sottoinsiemi $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{5\}$, $A_4 = \{3\}$ dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ abbiamo la matrice di incidenza in Fig. 1.

	1	2	3	4	5
A_1	1	1	0	0	0
A_2	0	0	1	0	1
A_3	0	0	0	0	1
A_4	0	0	1	0	0

Figura 1: Matrice di incidenza

L'ipotesi che, per ogni k, l'unione di k sottoinsiemi contenga almeno k elementi si traduce allora come segue:

per ogni k, gli 1 *contenuti in k righe* (tra gli elementi contenuti in k sottoinsiemi) *devono trovarsi su almeno k colonne* (ve ne sono almeno k distinti).

L'esistenza di un SRD corrisponde allora all'esistenza di un insieme di 1, uno per ogni riga (un elemento per ogni sottoinsieme) tali che non ve ne siano mai due sulla stessa colonna (siano tutti distinti). Diremo *indipendente* un insieme di elementi di una matrice tali che due non si trovano mai sulla stessa linea (dove per "linea" intendiamo indifferentemente una riga o una colonna).

Il teorema di Hall si può allora enunciare nella seguente forma matriciale:

Teorema 2. *In una matrice rettangolare di* 0 *e* 1 *esiste un insieme indi-*

pendente di 1*, uno per ogni riga, se e soltanto se, per ogni k, gli* 1 *contenuti in k righe si trovano su almeno k colonne.*

La matrice della Fig. 1 non soddisfa la condizione di Hall: gli 1 che stanno sulle ultime tre righe stanno su due sole colonne (gli ultimi tre sottoinsiemi contengono due soli elementi).

Nota. È appena il caso di osservare che 0 e 1 nel Teor. 2 rappresentano elementi di due tipi: numeri maggiori o uguali a zero, razionali o irrazionali, reali o complessi, oggetti di due colori, ecc. Così ad esempio, se la matrice consta di numeri maggiori o uguali a zero e si vuole sapere se esiste un sistema indipendente di elementi positivi (che possono anche non essere tutti distinti), uno per ogni riga, la condizione è che il numero degli elementi positivi contenuti in k righe si trovino su k colonne.

La verifica della condizione di Hall è in generale lunga e laboriosa. Se però si ha qualche informazione sugli insiemi A_i la situazione può migliorare di molto. Vediamo un esempio.

Esempio. *Se $|A| = m$, gli insiemi A_i hanno tutti la stessa cardinalità, ogni elemento appartiene allo stesso numero d di A_i, e $n \leq m$ allora la condizione di Hall è soddisfatta.*

Infatti, se r è la cardinalità comune degli A_i si ha $nr = md$ (contando in due modi diversi gli 1 nella matrice di incidenza), e quindi $n \leq m$ implica $d \leq r$. Supponiamo per assurdo che la condizione di Hall non sia soddisfatta. Per un certo k esistono allora k sottoinsiemi $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ l'unione dei quali, e sia U, contiene meno di k elementi. Sempre contando in due modi diversi gli 1 nella matrice di incidenza, questa volta degli A_{i_j}, abbiamo, se d_x è il numero di questi insiemi che contengono x:

$$rk = \sum_{j=1}^{k} |A_{i_j}| = \sum_{x \in U} d_x \leq d|U| < dk$$

che contraddice $d \leq r$.

1.2 Il teorema di Hall per grafi bipartiti

In un grafo, un *matching* M (accoppiamento) è un insieme di archi disgiunti (cioè senza estremi in comune); in un linguaggio già usato in precedenza un matching è un insieme di archi *indipendenti*. Un matching è *massimo* se è di cardinalità massima tra tutti i possibili matching, ed è *perfetto* se tutti i vertici sono accoppiati.

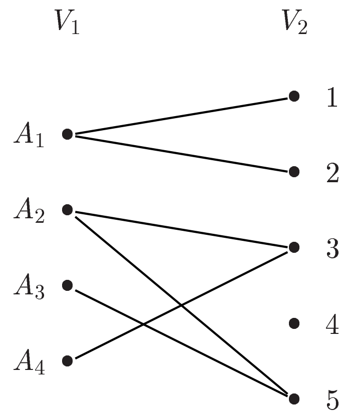

Figura 2: La famiglia della Fig. 1 rappresentata come grafo bipartito.

Un grafo si dice *bipartito* se l'insieme V dei vertici si può ripartire in due sottoinsiemi disgiunti V_1 e V_2 tali che gli archi uniscono un vertice di V_1 con uno di V_2. Se $|V_1| \leq |V_2|$ diremo V_1*–matching*, o *matching completo*, un matching di cardinalità $|V_1|$ (cioè se tutti i vertici di V_1 sono estremi di archi del matching). È chiaro che in un grafo bipartito può aversi un matching perfetto solo se $|V_1| = |V_2|$.

Ad esempio il grafo completo bipartito $K_{m,n}$ (cioè con $V_1 = m$ e $V_2 = n$, e nel quale ogni vertice di V_1 è adiacente a ogni vertice di V_2), ha un V_1-matching, e se $m = n$ anche uno perfetto. In $K_{3,5}$, con $V_1 = \{1, 2, 3\}$ e $V_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ gli archi $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ costituiscono un V_1-matching.

Una famiglia di sottoinsiemi di un insieme si può rappresentare come un grafo bipartito: i vertici di V_1 rappresentano i sottoinsiemi, quelli di V_2 gli elementi dell'insieme, e c'è un arco tra un vertice di V_1 e uno di V_2 se il vertice di V_2 rappresenta un elemento che appartiene al sottoinsieme rappresentato dal vertice di V_1.

In questo linguaggio la condizione di Hall diventa:

preso comunque un sottoinsieme S di k vertici di V_1 (presi comunque k sottoinsiemi) *i vertici $J(S)$ di V_2 adiacenti a qualche vertice di S* (il numero di elementi contenuti nei k sottoinsiemi) *sono in numero almeno uguale al numero dei vertici di S* (è almeno k):

$$|J(S)| \geq |S|, \quad \text{per ogni} \;\; S \subseteq V_1. \tag{2}$$

Il teorema di Hall si enuncia allora come segue.

Teorema 3. *Sia G un grafo bipartito, $V = V_1 \cup V_2$. Allora esiste un V_1-matching se e solo se la* (2) *è soddisfatta.*

Dimostriamo ora il teorema di Hall in questa seconda forma. Diamo questa nuova dimostrazione perché essa suggerisce un algoritmo per trovare un V_1-matching. Scriviamo uv per (u, v).

Dim. Abbiamo già visto che la condizione di Hall è necessaria. Dimostriamo ora che è anche sufficiente. Sia M un matching, con $|M| < |V_1|$; dimostriamo che che esiste un matching M' con $|M'| = |M|+1$. L'idea della dimostrazione è costruire un cammino *alternante*, un cammino cioè nel quale gli archi sono alternativamente in M e fuori di M. Poiché un tale cammino permette di ottenere un matching con un numero di archi maggiore di quelli di M, si usa anche dire che si tratta di un cammino *aumentante*. Diremo, per abuso di linguaggio, che un vertice appartiene ad M se è estremo di un arco di M.

