

Ombre, obelischi, meridiane

Sistema tolemaico, sistema copernicano.

Piano Lauree Scientifiche

2010-2011

Liceo Scientifico Statale

A.Avogadro

ROMA

L.Pietrobono

ALATRI

28 febbraio 2011

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?
Ombre e luci
La traiettoria della Terra intorno al Sole
La durata del giorno
la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.
La direzione di un obelisco



Luigi Pietrobono



Liceo Scientifico di Roma

Amedeo Avogadro



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

A. Pelagalli
C.D'Auria

G.Grossetti
R.Paesani

L.Lamberti

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Ombre, obelischi, meridiane

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Il piano *Lauree scientifiche* richiama l'attenzione dei giovani all'osservazione scientifica della natura che tali corsi di laurea curano.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Il piano *Lauree scientifiche* richiama l'attenzione dei giovani all'osservazione scientifica della natura che tali corsi di laurea curano.

La cultura scientifica é, oggi, spesso confusa con affabulazioni su

- particelle elementari,
- radiazioni cosmiche,
- DNA, nanotecnologie, processori, ecc.

Responsabile di tale ipocrisia é la diffusa superficialitá che scambia
la

riflessione scientifica

con discorsi infarciti di

parole scientifiche

vuote...

Responsabile di tale ipocrisia é la diffusa superficialità che scambia
la

riflessione scientifica

con discorsi infarciti di

parole scientifiche

vuote...

Ricorda un po' il *latinorum* di don Abbondio, dietro il quale, come
Manzoni scriveva, si nascondevano (si nascondono) ignoranti e
ipocriti...

L'idea di occuparsi dell'ombra di un obelisco

- ci obbliga a **osservare** come essa cambi nel tempo,
- ci obbliga a **riflettere** su cosa possa farla cambiare,
- ci obbliga a **usare la matematica**: geometria, calcolo, approssimazioni,...

Le osservazioni fatte conducono inevitabilmente a riflettere sulla

posizione della sorgente di luce

In altri termini le posizioni (reciproche) della Terra e del Sole: o meglio della nostra *piazza dell'obelisco* il tal giorno, alla tale ora, rispetto al Sole.

GEOCENTRISMO	Platone, <i>Tolomeo</i> , Tommaso d'Aquino,
ELIOCENTRISMO	Aristarco, <i>Copernico</i> , Galilei, Newton.

É possibile, seguendo la direzione della luce del Sole in relazione al paesaggio decidere se sia il Sole a girare intorno alla Terra. o sia la Terra a ruotare su se stessa ?

No !

La sola osservazione, ad esempio la misura dell'angolo del Sole con la verticale del luogo, non consente di decidere.

sistemi2.html

Modelli matematici

Servono in genere a leggere i fenomeni naturali con maggiore chiarezza: la fisica e, in misura minore la chimica, hanno da secoli individuato, considerato e misurato con attenzione alcune grandezze fondamentali

masse, forze, pressioni, temperature, ecc.

traverso le quali comprendere la natura, e prevederne, con buona approssimazione, l'evoluzione.

I sistemi geocentrico e eliocentrico rispondono a numerose domande fisiche: il mondo

- é geocentrico ? no !
- é eliocentrico ? no!

tuttavia tramite i due modelli sono state riconosciute importanti verità sul sistema terra-sole, terra-luna, pianeti, ecc.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Il sistema Tolemaico

Il sistema Copernicano

Il sistema Tolemaico

Il Sole ruota intorno alla Terra compiendo una circonferenza appartenente ad un piano obliquo rispetto alla verticale del luogo. L'angolo di tale piano con detta verticale varia in modo periodico, con periodo un anno.

Il sistema Copernicano

Per sistema copernicano si intende

- Il Sole come centro (immobile) del sistema dei pianeti (Terra, Giove,...),
- la traiettoria della Terra intorno al Sole é una circonferenza,
- la velocità angolare é costante.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Il sistema Tolemaico

Il sistema Copernicano

Il Sole illumina in ogni ora e ogni giorno metà della Terra: cioè la zona illuminata é una semisfera terrestre.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Il sistema Tolemaico

Il sistema Copernicano

Il Sole illumina in ogni ora e ogni giorno metà della Terra: cioè la zona illuminata é una semisfera terrestre.



Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Il sistema Tolemaico

Il sistema Copernicano

Analogamente illumina in ogni ora e ogni giorno metà della Luna:
a noi non appare sempre così per il semplice motivo che la metà
illuminata non coincide necessariamente con la metà che vediamo.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Il sistema Tolemaico

Il sistema Copernicano

Analogamente illumina in ogni ora e ogni giorno metà della Luna:
a noi non appare sempre così per il semplice motivo che la metà
illuminata non coincide necessariamente con la metà che vediamo.



