La forma nel discreto:

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -\gamma I_n S_n \\ I_{n+1} - I_n = \gamma I_n S_n - q I_n \\ R_{n+1} - R_n = q I_n \end{cases} \longrightarrow$$

La forma nel continuo:

$$
\begin{cases}
S_{n+1/2} - S_n & = & -\gamma I_n S_n \, \dfrac{1}{2} \\[2ex]
I_{n+1/2} - I_n & = & (\gamma I_n S_n - q I_n) \, \dfrac{1}{2} \\[2ex]
R_{n+1/2} - R_n & = & q I_n \, \dfrac{1}{2}
\end{cases}
\qquad \rightarrow
$$

La forma nel continuo:

$$\rightarrow \quad \begin{cases} S_{n+1/k} - S_n &= -\gamma I_n S_n \dfrac{1}{k} \\[2ex] I_{n+1/k} - I_n &= (\gamma I_n S_n - q I_n) \dfrac{1}{k} \\[2ex] R_{n+1/k} - R_n &= q I_n \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

La forma nel continuo:

da cui:

$$\begin{cases} S(t+\triangle t) - S(t) = -\gamma S(t)\, I(t)\, \triangle t \\ I(t+\triangle t) - I(t) = (\gamma S(t)\, I(t) - q\, I(t))\, \triangle t \\ R(t+\triangle t) - R(t) = q\, I(t)\, \triangle t \end{cases}$$

La forma nel continuo:

da cui dividendo membro a membro per $\triangle t$ e passando al limite per $\triangle t \to 0$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{S(t+\triangle t)-S(t)}{\triangle t} = -\gamma S(t)\, I(t) \\[2ex] \dfrac{I(t+\triangle t)-I(t)}{\triangle t} = \gamma S(t)\, I(t) - q\, I(t) \\[2ex] \dfrac{R(t+\triangle t)-R(t)}{\triangle t} = q\, I(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma SI \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \gamma S\, I - qI \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = qI \end{cases}$$

Equazioni differenziali lineari omogenee:

$$\begin{cases} y' = & a\,y \\ y(0) = & K \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y(t) = K\, \exp(a\,x)$$

$$\begin{cases} y' = & a(x)\,y \\ y(0) = & K \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y(t) = K\, \exp(\int_0^x a(s)\,ds)$$

$$y(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) > 0 \quad \forall x$$

Stime qualitative

Il carattere lineare di primo ordine omogenee delle due equazioni differenziali di S e di I

$$\begin{cases} S'(t) = (-\gamma\, I(t))\, S(t) \\ I'(t) = (\gamma S - q)\, I(t) \end{cases} \quad \rightarrow$$

implicano che le soluzioni di valori iniziali $S(0)$ e $I(0)$ positivi non si annullano mai:

$$\begin{cases} S(t) = S(0)\, \exp\left(-\gamma \displaystyle\int_0^t I(\tau)\, d\tau\right), \\ I(t) = I(0)\, \exp\left(\gamma \displaystyle\int_0^t S(\tau)\, d\tau - q\, t\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S(t) > 0, \\ I(t) > 0 \end{cases}$$

Stime qualitative

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma SI \\ \\ \dfrac{d(I+S)}{dt} = -qI \\ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S(t) \searrow \\ S(t) + I(t) \searrow \end{cases}$$

Esistono pertanto $\lim_{t\to+\infty} S(t), \quad \lim_{t\to+\infty} (S(t)+I(t))$

Siano

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = S(\infty), \quad \lim_{t\to+\infty} (S(t)+I(t)) = S(\infty) + I(\infty)$$

Quanto vale $I(\infty)$?

$$-\frac{d(S+I)}{dt} = qI \quad \rightarrow \quad (S(0)+I(0))-(S(t)+I(t)) = q\int_0^t I(\tau)\,d\tau$$

da cui

$$q\int_0^t I(\tau)\,d\tau \leq S(0)+I(0) \quad \rightarrow \quad I(\infty) = \lim_{t\to\infty} I(t) = 0$$

Qualcuno sfugge al contagio....

Problema:

Tutti i suscettibili finiranno comunque, prima o poi per ammalarsi o una parte di essi sfuggirá al contagio ?
In altri termini

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} 0 \\ \\ S_\infty > 0 \end{cases} \qquad ?$$

Quanto vale $S(\infty)$?

$$\begin{cases} S(t) = S(0)\,\exp\left(-\gamma \displaystyle\int_0^t I(\tau)\,d\tau\right) \\ -q \displaystyle\int_0^t I(\tau)\,d\tau \geq -(S(0)+I(0)) \end{cases}$$

$$S(t) \geq \exp\left(-\frac{\gamma}{q}(S(0)+I(0))\right)$$

da cui

$$S(\infty) \geq \exp\left(-\frac{\gamma}{q}(S(0)+I(0))\right)$$

Quanto vale $S(\infty)$?