Per ipotesi $|M| < |V_1|$, e dunque esiste $u_0 \in V_1$, $u_0 \notin M$. Sia $S = \{u_0\}$; per la (2), $|J(S)| \geq |S| = 1$, e quindi esiste un vertice $v_1 \in V_2$ adiacente a u_0. Se $v_1 \notin M$, allora $M' = M \cup \{e\}$, dove $e = u_0v_1$, è il matching richiesto. Se invece $v_1 \in M$ per qualche $u_1 \in V_1$, allora con $S = \{u_0, u_1\}$ dalla $|J(S)| \geq |S| = 2$ si ha che esiste un altro vertice v_2, distinto da v_1, e adiacente a u_0 o a u_1. Se $v_2 \notin M$, si hanno due possibilità:

- v_2 adiacente a u_1. Consideriamo il cammino v_2, u_1, v_1, u_0, nel quale l'arco $e = (u_1v_1)$ sta in M, mentre $f = u_1v_2$ e $g = u_0v_1$ no. Formiamo allora il nuovo matching M' aggiungendo a M gli archi f e g e togliendo e. M' ha un arco in più di M.
- v_2 adiacente a u_0. Formiamo il nuovo matching M' aggiungendo a M l'arco u_0v_2.

Sia $v_2 \in M$; v_2 è adiacente a u_0 o a u_1 con un arco che non sta nel matching (in quanto $u_0 \notin M$ e $u_1 \in M$), ma poiché sta in M deve stare su un arco di M. Dunque esiste $u_2 \in M$, $u_2 \neq u_0, u_1$, adiacente a v_2 mediante un arco di M. Avendosi $|\{u_0, u_1, u_2\}| = 3$ esiste un terzo vertice $v_3 \in V_2$ adiacente a uno dei tre.

Sia $v_3 \notin M$. Vi sono tre casi:

- v_3 adiacente a u_2 e v_2 a u_0. Nel cammino v_3, u_2, v_2, u_0 l'arco u_2v_2 appartiene al matching M, gli altri due no. Si ottiene un nuovo matching M' togliendo a M l'arco u_2v_2 e aggiungendo gli altri due, e si ha $|M'| = |M| + 1$. Se invece v_2 è adiacente a u_1, nel cammino

$v_3, u_2, v_2, u_1, v_1, u_0$ togliamo gli archi u_2v_2 e u_1v_1 e aggiungiamo gli altri tre.

- v_3 adiacente a u_1. Nel cammino v_3, u_1, v_1, u_0, cambiando di status al primo e al terzo arco si ottiene M' con $|M'| = |M| + 1$.
- v_3 adiacente a u_0. Aggiungere v_3u_0 al matching.

Continuando in questo modo, per la finitezza del grafo si arriva necessariamente a un vertice v_r che non appartiene a M. Ognuno dei vertici v_i è adiacente ad almeno uno degli $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}$. Come nel caso $r = 2$ si ha un cammino $v_r, u_s, v_s, u_t, v_t, \ldots, v_m, u_0$, nel quale gli archi uv appartengono a M, mentre gli archi vu no. Costruiamo allora un nuovo matching M' togliendo da M gli e_i e aggiungendo gli e_j. Poiché i due archi esterni v_ru_s e v_mu_0 sono in M', questo matching contiene un arco in più di M. $\diamondsuit$

Un cammino $u_0, v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, u_{k-1}, v_k$ come quello del teorema si dice *aumentante* o *alternante* (per un matching M) se gli archi v_iu_i appartengono a M, gli archi $u_{i-1}v_i$ non appartengono a M, e u_0 e v_k non sono incidenti ad archi di M. Il primo arco u_0v_1 e l'ultimo $u_{k-1}v_k$ non sono archi di M, e quindi in M il cammino ha un arco di meno di quanti non ne abbia fuori di M. Il teorema dimostra che se la condizione di Hall è soddisfatta e M è un matching incompleto, allora un cammino alternante esiste, e cambiando di status agli archi si ottiene un matching M' che ha un arco in più.

La presenza di un cammino aumentante per un matching M implica quindi che M non è massimo. È interessante osservare che è vero anche il viceversa, ovvero che l'assenza di un cammino aumentante implica che il matching è massimo, come dimostra il seguente teorema. Si osservi che non si suppone che il grafo sia bipartito.

Teorema 4 (BERGE, 1957). *In un grafo, un matching M è massimo se e solo se nel grafo non vi sono cammini aumentanti yper M.*

Dim. Se vi è un cammino aumentante, allora come abbiamo osservato il matching non è massimo. Viceversa, supponiamo che M non sia massimo, e sia M' un matching con $|M'| > |M|$. Consideriamo il grafo H che consta degli archi che compaiono nei due matching ma non in entrambi (consideriamo cioè la differenza simmetrica di M e M'). Ogni vertice di H è incidente ad al più un arco di M e di M', e dunque i vertici di H hanno grado 1 o 2. Le componenti connesse di H sono allora o cicli o cammini. Un ciclo ha lo stesso numero di archi di M e di M' (due archi dello stesso matching

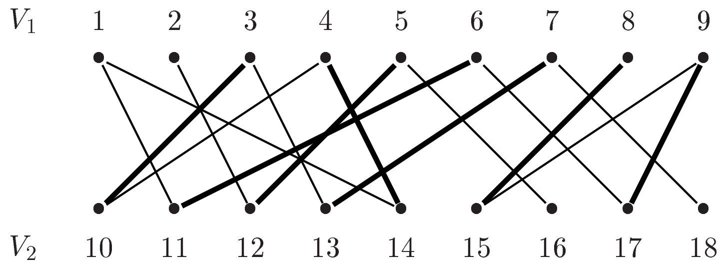

Figura 3: Matching iniziale

non possono essere adiacenti). Essendo $|M'| > |M|$ deve esistere una componente con più archi di M' che di M, e questa allora può essere solo un cammino, e cominciare e finire con un arco di M'. Si tratta allora di un cammino aumentante. $\diamondsuit$

Il Teor. 4 suggerisce il seguente algoritmo per determinare un matching massimo M:

1. Cominciare con il matching vuoto $M = \emptyset$, o che contiene un solo arco.
2. Cercare un cammino aumentante per M.
3. Se un tale cammino si trova, costruire un matching M' con $|M'| > |M|$, e tornare al passo 2 con M' al posto di M.
4. Se non si trovano cammini aumentanti, M è massimo.

Esempio. A partire dal grafo bipartito G rappresentato in figura 3, in cui è evidenziato un matching M (archi più scuri), determiniamo un matching completo da V_1 a V_2 utilizzando il metodo dei cammini alternanti.
Gli unici vertici di V_1 non appartenenti al matching M sono 1 e 2. A partire dal vertice 2 troviamo il cammino alternante $(2, 12, 5, 16)$, che termina nel vertice 16, non appartenente a M. La Fig. 4 illustra il cambiamento di status degli archi di questo cammino che porta al matching rappresentato in Fig. 5.

A partire da 1 troviamo il cammino alternante $(1, 14, 4, 10, 3, 13, 7, 18)$, che termina nel vertice 18, non appartenente al matching. La Fig. 6 illustra l'operazione che porta al matching rappresentato nella Fig. 7, che è un matching perfetto.