A motivo della rotazione giornaliera della Terra la semisfera illuminata si sposta di conseguenza:
considerato che l'asse SUD-NORD, asse di rotazione della Terra, é obliquo al piano di rivoluzione in certi periodi la semisfera illuminata

- include il polo Nord,
- in altri periodi il polo Sud,
- in qualche giorno eccezionale li include entrambi,

cioé la semisfera illuminata ha latitudini diverse di giorno in giorno.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

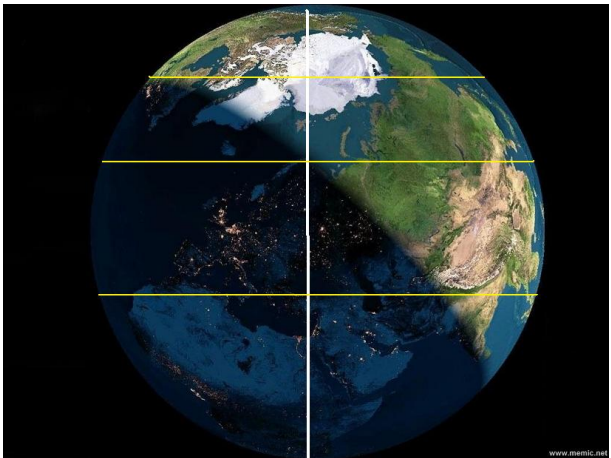
La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

La luce del Sole illumina la sfera terrestre, illumina sempre esattamente la semisfera ad esso rivolta:



www.memlc.net



La durata del giorno

Tuttavia la durata delle nostre giornate é diversa da giorno a giorno: come mai ?

La Terra gira sempre intorno a uno stesso asse Nord-Sud

obliquo

rispetto al piano sul quale la Terra compie la sua rivoluzione intorno al Sole.

La durata del giorno dipende quindi:

- dal giorno dell'anno (cioé dalla posizione della Terra nell'orbita di rivoluzione attorno al Sole),
- dalla latitudine del posto (siti piú settentrionali, piú meridionali, artiche, antartiche,...).

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

La durata del giorno

La durata del giorno, anzi l'ora dell'alba e quella del tramonto sono tradizionalmente riportati nei Calendari popolari:



✠ FEBBRAIO

SOLE

1° Febbraio
○ Leva ore 7,25
* Tramonta ore 17,21

15 Febbraio
○ Leva ore 7,08
* Tramonta ore 17,39

Nell'anno 1636, il giorno 17 gennaio [di Genova] una furibonda lotta di v in poco d'ora tutto il mare si scomv fremo. La bufera insiste con ostinata passando dal mare al porto, ne mette que: assalta i navigli, e flagellandoli gendoli a cozzar gli uni contro gli al

1 M S. Verdiana vr. - S. Orso di Aosta - S. Innocenza vr.

La passione non ha pazienza

I valori indicati sono tuttavia convenzionali, perché convenzionale è la scelta dei fusi orari tramite i quali ci esprimiamo:

non è raro incontrare informazioni in cui si parla dell'ora in cui il Sole è più alto sull'orizzonte: dovrebbe essere, naturalmente il mezzogiorno, invece si legge 12.18, oppure 11.47, ecc.

La durata del giorno invece - intervallo tra l'alba e il tramonto - è esatta...!

Proveremo a calcolarla con gli strumenti trigonometrici a nostra disposizione.

La durata del giorno

Sia (xyz) un riferimento cartesiano con l'origine nel centro della Terra e z l'asse *SUD-NORD*: i vettori

$$\vec{v} = \{\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \cos(\varphi) \sin(\vartheta), \sin(\varphi)\}$$

rappresentano la direzione verticale (quella del filo a piombo) lungo i punti di latitudine φ : i vari ϑ corrispondono alle diverse longitudini.