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma S I \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \gamma S\, I - qI \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} q\,\dfrac{S'}{S} = -q\,\gamma\, I \\[2ex] \gamma(S' + I') = -\,q\,\gamma\, I \end{cases}$$

Ne segue

$$q\,\frac{S'}{S} - \gamma(S' + I') = 0$$

Quanto vale $S(\infty)$?

ovvero

$$q\,\frac{S'}{S} - \gamma(S' + I') = \frac{d}{dt}\,\{q\,\ln(S) - \gamma(S + I)\} = 0$$

da cui

$$q\,\ln(S(t)) - \gamma(S(t) + I(t)) = q\,\ln(S(0)) - \gamma(S(0) + I(0))$$

passando al limite per $t \to +\infty$ si ha quindi

$$q\,\ln(S(\infty)) - \gamma S(\infty) = q\,\ln(S(0)) - \gamma(S(0) + I(0))$$

Quanto vale $S(\infty)$?

Il valore $S(\infty)$ é soluzione dell'equazione

$$q \ln(x) - \gamma\, x = q \ln(S(0)) - \gamma S(0) - \gamma\, I(0)$$

Indicata con

$$f(x) = q \ln(x) - \gamma\, x$$

l'equazione precedente puó riscriversi come

$$f(x) = f(S(0)) - \gamma\, I(0)$$

Quanto vale $S(\infty)$?

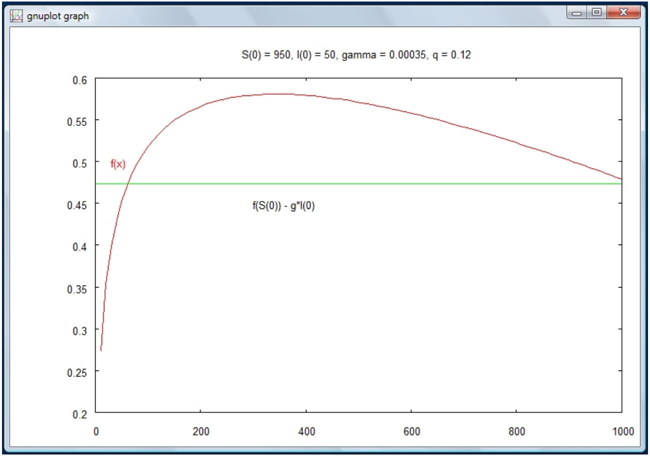

Figura: $S(0) = 950, I(0) = 50, \gamma = 0.00035, q = 0.12$

In rosso il grafico di $f(x) = q \ln(x) - \gamma x$, in verde la quota $f(S(0)) - \gamma I(0)$.

La funzione $I(t)$

- $I(t)$ é definita in tutto $\mathbb{R}_+$,
- é non negativa,
- é infinitesima a $+\infty$
- ... quindi ha massimo positivo.

La funzione $S(t)$ é decrescente: quindi

$$\gamma\, S(t) - q$$

é decrescente:

$\gamma\, S(t) - q > 0$	$\gamma\, S(t) - q < 0$
$I'(t) > 0$	$I'(t) < 0$
$I(t) \uparrow$	$I(t) \downarrow$

Indichiamo con t_{max} il punto (eventuale) in cui riesce

$$\gamma\, S(t_{max}) - q = 0$$

Detti t_{max} i punti in cui raggiunge il massimo o riesce $t_{max} = 0$ (e quindi anche $I(t)$ é decrescente) oppure

- in ogni t_{max} riesce $I'(t_{max}) = 0$
- quindi in tali t_{max} riesce $S(t_{max}) = \frac{q}{\gamma}$
- poiché $S(t)$ é decrescente c'é un solo punto t_{max}.

Quanto vale $S(\infty)$?

Riesce

$$S(\infty) \leq \frac{q}{\gamma}$$

$S(t)$ é decrescente,
quindi $S(t) \searrow S(\infty)$.
Se riuscisse $S(\infty) > \dfrac{q}{\gamma}$
allora $I(t)$ sarebbe crescente

$$I(t) \geq I(0) \quad \rightarrow \quad I(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \geq I(0) > 0$$

contrariamente al fatto precedentemente riconosciuto $I(\infty) = 0$.