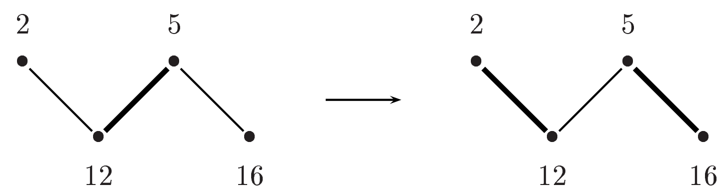

Figura 4: Primo cammino alternante

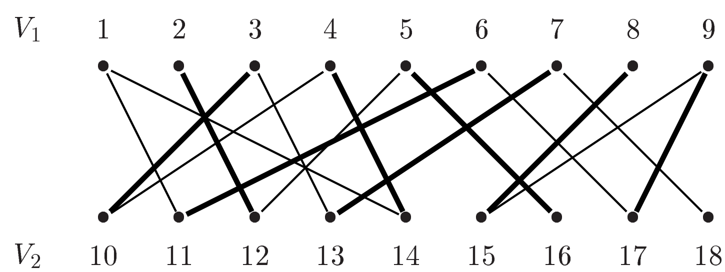

Figura 5: Matching intermedio

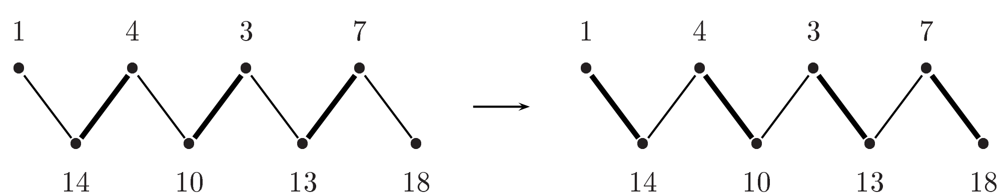

Figura 6: Secondo cammino alternante

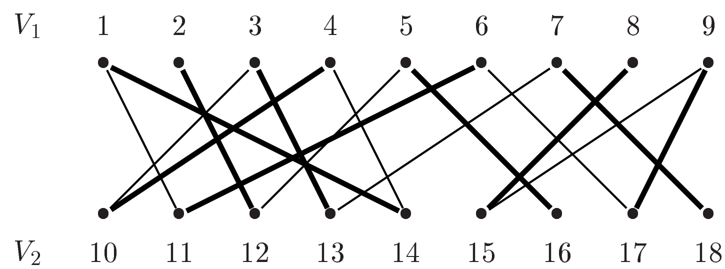

Figura 7: Matching finale

2 Teorema di König–Egerváry

Se la condizione di Hall non è soddisfatta, non c'è un sistema di 1 indipendenti uno per ogni riga. Ci si può chiedere allora qual è il numero massimo di 1 indipendenti. A questa domanda risponde il teorema di König–Egerváry, che fa parte dei risultati detti di *minimax*.

I risultati di *minimax* sono caratterizzati dal fatto che un problema riguardante un minimo ha la stessa risposta di uno riguardante un massimo. Il prototipo di questi problemi è il seguente: dato un certo numero di oggetti ripartiti in classi (colorati con vari colori), il massimo numero di oggetti che si possono prendere in modo che ve ne sia al più uno in ciascuna classe (siano tutti di colore diverso) è uguale al minimo numero di oggetti che si devono prendere per averne almeno uno di ogni colore. Questo numero è ovviamente il numero delle classi–colori; si osservi la dualità "massimo–al più" e "minimo–almeno". In un altro linguaggio, il numero delle classi (colori) nelle quali è ripartito un insieme è uguale al numero dei rappresentanti distinti, uno per ogni classe (uno di ogni colore).

Dimostriamo ora il teorema facendo uso del teorema di Hall. Come spesso succede nei teoremi di combinatoria, nella dimostrazione di un condizione necessaria e sufficente una delle due condizioni è banale (come nel caso di Hall la condizione necessaria). Analogamente, nel dimostrare una uguaglianza $m = n$, una delle disuguaglianze $m \leq n$ e $n \leq m$ è di solito banale.

Teorema 5 (König–Egerváry, 1931). *In una matrice rettangolare di* 0 *e* 1*, il minimo numero m di linee che nell'insieme contengono tutti gli* 1 *è uguale al massimo numero M di* 1 *indipendenti.*

Ad esempio, nella matrice della Fig. 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

la prima riga e la terza e quinta colonna coprono tutti gli 1 (con meno linee non è possibile). Quindi $m = 3$, ed è facile vedere che vi sono tre 1 indipendenti, ad esempio nei posti (1,2),(2,5) e (4,3).

Dim. Se vi è un numero M di 1 indipendenti, poiché due di questi stanno su linee diverse, sono necessarie almeno M linee per comprendere tutti gli 1; dunque $m \geq M$ (questa è la parte banale del teorema). Per dimostrare l'altra disuguaglianza $M \geq m$ facciamo vedere che possiamo trovare almeno m 1 indipendenti. La matrice data abbia p righe e q colonne, e supponiamo che il minimo numero m di linee che contengono tutti gli 1 sia costituito da r righe e s colonne: $m = r + s$. Possiamo supporre che si tratti delle prime r righe e delle prime s colonne (permutando, se necessario, righe e colonne, il che non influisce sul valore di M e di m).

Nell'esempio scambiamo tra loro le prime due righe, e quindi le colonne prima e terza e seconda e quinta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nella nuova matrice consideriamo le matrici rettangolari A' in alto a destra, ottenuta sopprimendo le prime s colonne e le righe dopo le prime r, e A'', la trasposta della matrice in basso a sinistra ottenuta sopprimendo le prime r righe e le colonne dopo le prime s.

Nell'esempio, si ha $r = 1$ e $s = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e le due matrici sono:

$$A' = (1 \quad 0 \quad 1), \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le due matrici cosí ottenute soddisfano la condizione di Hall. Infatti se in A', per qualche k, gli 1 su k righe stessero su meno di k colonne, e siano queste in numero di $k-i$, gli 1 della matrice A si troverebbero tutti su $(r-k)+(s+k-i) = r+s-i = m-i$ linee, ma ciò contraddice la minimalità di m. Per la forma matriciale del teorema di Hall (Teor. 4), esiste allora un insieme indipendente di 1, uno per ognuna delle r righe di A'. Analogamente A'' soddisfa le condizione di Hall, e abbiamo allora un insieme indipendente di 1, uno per ognuna delle s righe di A''. Poiché le due matrici A' e A'' non hanno elementi in comune otteniamo in questo modo un numero $r+s=m$ di 1 indipendenti, come si voleva. $\diamondsuit$

Come abbiamo visto, il teorema di König–Egerváry utilizza il teorema di Hall, ma a sua volta lo implica. Consideriamo infatti il teorema di Hall nella sua forma matriciale (Teor. 2). Esso afferma che se la condizione di Hall è soddisfatta, esiste un sistema indipendente di 1, uno per ognuna delle p righe della matrice. Ovviamente un tale sistema è di cardinalità massima. Vogliamo quindi dimostrare che aggiungendo al teorema di König–Egerváry ($M=m$) la condizione di Hall, si ha un sistema di 1 indipendenti in numero di p. Si ha cioè $M=m=p$, dove p è il numero di righe della matrice.

Infatti, se il minimo numero di linee che coprono tutti gli 1 è $r+s$, e si avesse $r+s<p$, consideriamo le $k=p-r$ righe al di fuori delle r. Gli 1 su queste si trovano solo sulle s colonne dette, ma essendo $s<p-r=k$, la condizione di Hall è violata per $k=p-r$. Pertanto, il minimo numero di linee che coprono tutti gli 1 è p, e il teorema di König–Egerváry fornisce allora un numero di 1 indipendenti pari a p.