Se il Sole é visto secondo la direzione del vettore

$$\vec{s} = \{0, \cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0)\}$$

i valori ϑ rispetto ai quali il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{s} > 0$ sono le longitudini dei punti che risultano illuminati dal Sole.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

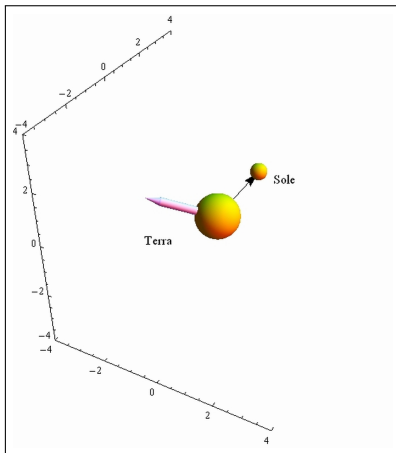
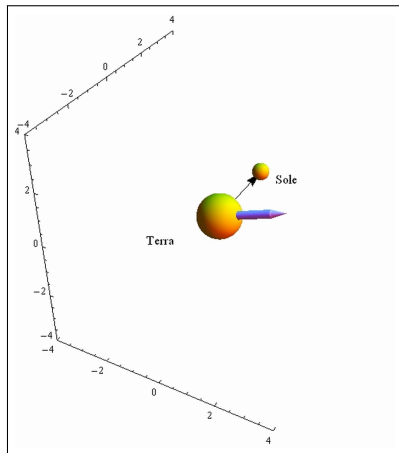


Figura: $\vec{v} \cdot \vec{s} > 0$ soleggiata, $\vec{v} \cdot \vec{s} < 0$, notturna.

Esempio: la notte polare.

Supponiamo $\varphi = \pi/2$, il polo Nord

$$\vec{v} = \{0, 0, 1\}$$

riesce $\vec{v} \cdot \vec{s} = \sin(\varphi_0)$ c'è luce finché la direzione del Sole corrisponde ad una latitudine $\varphi_0 > 0$ dal 21 marzo al 21 settembre.

Esempio: le giornate romane.

Supponiamo di stare alla latitudine di Roma, $\varphi = 42$, circa

$$\vec{v} = \{0.743 \cos(\vartheta), 0.743 \sin(\vartheta), 0.669\}$$

riesce

$$\vec{v} \cdot \vec{s} = 0.743 \cos(\varphi_0) \sin(\vartheta) + 0.669 \sin(\varphi_0)$$

c'è luce finché la direzione del Sole corrisponde ad una latitudine per la quale riesca

$$\sin(\vartheta) \geq -\frac{0.669 \sin(\varphi_0)}{0.743 \cos(\varphi_0)}$$

Ad esempio, pensando alla fine di febbraio, la direzione del Sole presenta un angolo $\varphi_0 \approx -8$ e quindi

$$\sin(\vartheta) \geq -\frac{0.669 \sin(\varphi_0)}{0.743 \cos(\varphi_0)} \approx 0,137$$

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?
Ombre e luci
La traiettoria della Terra intorno al Sole
La durata del giorno
la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.
La direzione di un obelisco

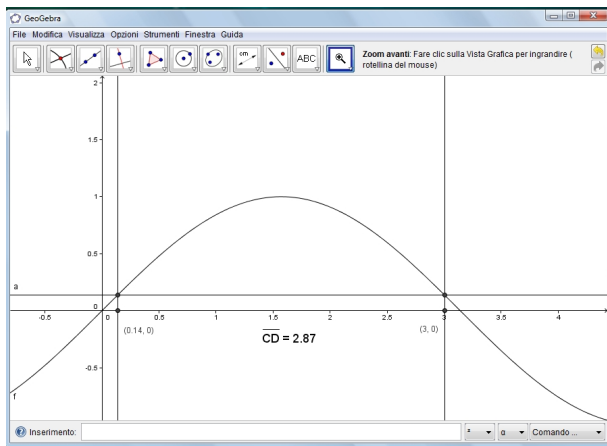


Figura: $\sin(\vartheta) \geq 0.137$

$$\sin(\vartheta) \geq 0,137 \quad \rightarrow \quad 0.14 \leq \vartheta \leq 3$$

intervallo di lunghezza ≈ 2.86 in radianti che, riportato in ore

$$2\pi = 6.28 \Leftrightarrow 24 \text{ h} \quad \Leftrightarrow \quad 2.86 \Leftrightarrow 10,95 \text{ h}$$

rappresenta circa 11 ore.

Il Calendario di Frate Indovino ricorda che intorno al 1 marzo il Sole sorge alle 6.47 e tramonta alle 17.57, piú o meno 11 ore e 10 minuti in cui si vede il Sole:

forse Frate Indovino é un po' piú meridionale...!