Effetto soglia

$$I_{n+1} = I_n + \gamma(S_n - \frac{q}{\gamma})I_n$$

Il numero degli infetti

- aumenta di giorno in giorno se $S_n > \frac{q}{\gamma}$
- diminuisce di giorno in giorno se $S_n < \frac{q}{\gamma}$

Il valore

$$\frac{q}{\gamma}$$

rappresenta una soglia nello sviluppo dell'epidemia !

Effetto soglia

Tenuto conto che il numero dei suscettibili S_n diminuisce di giorno in giorno, prima o poi esso finirá sotto il valore soglia

$$\frac{q}{\gamma}$$

da quel giorno il numero di ammalati comincerá a calare.

....da quel giorno l'epidemia tenderá ad estinguersi.

Esempio:

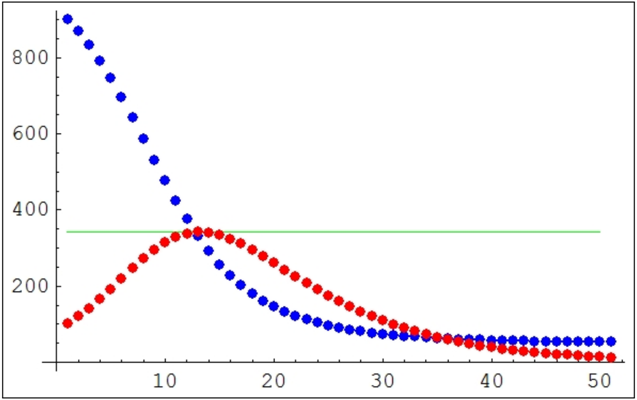

Figura: $N = 1000$, $S_0 = 900$, $I_0 = 100, \gamma = 0.00035$, $q = 0.12$

Esempio:

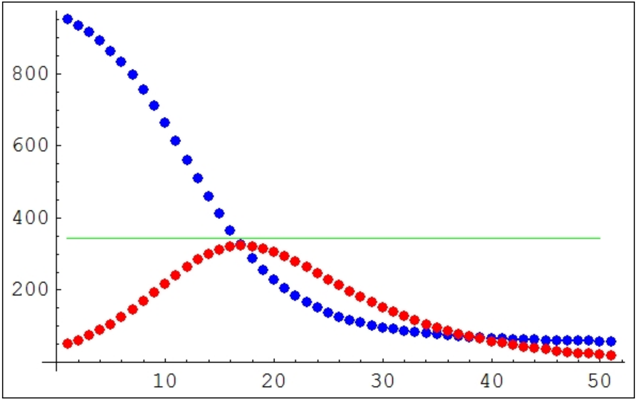

Figura: $N = 1000,\ S_0 = 950,\ I_0 = 50, \gamma = 0.00035,\ q = 0.12$

Esempio:

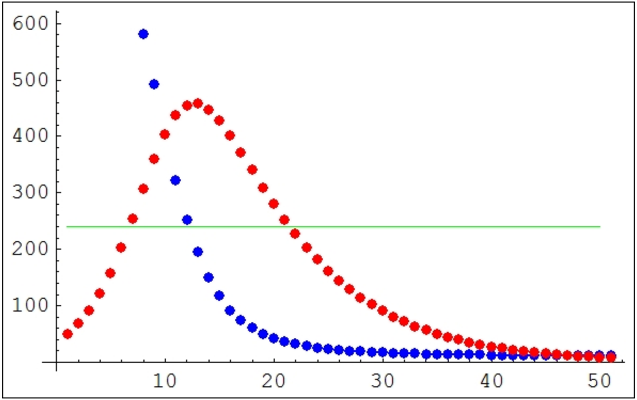

Figura: $N = 1000,\ S_0 = 950,\ I_0 = 50, \gamma = 0.00050,\ q = 0.12$

Esempio: effetto soglia

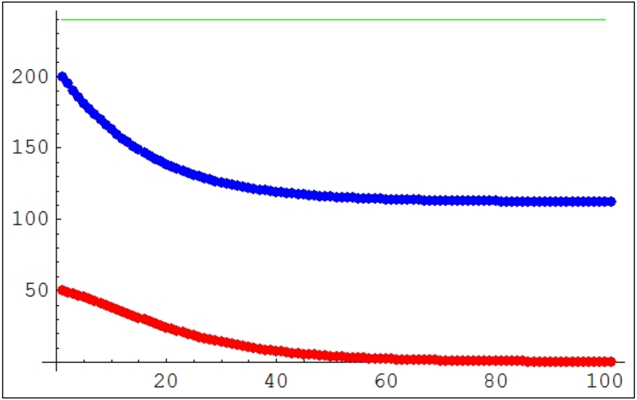

Figura: $N = 1000,\ S_0 = 200,\ I_0 = 50, \gamma = 0.00050,\ q = 0.12$