2.1 Il teorema di König–Egerváry per grafi bipartiti

Teorema 5'. *In un grafo bipartito G, $V=V_1\cup V_2$, il minimo numero di vertici che nell'insieme sono incidenti a tutti gli archi è uguale al massimo numero di archi in un matching tra V_1 e V_2.*

Dim. Consideriamo la matrice di adiacenza di G, e siano i vertici di V_1 indici delle righe, e quelli di V_2 delle colonne. Un 1 nel posto (i,j) corrisponde a un arco (u_i,v_j), e dunque il minimo numero di vertici che nell'insieme sono incidenti a tutti gli archi è uguale al minimo numero m delle linee che nell'insieme contengono tutti gli 1. Per il Teor. 5, questo m è uguale al massimo numero M di 1 indipendenti, e poiché questi 1 corrispondono ad archi che a due a due non hanno vertici in comune (due di questi 1 non stanno mai sulla stessa linea) gli archi in questione sono archi di un matching. D'altra parte gli archi di un matching corrispondono a 1 indipendenti, e dunque gli M trovati costituiscono un matching massimo. $\diamondsuit$

3 Teorema di Birkhoff–von Neumann

Il prossimo Teor. 6 è dovuto a Birkhoff (e riscoperto poi da von Neumann), ed è anch'esso una conseguenza del teorema di Hall.

Ricordiamo che una *matrice di permutazione* è una matrice quadrata di 0 e 1 che ha un solo 1 in ogni riga e colonna. Se $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un vettore e A una matrice di permutazione $n \times n$, allora se $a_{i,j} = 1$, Av è il vettore che ha x_j nel posto i. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice di questo esempio induce la permutazione $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Nel teorema di Hall (Teor. 4) per una matrice quadrata, gli 1 che il teorema dà come rappresentanti distinti formano una matrice di permutazione. In una tale matrice, la somma su ogni riga e ogni colonna è costante e uguale a 1. Una matrice *stocastica* $A = (a_{i,j})$ è una matrice $n \times n$ a elementi non negativi nella quale la somma degli elementi su ogni riga (o su ogni colonna) è uguale a 1:

$$a_{i,j} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

o analogamente sommando sulle colonne.

Nota. Consideriamo n possibili stati di un certo processo, e supponiamo che la probabilità del processo di passare dallo stato s_i allo stato s_j dipenda solo dallo stato s_i e non dagli stati precedenti; denotiamola con $a_{i,j}$. Gli $a_{i,j}$ sono dunque una distribuzione di probabilità e pertanto $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Un tale processo si chiama *catena di Markov* (omogenea, finita), e la matrice delle $a_{i,j}$ *matrice di transizione.*

La matrice A è *bistocastica* (o *doppiamente stocastica*) se la somma degli elementi su ogni riga e su ogni colonna è uguale a 1. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Una matrice di permutazione è quindi bistocastica (anche se il corrispondente processo di Markov è deterministico). Vedremo tra un momento che ogni matrice bistocastica è una combinazione convessa di matrici di permutazione. Più in generale chiameremo bistocastica una matrice nella quale la somma degli elementi su ogni riga e su ogni colonna è uguale a una costante $\lambda \geq 0$.

Una matrice bistocastica soddisfa la condizione di Hall nel senso che segue. Sia data una matrice rettangolare i cui elementi sono numeri non negativi e non tutti nulli. La condizione di Hall si esprime allora come segue: per ogni k, gli elementi diversi da zero su k righe si trovano su almeno k colonne. Nel caso di una matrice bistocastica, poiché la somma su ogni riga e ogni colonna vale λ, la somma degli elementi su k righe vale $k\lambda$, e quindi se questi elementi si trovassero su meno di k colonne la loro somma sarebbe minore di $k\lambda$. Abbiamo quindi:

Lemma. *Una matrice bistocastica soddisfa la condizione di Hall.*

In una matrice bistocastica possiamo allora trovare, per il teorema di Hall, un insieme di elementi diversi da zero e indipendenti, uno per ogni riga.

Data in generale una matrice quadrata $n \times n$, $A = (a_{i,j})$, è noto che il determinante della matrice è dato da:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

dove S^n è il gruppo di tutte le permutazioni di n elementi, e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ è il *segno* della permutazione σ, che vale 1 se σ è pari e -1 se è dispari (ricordiamo che una permutazione è pari o dispari a seconda se presenta un numero pari o dispari di inversioni). Poiché le σ sono permutazioni, gli elementi di ciascun prodotto che compare in $\det(A)$ si trovano, uno e uno solo, in ogni riga e colonna.

Il *permanente* della matrice A è dato dalla stessa formula senza la funzione sgn:

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S^n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Un termine diverso da zero in $\operatorname{per}(A)$ nasce da una permutazione σ tale che gli elementi $a_{i,\sigma(i)}$ sono tutti diversi da zero. Poiché per $i \neq j$ si ha $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, di questi elementi diversi da zero ce ne è uno e uno solo su ogni riga e colonna; in altri termini, un termine diverso da zero corrisponde a un sistema indipendente di elementi diversi da zero, cioè a un SRD. Viceversa, ogni SRD contribuisce alla somma con un termine non zero. Il numero di termini diversi da zero nella somma dà quindi il numero di SRD. In particolare, per il lemma precedente si ha:

Corollario. *Se A è una matrice bistocastica, allora* $\mathrm{per}(A) \neq 0$.

Teorema 6 (Birkhoff (1946), von Neumann (1953)). *Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice bistocastica $n \times n$ di somma $\lambda > 0$ su righe e colonne. Allora A è somma di multipli non negativi di matrici di permutazione:*

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m, \quad \lambda_i \geq 0$$

per un opportuno m.

Ad esempio per la matrice (3) si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dim. Per induzione sul numero di elementi diversi da zero della matrice. Essendo $\lambda > 0$ vi sono almeno n elementi di questo tipo. Se ve ne sono esattamente n, allora ve ne è uno e uno solo su ogni riga e colonna, e tutti valgono λ. Ne segue $A = \lambda P$, dove P è la matrice di permutazione che ha 1 nei posti nei quali in A c'è λ. Supponiamo allora che A abbia $k > n$ elementi diversi da zero e supponiamo, per induzione, il teorema vero per matrici con meno di k elementi diversi da zero. Scegliamo un insieme indipendente S di elementi diversi da zero, uno per ogni riga, e sia λ_1 il più piccolo di questi. La matrice che ha 1 nel posto (i, j), se nel posto (i, j) di A c'è un elemento di S e zero altrove, è una matrice di permutazione P_1. Se $A_1 = A - \lambda_1 P_1$ non è la matrice nulla, è ancora una matrice a elementi non negativi, ogni riga e colonna ha somma $\lambda - \lambda_1$, e A_1 ha meno elementi diversi da zero di A. Per induzione,

$$A_1 = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i P_i$$

per un certo m, e dunque

$$A = \lambda_1 P_1 + A_1 = \lambda_1 P_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$$

come si voleva. Questa dimostrazione fornisce un algoritmo per trovare l'espressione richiesta, che termina quando si trova la matrice nulla. $\diamondsuit$

Una combinazione lineare $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ di $x_1, x_2, \ldots, x_m$ si dice *convessa* se $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ per ogni i. Si ha:

Corollario. *Una matrice bistocastica a somma* 1 *è una combinazione convessa di matrici di permutazione.*

Dim. Poichè le righe delle P_i e della A del teorema hanno somma 1, i coefficienti λ_i del Teor. 6 hanno somma 1. $\diamondsuit$

In generale, nel caso di somma $\lambda > 0$, la somma dei λ_i è λ.