Il giorno solare

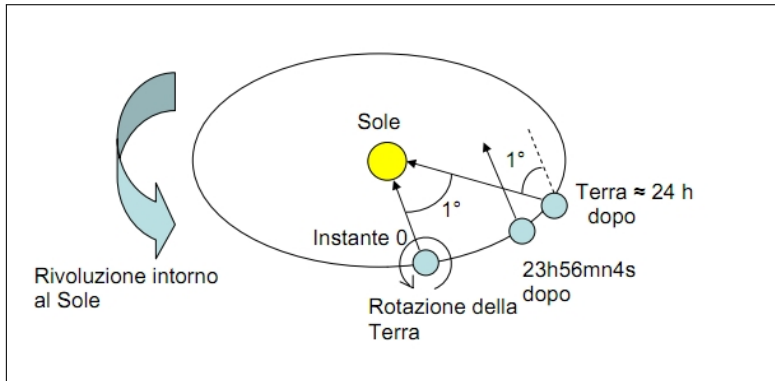


Figura: Il giorno solare.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

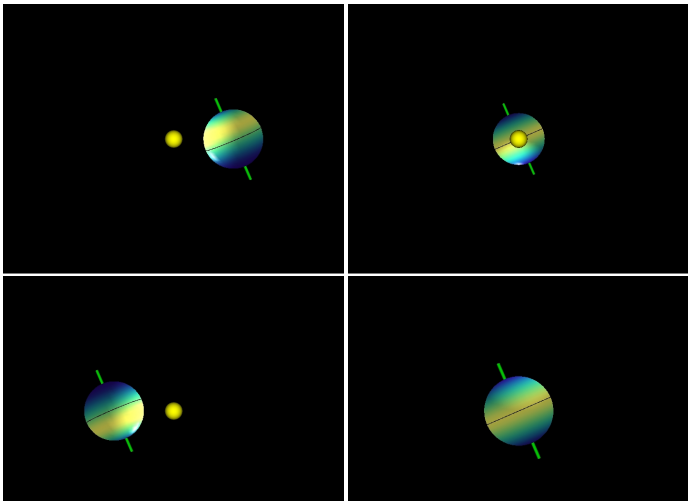
La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

Le stagioni



Prendiamo un sistema di riferimento con

- l'origine nel Sole,
- il piano (x, y) , cioè $z = 0$ coincidente con il piano della circonferenza percorsa dalla Terra.

Detto R il raggio della circonferenza di centro il Sole S , percorsa dalla Terra in un anno le equazioni parametriche del centro T della Terra sono

$$\vec{T}(\varphi) = \begin{cases} x = R \cos(\varphi) \\ y = R \sin(\varphi) \\ z = 0 \end{cases}$$

L'angolo φ identifica la posizione della Terra lungo la circonferenza di rivoluzione nello spazio intorno al Sole: e dipende quindi dal giorno d dell'anno

L'asse terrestre, l'asse intorno al quale la terra ruota su se stessa, rimane lo stesso, cioè

parallelo a se stesso

durante tutta la traiettoria di rivoluzione della Terra intorno al Sole. Indichiamo con

$$\vec{v} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

il versore asse terrestre, diretto secondo la direzione *SUD – NORD* e scegliamo il riferimento in modo che \vec{v} sia contenuto nel piano (y, z) .

Riesce, in buona approssimazione $\alpha \approx 23$ sulla verticale e quindi

$$\vec{v} = \{0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \approx \{0, 0.39, 0.92\}$$

La scelta di un riferimento xyz rispetto al quale

$$\vec{\nu} = \{0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \approx \{0, 0.39, 0.92\}$$

implica che

- l'asse x , $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ corrisponde agli equinozi,
- l'asse y , $\varphi = \pi/2$ e $\varphi = 3\pi/2$ corrisponde ai solstizi, il primo quello d'inverno, il secondo quello d'estate (naturalmente per il nostro emisfero settentrionale)

La posizione $N(\varphi)$ del polo Nord, nello spazio, si può ricavare dalle equazioni parametriche del punto $T(\varphi)$ aggiungendo ad esso il vettore $\rho \vec{\nu}$ essendo ρ il raggio terrestre: si ha

$$\vec{N}(\varphi) = \vec{T}(\varphi) + \vec{\nu} \rho$$

ovvero con la scelta fatta per $\nu = \{0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$

$$\vec{N}(\varphi) = \begin{cases} x = R \cos(\varphi) \\ y = R \sin(\varphi) + \cos(\alpha) \rho \\ z = \sin(\alpha) \rho \end{cases}$$

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

L'asse terrestre

Le equazioni parametriche dei poli

I punti della superficie terrestre

Analogamente la posizione del polo Sud sarà

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi) \\ y = R \sin(\varphi) - \cos(\alpha) \rho \\ z = -\sin(\alpha) \rho \end{cases}$$

Con la scelta fatta sia dell'angolo φ della Terra nella sua rivoluzione che dell'asse SUD-NORD, \vec{v} , rivolto nel quadrante yz positivo, riescono:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi = 0 & \text{equinozio d'autunno} \\ \varphi = \pi/2 & \text{solstizio d'inverno} \\ \varphi = \pi & \text{equinozio di primavera} \\ \varphi = \pi/2 & \text{solstizio d'estate} \end{array} \right.$$

La terra gira intorno al suo asse ν : i punti della superficie terrestre descrivono

- circonferenze di centro sull'asse di rotazione,
- appartenenti a piani ortogonali all'asse di rotazione,
- di raggi dipendenti dalla latitudine.

