Popolazioni con struttura di etá

Il modello di Leslie.

L.Lamberti
Dipartimento di matematica, Universitá La Sapienza, Roma.

Piano Lauree Scientifiche

2011-2012

liceo LUIGI PIETROBONO

ALATRI

22 marzo 2012

1. La struttura di etá

I dati ISTAT

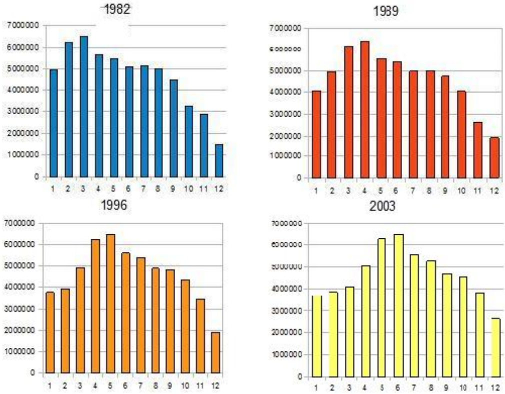
L'ISTAT, Istituto Nazionale di Statistica, pubblica sul suo sito

`http://demo.istat.it/`

la distribuzione negli ultimi anni della popolazione italiana suddivisa per luogo di residenza e per etá: é estremamente interessante confrontare di anno in anno le numerositá degli individui di ciascuna fascia di etá in modo da riconoscere come, ad esempio, stia cambiando la distribuzione per fasce di etá.

La fascia percentualmente piú numerosa sta spostandosi verso etá maggiori.

I dati ISTAT


1982
1939
1996
2003
7000000
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

I dati ISTAT

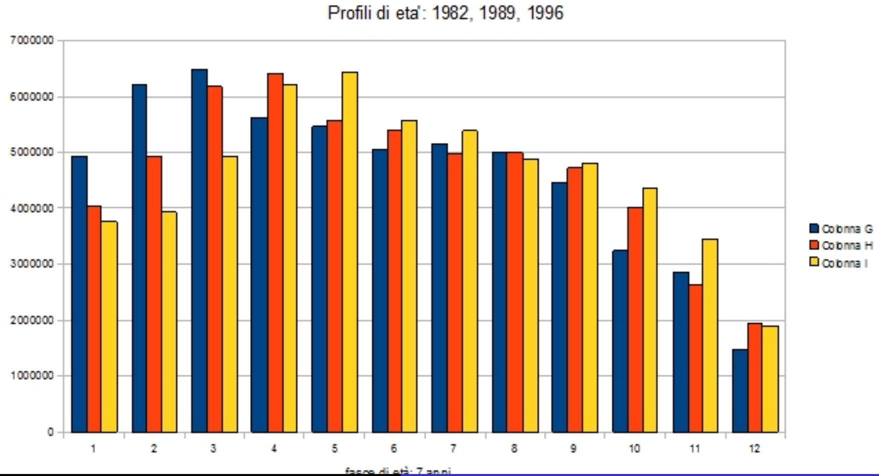
Istogrammi della popolazione italiana negli anni

1982, 1989, 1996, 2003

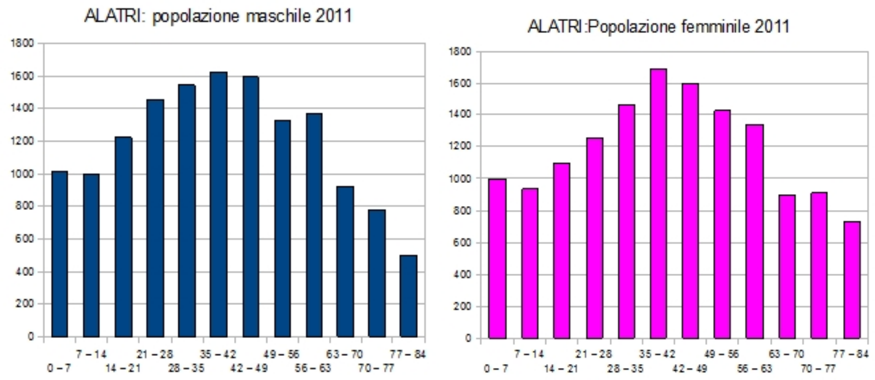
suddivisa in fasce di etá di 7 anni ciascuna.

- notare la somiglianza dei quattro profili,
- notare come la fascia di etá piú numerosa vada spostandosi...
  - dalla terza fascia, 14 - 21
  - alla quarta, 21 - 28,
  - alla quinta, 28 - 35,
  - alla sesta, 35 - 42.

I dati ISTAT


Profili di eta': 1982, 1989, 1996
7000000
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
Colonna G
Colonna H
Colonna I

I dati ISTAT


ALATRI: popolazione maschile 2011
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0 – 7
7 – 14
14 – 21
21 – 28
28 – 35
35 – 42
42 – 49
49 – 56
56 – 63
63 – 70
70 – 77
77 – 84
ALATRI:Popolazione femminile 2011
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0 – 7
7 – 14
14 – 21
21 – 28
28 – 35
35 – 42
42 – 49
49 – 56
56 – 63
63 – 70
70 – 77
77 – 84

La struttura di etá

La maggior parte delle popolazioni biologiche presentano individui diversi a seconda della loro etá anagrafica: le diversitá possono essere

- quasi indistinguibili, almeno al nostro occhio, nel caso di specie molto semplici (insetti, piccoli vegetali, ecc.)
- particolarmente evidenti in altre popolazioni (uccelli, mammiferi, alberi, ecc.)