Esempio. Vediamo come ottenere la decomposizione (4) della matrice (3) seguendo la dimostrazione del teorema. Se scegliamo come sistema indipendente $\{a_{2,1}, a_{1,2}, a_{3,3}\}$ abbiamo la matrice di permutazione $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; con $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ otteniamo:

$$A_1 = A - \frac{1}{2}P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B_1,$$

e:

$$A_2 = B_1 - \frac{2}{5}P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}B_2.$$

Qui B_2 è una matrice di permutazione: $B_2 = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ne segue:

$$A = \frac{1}{2}P_1 + A_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}B_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{5}P_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{5}P_2 + \frac{3}{10}P_3,$$

che è la decomposizione richiesta. Si ha $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{5}$ e $\lambda_3 = \frac{3}{10}$, e $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1$.

Il fatto che una matrice bistocastica ammetta un sistema di elementi indipendenti diversi da zero, uno per ogni riga, permette di dimostrare questo interessante risultato:

Proposizione. *Siano date due partizioni di un insieme finito X in sottoinsiemi della stessa cardinalità:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,\ A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset,\ i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_k| = |B_1| = |B_2| = \ldots = |B_k| = n.$$

Allora esiste un sistema di rappresentanti comune per gli A_i e i B_i.

Dim. Defininiamo una matrice $M = (a_{i,j})$ ponendo $a_{i,j} = |A_i \cap B_j|/n$. È chiaro che $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ (si ha $a_{i,j} = 0$ se $A_i \cap B_j = \emptyset$, e $a_{i,j} = 1$ se $A_i = B_j$). Ogni riga di questa matrice $k \times k$ ha somma 1:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} |A_i \cap B_j| = \frac{1}{n} |A_i \cap (\bigcup_{j=1}^{k} B_j)| = \frac{1}{n} |A_i \cap X| = \frac{1}{n} |A_i| = 1,$$

e analogamente ogni colonna sommando su i. La matrice M è allora doppiamente stocastica, e pertanto esiste un sistema di $a_{i,j} \neq 0$ indipendenti, uno per ogni riga. Allora il corrispondente insieme $A_i \cap B_j$ non è vuoto, e prendendo un elemento in ciascuno di questi k sottoinsiemi si ha il sistema di rappresentanti richiesto. ♢

4 Teorema "massimo flusso–minimo taglio"

Una *rete* (*network*, in inglese) è un grafo orientato sugli archi del quale è definita una funzione c detta *capacità* che associa a ogni arco uv un numero reale $c(uv) > 0$ detto *capacità dell'arco*, e nel quale vengono distinti due vertici, la *sorgente* s e il *pozzo* t, tali che gli archi su incidenti a s sono orientati nel senso $s \longrightarrow u$ e quelli ut incidenti a t nel senso $u \longrightarrow t$.

Data una rete, su di essa si può definire un *flusso* che va dalla sorgente s al pozzo t. Un flusso è una funzione f che assegna a ogni arco uv un numero reale non negativo $f(uv)$ tale che:

i) $f(uv) \leq c(uv)$ (*ammissibilità del flusso*: il flusso lungo un arco non supera la capacità dell'arco); se $f(uv) = c(uv)$ l'arco è *saturo*.

ii) $\sum_u f(uv) = \sum_w f(vw)$ per $v \neq s, t$ (*conservazione del flusso*: in ogni vertice diverso dalla sorgente e dal pozzo il flusso totale entrante è uguale a quello uscente).

Poiché per la *ii)* non c'è accumulazione di flusso nei vertici intermedi, la quantità di flusso uscente da s (cioè la somma dei flussi sugli archi incidenti a s) è uguale a quella che entra in t (cioè alla somma dei flussi sugli archi incidenti a t): questa quantità comune è il *valore* del flusso, che denoteremo con $v(f)$. Inoltre per la *i)* questo valore non può superare la somma delle capacità degli archi uscenti da s:

$$v(f) \leq \sum c(su) \tag{5}$$

dove u varia nell'insieme dei vertici u adiacenti a s.

Nota. Reti e flussi rappresentano situazioni pratiche nelle quali si tratta di inviare beni di vario tipo (acqua, petrolio, o anche informazioni, ecc.) da un punto (sorgente) a un altro (pozzo) lungo una rete di condutture (tubi, strade, web, ecc.) di grandezze diverse che possono sostenere solo una quantità limitata di unità alla volta (capacità). Nei punti di giunzione tra le condutture sono presenti in generale speciali dispositivi che regolano la direzione del flusso.

Un *taglio* (*cut* in inglese) in una rete è una partizione dei vertici in due sottoinsiemi, X e il suo complementare $\overline{X}$, tale che $s \in X$ e $t \in \overline{X}$. Gli archi $u \longrightarrow v$, con $u \in X$ e $v \in \overline{X}$, sono gli *archi del taglio*; la *capacità di un taglio* è la somma delle capacità dei suoi archi.

Un esempio di taglio è dato dall'insieme X, che consta del solo vertice s, e dal suo complementare $\overline{X}$ (tutti gli altri vertici). Gli archi di questo taglio sono gli archi $s \longrightarrow u$ uscenti da s e considerati nella (5). Come abbiamo visto con la (5), il valore di un flusso non può superare la capacità di questo taglio. Più in generale, dato un taglio $(X, \overline{X})$, il valore del flusso sugli archi $u \longrightarrow v$, con $u \in X$ e $v \in \overline{X}$, a cui si sottragga quello sugli archi $v \longrightarrow u$, con $u \in X$ e $v \in \overline{X}$, è lo stesso di quello da s a t, e questo per via della legge *ii*) di conservazione del flusso. In altre parole:

$$v(f) = \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} f(uv) - \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} f(vu), \tag{6}$$

dove la prima somma misura il flusso sugli archi che vanno da X a $\overline{X}$, la seconda il flusso che va nella direzione opposta.

Esempio. Nella rete della Fig. 8 sono segnati un flusso f e un taglio $X = \{s, b\}, \overline{X} = \{a, c, d, t\}$ (le capacità per il momento non ci interessano). Consideriamo il flusso sugli archi dei taglio:

$$f(sa) + f(sc) + f(sd) + f(bt) = 1 + 1 + 0 + 2 = 4, \;\; f(ab) + f(db) = 1 + 0 = 1.$$

La (6) dà in questo caso $v(f) = 4 - 1 = 3$, che è appunto il flusso che esce da s e arriva a t.

Consideriamo ancora la (6). Essendo i termini della seconda somma non negativi si ha:

$$v(f) \leq \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} f(uv),$$

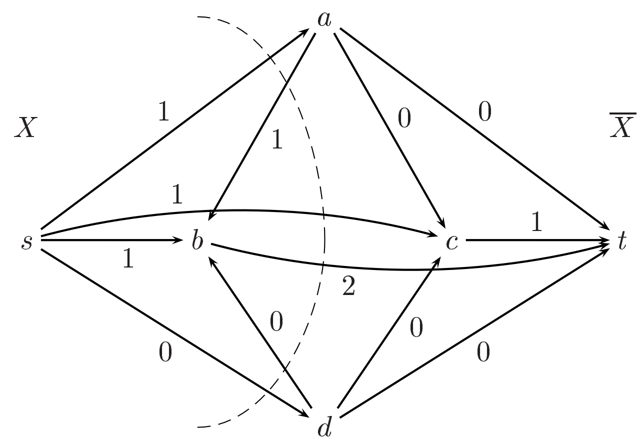

Figura 8: Rete su cui è definito un taglio.

e poiché, per la i), $f(uv) \leq c(uv)$, abbiamo:

$$v(f) \leq \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} c(uv). \tag{7}$$

In altre parole, non solo il valore di un qualunque flusso non può superare la capacità del particolare taglio con $X = \{s\}$ e $\overline{X}$ (tutti gli altri vertici), come abbiamo visto con la (5), ma *il valore di un qualunque flusso non può superare la capacità di un qualunque taglio.* Ne segue:

Lemma 1. *Se il valore di un flusso f è uguale alla capacità c di un taglio, allora un tale flusso f è massimo e la capacità c del taglio è minima.*

Dim. (Scriviamo f per $v(f)$). Infatti, se si avesse $f' > f$ per qualche f', allora $f' > c$: assurdo perché un flusso non può mai superare la capacità di un taglio. Quindi f è massimo. Se poi esistesse un taglio di capacità $c' < c$, allora $c' < f$, e il flusso f sarebbe superiore alla capacità del taglio c'. Quindi c è minimo. $\diamondsuit$

Sia ora f un flusso in una rete, e sia $s = u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n = t$ un cammino da s a t tale che lungo gli archi $u_i \longrightarrow u_{i+1}$ (archi "verso t") il flusso è minore della capacità dell'arco (l'arco uv non è saturo), mentre sugli archi $u_i \longleftarrow u_{i+1}$ (archi "verso s") il flusso non è nullo. Un tale cammino si dice *aumentante* perché le proprietà dette permettono di aumentare il flusso nella rete. Consideriamo infatti la differenza $c - f$ sugli archi $u_i \longrightarrow u_{i+1}$, e il minimo ε_1 su tutti questi archi; sia poi ε_2 il minimo valore di f sugli archi $u_{i+1} \longleftarrow u_i$, ed ε il minimo tra ε_1 e ε_2. Possiamo allora modificare il flusso lungo il cammino, e dunque nella rete, aumentandolo di ε sugli archi $u_i \longrightarrow u_{i+1}$, e diminuendolo di ε sugli archi $u_i \longleftarrow u_{i+1}$ ottenendo un flusso il cui valore supera quello di f della quantità ε. (Si tratta ancora di un flusso in quanto le condizioni i) e ii) sono soddisfatte: il flusso entrante in un dato vertice del cammino e quello uscente sono stati infatti aumentati di una stessa quantità o, se i vertici non appartengono al cammino, non hanno subito variazioni).

Esempio. Nella rete della Fig. 8 supponiamo che le capacità degli archi siano tutte uguali a 4. Il cammino: $s \xrightarrow{4|1} a \xrightarrow{4|0} t$ è aumentante: si può aumentare il flusso sui due archi di $\varepsilon = 3$. Si ottiene $s \xrightarrow{4|4} a \xrightarrow{4|3} t$, e il nuovo cammino non è più aumentante in quanto l'arco $s \to a$ è ora saturo. Il flusso totale sulla rete è aumentato di 3. Nel cammino:

$$s \xrightarrow{4|1} b \xleftarrow{4|1} a \xrightarrow{4|0} c \xrightarrow{4|1} t$$

si ha $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 1$ e quindi $\varepsilon = 1$. Si ottiene:

$$s \xrightarrow{4|2} b \xleftarrow{4|0} a \xrightarrow{4|1} c \xrightarrow{4|2} t,$$

e questo cammino non più aumentante per la presenza del flusso 0 lungo l'arco $b \longleftarrow a$. In questo caso il flusso totale sulla rete è aumentato di 1.

Poiché i possibili flussi sulla rete hanno tutti un valore limitato (v. (5)), esiste un valore massimo che un flusso può raggiungere. Ci chiediamo ora se è possibile stabilire, a partire soltanto dalla rete, qual è questo valore (o, come anche si dice, qual è il *flusso massimo*). La risposta è positiva, ed è il contenuto del seguente teorema di minimax che va sotto il nome di teorema "massimo flusso–minimo taglio" (*max flow–min cut*, in inglese).

Teorema 7 (Ford–Fulkerson, 1956). *Su una rete, il massimo valore che può assumere un flusso è uguale al minimo valore delle capacità dei possibili tagli.*

Dim. Facciamo vedere che, a partire da un flusso f di valore massimo, è possibile costruire un taglio $(X, \overline{X})$ di capacità c uguale al valore di f. Per il Lemma 1 il taglio sarà minimo, e il teorema dimostrato. Cominciamo col mettere s in X:

a) $s \in X$,

e aggiungiamo vertici a X con la seguente regola:

b) se $u \in X$, $u \longrightarrow v$ è un arco, e l'arco non è saturo, mettiamo v in X;
se $u \in X$, $u \longleftarrow v$ è un arco, e il flusso su quest'arco non è nullo, mettiamo v in X.

Osserviamo ora che se l'insieme di vertici $X = \{s, x, y, \ldots\}$ cosí costruito contiene il vertice t, allora esiste un cammino da s a t:

$$s = u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n = t$$

tale che gli archi $u_i \longrightarrow u_{i+1}$ non sono saturi, mentre sugli archi $u_i \longleftarrow u_{i+1}$ il flusso non è nullo. Si tratta allora di un cammino aumentante, ma ciò è escluso perché f è supposto massimo. Ne segue che X non contiene t. Resta quindi determinata una partizione dei vertici nei due insiemi X (che contiene s) e $\overline{X}$ (che contiene t), e quindi un taglio $(X, \overline{X})$ (per sottolineare la dipendenza del taglio da f si può scrivere $(X_f, \overline{X}_f)$).

Ci resta da dimostrare che il valore del flusso f è uguale alla capacità di questo taglio. Per $u \in X$ e $v \in \overline{X}$, u e v adiacenti, si ha:

- $f(uv) = c(uv)$, perché tutte queste coppie uv sono sature;
- $f(vu) = 0$, per $v \in \overline{X}$, $u \in X$,

(altrimenti, in entrambi i casi, v apparterrebbe a X). La (6) diventa allora:

$$v(f) = \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} f(uv) - \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} f(vu) = \sum_{u \in X,\, v \in \overline{X}} c(uv) - 0 = c(X, \overline{X}).$$

Il valore di f è dunque uguale alla capacità c del taglio. Per il Lemma, questo taglio è minimo. $\diamondsuit$

Corollario 1. *Un flusso f è massimo se e solo se non esistono cammini aumentanti.*

Dim. Se f è massimo, non può essere aumentato, e dunque non esistono cammini aumentanti. Viceversa, se non esistono cammini aumentanti l'insieme X definito come nel teorema usando f non contiene t, e dunque X e $\overline{X}$ costituiscono un taglio che separa s e t e la cui capacità è uguale al valore di f. Pertanto, f è massimo. $\diamondsuit$

Nel caso in cui capacità e flussi siano interi, il seguente algoritmo permette di ottenere un flusso massimo.

Algoritmo

1. Cominciare con un flusso f ammissibile (v. i)), ad esempio $f = 0$ su tutti gli archi.
2. Finché esiste un cammino aumentante, aumentare il flusso lungo questo cammino (poiché capacità e flussi hanno valori interi, il flusso aumenta almeno di 1 per ogni cammino aumentante).
3. Restituire f.

A priori, il flusso ottenuto con questo algoritmo potrebbe essere aumentato in altro modo che non sia quello dei cammini aumentanti. Ma il Cor. 1 dimostra che ciò non è possibile.

Corollario 2. (TEOREMA DI INTEGRALITÀ) *Se le capacità e il flusso iniziale sono a valori interi anche il flusso massimo è intero.*

Dim. L'algoritmo comincia con un flusso intero e aumenta ogni volta il flusso ancora di un intero. Poiché termina con un flusso massimo, questo sarà intero. $\diamondsuit$

Nota. Se capacità e flusso iniziali sono numeri razionali, moltiplicando per una costante si riducono a interi e allora, come si è visto, l'algoritmo termina in un numero finito di passi. Se però non sono razionali l'algoritmo può continuare indefinitamente senza fermarsi, e senza raggiungere il valore massimo.