Detto ρ il raggio terrestre:

- i poli non girano affatto,
- i punti a latitudine λ descrivono circonferenze di raggio $\rho \cos(\lambda)$
- i punti dell'equatore descrivono le circonferenze di raggio maggiore, ρ

Consideriamo i due versori

$$\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{j} = \{0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}$$

ortogonali a \vec{v} e ortogonali fra loro

Per ogni scelta dell'angolo ϑ , che rappresenta l'ora del giorno, il vettore

$$\cos(\vartheta)\vec{i} + \sin(\vartheta)\vec{j} = \{\cos(\vartheta), -\sin(\vartheta)\sin(\alpha), \sin(\vartheta)\cos(\alpha)\}$$

é un versore ortogonale a \vec{v}

I punti P della superficie terrestre situati alla latitudine λ si trovano pertanto alle posizioni, dipendenti da φ e da ϑ seguenti

$$P(\lambda, \vartheta, \varphi) = \vec{T}(\varphi) + \vec{v} \rho \sin(\lambda) + \left\{ \cos(\vartheta)\vec{i} + \sin(\vartheta)\vec{j} \right\} \rho \cos(\lambda)$$

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

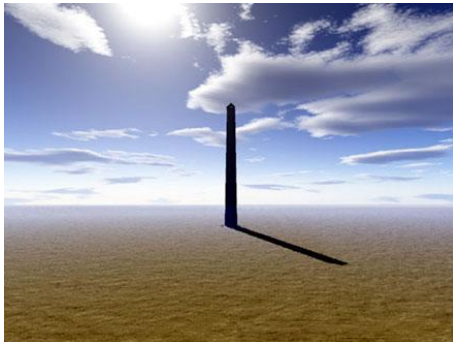
la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

L'ombra dell'obelisco

Le meridiane sui nostri edifici.

L'ombra di un obelisco.



L'ombra di un obelisco.

Un obelisco H posto nel punto P é una colonna perfettamente verticale, alta h , elevata in P .

Il vertice dell'obelisco ha pertanto posizione (nel riferimento centrato nel Sole)

$$H(\lambda, \vartheta, \varphi) = \vec{T}(\varphi) + \vec{v}(\rho + h) \sin(\lambda) + \\ + \left\{ \cos(\vartheta) \vec{i} + \sin(\vartheta) \vec{j} \right\} (\rho + h) \cos(\lambda)$$

Il vettore PH é pertanto

$$\vec{PH} = \vec{T} - \vec{H} = \vec{v} h \sin(\lambda) + \\ + \left\{ \cos(\vartheta) \vec{i} + \sin(\vartheta) \vec{j} \right\} h \cos(\lambda)$$

L'ombra di un obelisco.

L'obelisco é illuminato (quindi produce un'ombra) quando il vettore \overrightarrow{PH} che lo rappresenta forma un angolo acuto con il vettore \overrightarrow{PS} da P al Sole S . Tenuto conto che la grande distanza della Terra dal Sole autorizza ad assumere

$$\overrightarrow{PS} // \overrightarrow{TS} = -\vec{T}$$

L'obelisco pertanto é illuminato se il prodotto scalare

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{T(\varphi)} < 0$$

L'ombra di un obelisco.

Il prodotto scalare

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{T(\varphi)}$$

scritto in forma esplicita, come prodotto di due vettori colonna

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\lambda) \\ \cos(\alpha) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ \cos(\alpha) \cos(\lambda) \sin(\theta) + \sin(\alpha) \sin(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono legami importanti tra l'ombra della punta dell'obelisco e le coniche:

- i raggi di luce: dal Sole alla punta dell'obelisco,
- proseguono dritti fino al piano terra...

La traiettoria dell'ombra della punta dell'obelisco come

sezione conica

di un cono rotondo con un piano in generale non ortogonale all'asse.

Riflessioni scientifiche o affabulazioni ?

Ombre e luci

La traiettoria della Terra intorno al Sole

La durata del giorno

la traiettoria di un luogo della terra nello spazio.

La direzione di un obelisco

L'ombra dell'obelisco

Le meridiane sui nostri edifici.



Ombre, obelischi, meridiane