Esempio. Nella rete rappresentata in Fig. 9 ogni arco è etichettato con una coppia, il primo elemento della quale è la capacità dell'arco, il secondo il flusso sull'arco. A partire dal flusso iniziale indicato in figura, vogliamo determinare il flusso massimo, un taglio minimo, i due insiemi X e $\overline{X}$ di vertici che determinano questo taglio, e verificare che il flusso massimo coincide con la capacità del taglio. Il procedimento è illustrato nella Fig. 10, nella quale sono indicati i cammini aumentanti da s a t scelti a ogni passo. Su tali cammini, sopra gli archi sono indicati capacità e flusso prima dell'aumento e sotto gli archi sono indicati capacità e flusso dopo l'aumento. A destra dei cammini è indicato il massimo incremento (o decremento per gli archi che vanno da t ad s) che è possibile apportare al flusso. A ogni passo è evidenziato con un rettangolino l'arco che si satura (oppure quello che va da t ad s su cui il flusso si annulla).

Al termine dell'algoritmo il flusso è quello indicato nella Fig. 11, e gli insiemi X e $\overline{X}$ determinati secondo a) e b) del teorema sono:

$$X = \{s, a, b, d, g\} \quad \text{e} \quad \overline{X} = \{c, e, f, h, i, t\},$$

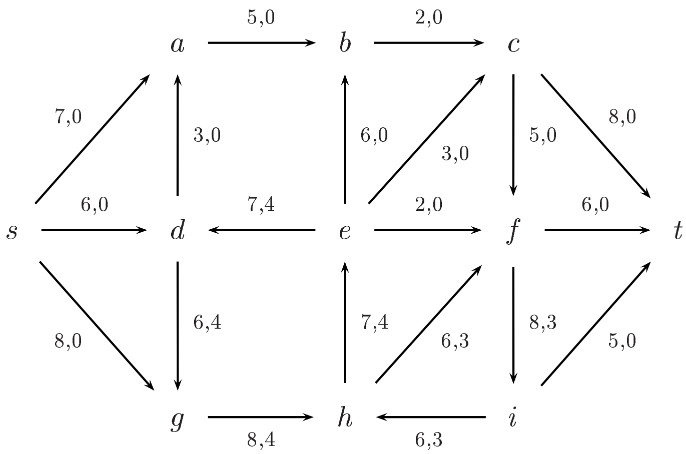

Figura 9: Rete e flusso.

$$s \xrightarrow[7,2]{7,0} a \xrightarrow[5,2]{5,0} b \xrightarrow[\boxed{2,2}]{2,0} c \xrightarrow[8,2]{8,0} t \qquad \varepsilon = 2$$

$$s \xrightarrow[6,3]{6,0} d \xleftarrow[7,1]{7,4} e \xrightarrow[\boxed{3,3}]{3,0} c \xrightarrow[8,5]{8,2} t \qquad \varepsilon = 3$$

$$s \xrightarrow[6,4]{6,3} d \xleftarrow[\boxed{7,0}]{7,1} e \xrightarrow[2,1]{2,0} f \xrightarrow[6,1]{6,0} t \qquad \varepsilon = 1$$

$$s \xrightarrow[8,3]{8,0} g \xrightarrow[8,7]{8,4} h \xrightarrow[\boxed{6,6}]{6,3} f \xrightarrow[6,4]{6,1} t \qquad \varepsilon = 3$$

$$s \xrightarrow[8,4]{8,3} g \xrightarrow[\boxed{8,8}]{8,7} h \xleftarrow[6,2]{6,3} i \xrightarrow[5,1]{5,0} t \qquad \varepsilon = 1$$

Figura 10: Cammini aumentanti nella rete della Figura 9.

e gli archi da X a $\overline{X}$ del taglio minimo sono bc e gh. Si verifica che questi archi sono saturi, e che sugli archi da $\overline{X}$ a X, e cioè eb ed ed, il flusso è zero. Flusso massimo e taglio minimo coincidono: $f(sa) + f(sd) + f(sg) = 2 + 4 + 4 = 10$; $c(bc) + c(gh) = 2 + 8 = 10$.

Un altro taglio è dato da $X = \{s, b, f, i\}$ e $\overline{X} = \{a, c, d, e, g, h, t\}$. Per il flusso sugli archi del taglio si ha $f(sa) = 2, f(sd) = 4, f(sg) = 4, f(bc) = 2, f(fi) = 3, f(ft) = 4, f(ih) = 2, f(it) = 1$, e dunque $\sum_{u \in X, v \in \overline{X}} f(uv) = 24$, mentre per il flusso da $\overline{X}$ a X si ha $f(ab) = 2, f(cf) = 3, f(ef) = 1, f(eb) = 0, f(hf) = 6$ e quindi $\sum_{u \in X, v \in \overline{X}} f(vu) = 12$. La differenza (6) tra i due flussi è dunque 22–12=10, che è il valore del flusso.

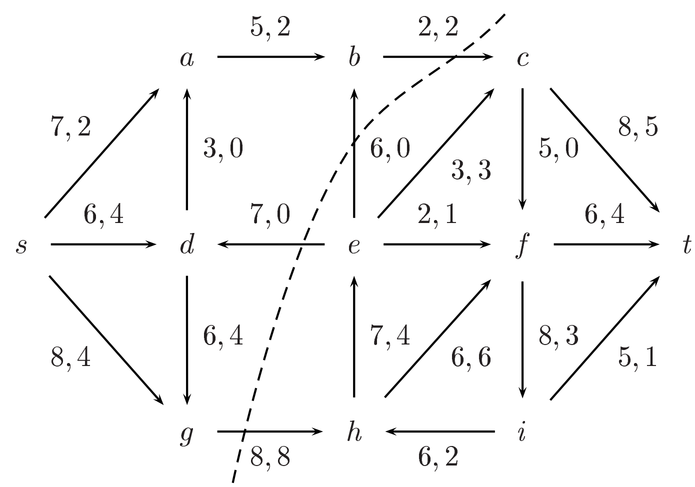

Figura 11: Rete della Figura 9 con flusso massimo e taglio minimo.

Questioni riguardanti grafi bipartiti si possono enunciare in termini di flussi considerando reti del tipo seguente. Sia G un grafo bipartito, $V = V_1 \cup V_2$, e sia G' la rete ottenuta aggiungendo a G' due vertici s e t e archi orientati da s a V_1 e da V_2 a t, e orientando gli archi di G da V_1 a V_2. Le capacità degli archi si assegnano di volta in volta a seconda della natura del problema.

Lemma. *Nel grafo bipartito G un matching M tra V_1 e V_2 corrisponde a un flusso in G'. Il matching è massimo se e solo se il flusso è massimo.*

Dim. Consideriamo la rete G' con tutti gli archi di capacità 1. Se M è un matching in G, sia f il flusso ottenuto ponendo $f = 1$ sugli archi di M e sugli archi incidenti a s, ai vertici di M e a t, e 0 su tutti gli altri archi. Si tratta di un flusso in quanto se $u \in V_1$ e $uv \in M$, in u arriva un flusso 1 (sull'arco su) e parte un flusso 1 (sull'arco uv); gli altri archi di G incidenti a u portano un flusso 0 perché nessun altro arco può stare in M. Se $u \notin M$ il bilancio del flusso in u è zero. Il ragionamento per i vertici di V_2 è analogo.

Viceversa, se f è un flusso, gli archi di G sui quali f vale 1 costituiscono un matching.

Ora, se M è massimo, sia f il flusso determinato da M. Se f non è massimo, sia $f' > f$. Allora gli archi di G sui quali f' vale 1 costituiscono un matching M' con $M' > |M|$, e M non sarebbe massimo. Viceversa, se f è massimo, e il matching M determinato da f non lo è, sia $|M'| > |M|$. Allora per il flusso f' determinato da M', che vale 1 sugli archi di M, si avrebbe $f' > f$, e f non sarebbe massimo. $\diamondsuit$

Nota. Si vede subito che a un cammino alternante nel grafo bipartito G corrisponde un cammino aumentante nella rete G'.

I teoremi di König–Egerváry e di Hall (nella forma per grafi bipartiti) seguono dal teorema max flow–min cut.

Teorema di König–Egerváry (Teor. $5'$). *In un grafo bipartito G, $V = V_1 \cup V_2$, il minimo numero di vertici che nell'insieme sono incidenti a tutti gli archi è uguale al massimo numero di archi in un matching tra V_1 e V_2.*

Dim. Sia G' la rete ottenuta da G come nella dimostrazione del vlemma. Sia S un insieme di vertici incidenti a tutti gli archi di G, e sia Δ l'insieme degli archi su, $u \in S \cap V_1$, e vt, $v \in S \cap V_2$ (si tratta di un taglio perché per andare da s a t si passa necessariamente per un arco di G, e dunque per un vertice di S in quanto ogni arco di G è incidente a un vertice di S). Se un taglio C contiene archi uv dove $u \in V_1$ e $v \in V_2$, sostituendo questi con archi del tipo su o con vt, otteniamo ancora un taglio, e questo consta di archi del tipo visto sopra. Eliminando eventuali ripetizioni si conclude che nessun taglio può contenere meno archi di quanti ne contiene Δ. Ne segue:

minimo numero di vertici che nell'insieme sono incidenti a tutti gli archi di G=
minimo numero di archi di un taglio di G' =
flusso massimo in G' =
massimo numero di archi in un matching di G,

dove la prima uguaglianza è stata appena dimostrata, la seconda è il Teor. 7 (poiché la capacità di ogni arco su e vt è 1, la capacità di un taglio è data dal numero di archi del taglio stesso), e la terza è data dal lemma (v. Fig. 12). $\diamondsuit$

Nella figura:

- ogni arco del grafo bipartito è incidente a uno dei tre vertici A, G, H;

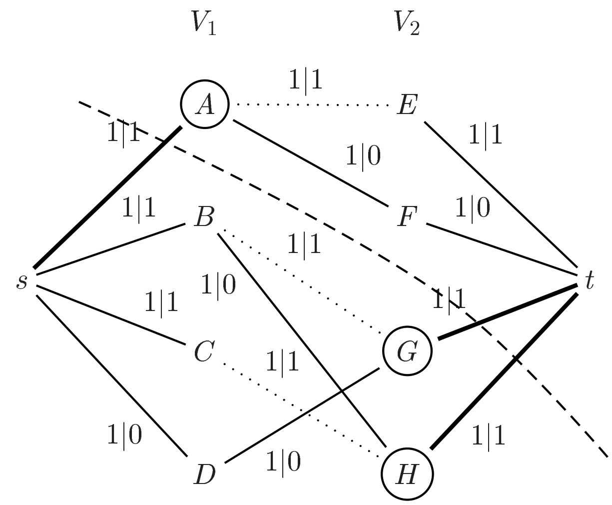

Figura 12: Le uguaglianze del teorema (in questo caso il numero è 3).

- gli insiemi $X = \{s, B, C, D, G, H\}$ e $\overline{X} = \{A, E, F, t\}$ formano un taglio, e i tre archi evidenziati in grassetto costituiscono gli archi del taglio (si osservi che i vertici A, G, H sono, assieme a s e t, quelli incidenti agli archi del taglio);
- il flusso lungo $(s, A, E, T), (s, B, G, T), (s, C, H, T)$ vale 3 ed è massimo;
- i tre archi tratteggiati costituiscono un matching massimo.

Teorema di Hall (Teor. 3). *Sia G un grafo bipartito, $V = V_1 \cup V_2$. Allora esiste un V_1-matching in G se e solo se per ogni insieme S di vertici di V_1 i vertici $J(S)$ di V_2 adiacenti a qualche vertice di S sono in numero maggiore o uguale a $|S|$: $|J(S)| \geq |S|$.*

Dim. Al solito la condizione di Hall è necessaria. Per la sufficienza consideriamo G' assegnando una capacità abbastanza grande, ad esempio $|V_1|+1$, agli archi di G, e 1 a tutti gli altri. Dimostriamo che la condizione di Hall implica che in G' i tagli hanno tutti capacità maggiore o uguale a $|V_1|$. Un taglio di capacità $|V_1|$ esiste (ad esempio quello che si ottiene sopprimendo gli archi da s a V_1, ognuno dei quali ha capacità 1), e quindi si tratta di un taglio minimo. Per il teorema max flow–min cut si avrà allora un flusso massimo di valore $|V_1|$, e per il lemma esisterà un V_1-matching. Facciamo vedere allora che un qualunque taglio C ha capacità maggiore o uguale a $|V_1|$ (la capacità assegnata agli archi di G è scelta in modo che nessuno di questi archi sia presente in un taglio minimo). Sia $C = (X, \overline{X})$ un taglio, e consideriamo $X_1 = X \cap V_1$ e $X_2 = X \cap V_2$. Se un arco del taglio appartiene al grafo G, allora la sua capacità è $|V_1| + 1$, e dunque la capacità di C è superiore a $|V_1|$. Supponiamo allora che gli archi di C siano solo del tipo su, $u \in V_1$ e vt, $v \in V_2$; avendo questi archi capacità 1, la capacità di C sarà data dal numero di archi che contiene. C consta degli archi da s a $V_1 \setminus X_1$ (poiché $s \in X$, se $su \in C$ allora $u \in \overline{X}$, e dunque u non sta in X, ma appartenendo a V_1 ciò significa che non sta in $X \cap V_1 = X_1$), e di quelli da X_2 a t (poiché $t \in \overline{X}$, se $vt \in C$ allora v deve appartenere a X, ma appartiene anche a V_2, e dunque appartiene a $V_2 \cap X = X_2$). Ne segue che c'è un arco di C per ogni vertice di $V_1 \setminus X_1$ e di X_2:

$$|C| = |V_1 \setminus X_1| + |X_2| = (|V_1| - |X_1|) + |X_2|.$$

Se nel grafo G esiste un arco uv con $u \in X \cap V_1$ e $v \in \overline{X} \cap V_2$, allora si tratta di un arco da X a $\overline{X}$, e dunque di un arco del taglio C, cosa che abbiamo escluso. Possiamo allora supporre che gli archi di G incidenti a $X \cap V_1$ siano tutti incidenti a $X \cap V_2$; in altre parole, $J(X_1) \subseteq X_2$, e dunque $|J(X_1)| \leq |X_2|$:

$$|C| = (|V_1| - |X_1|) + |X_2| \geq |V_1| - |X_1| + |J(X_1)|.$$

Ma $|J(X_1)| \geq |X_1|$ (qui entra in gioco la condizione di Hall, con $S = X_1$), cioè $|J(X_1)| - |X_1| \geq 0$, da cui:

$$|C| = |V_1| - |X_1| + |J(X_1)| \geq |V_1|. \qquad \diamondsuit$$