La struttura di etá

Supponiamo, pensando ad esempio alla popolazione umana, di suddividere gli individui in 3 fasce *giovani, adulti, anziani* intendendo con

- *giovani* tutti gli individui di etá minore di 30 anni,
- *adulti* tutti gli individui di etá tra i 30 e i 60 anni,
- *anziani* quelli di etá oltre i 60.

La struttura di etá

Piú in generale supponiamo di distinguere m fasce di etá. Indicate con

$$N_1(t), \dots N_m(t)$$

le numerositá di individui viventi per ciascuna delle m fasce di etá, lo studio numerico di una popolazione puó tenere conto

- del solo numero complessivo

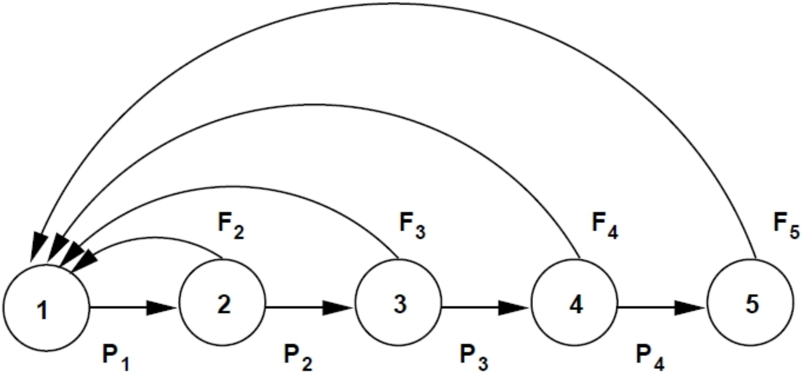
  $$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_m(t)$$

  di individui viventi al tempo t,
- delle numerositá

  $$N_1(t),\ N_2(t),\ \dots N_m(t)$$

  degli individui di ciascuna fascia di etá.

Le dinamiche dell'etá: invecchiamento e riproduzione



La dinamica delle diverse fasce di etá:

L'evoluzione di una popolazione che tenga conto di una struttura di etá deve essenzialmente tenere conto che:

- alla prima fascia si accede solo per nascita,
- alle altre fasce si accede, per invecchiamento, provenendo dalla fascia precedente.

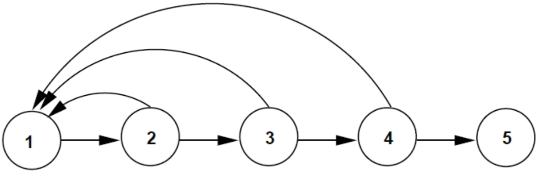


Figura: Frecce dritte: invecchiamento, semicirconferenze: natalitá.

Il modello di Leslie

Un modello matematico che rappresenti l'evoluzione temporale delle numerositá

$$N_1(t),\ N_2(t),\ \dots N_m(t)$$

puó essere suggerito dall'esperienza della popolazione umana, ad esempio suddivisa nelle tre fasce, di durata trentennale

giovani, adulti, anziani.

Il meccanismo di invecchiamento

Figura: Tre etá.

Il meccanismo di invecchiamento

Indichiamo con

$$G(0),\ A(0),\ S(0)$$

le tre numerositá al tempo $t = 0$. Al tempo $t = 30$ avremo, ragionevolmente,

$$\begin{cases} A(30) \approx \alpha G(0) \\ S(30) \approx \beta A(0) \end{cases}$$

essendo α e β due numeri positivi e minori di 1 che rappresentano:

- α : la probabilitá che un giovane ha di raggiungere l'etá adulta
- β : la probabilitá che un adulto ha di raggiungere l'etá anziana.

Il numero $G(30)$ dei giovani sará invece, ancora ragionevolmente,

$$G(30) \approx \gamma G(0) + \delta A(0) + \varepsilon S(0)$$

avendo indicato con γ, δ, ε il numero medio di figli che ciascun

Il meccanismo di natalitá

Valori ragionevoli, riferendosi alla popolazione umana, potrebbero essere

$$\gamma = 0.01, \quad \delta = 1.5, \quad \varepsilon = 0.01$$

che corrispondono ad attribuire sostanzialmente agli individui della fascia adulta l'intero ammontare delle nascite, senza escludere minimi contributi prodotti dalle altre due fasce.

Valori diversi possono essere invece suggeriti per popolazioni biologicamente diverse: spesso l'etá riproduttiva é l'ultima.

Il modello di popolazione con struttura di etá

Il modello proposto sará pertanto:

$$\begin{cases} G(30) &= \gamma G(0) + \delta A(0) + \varepsilon S(0) \\ A(30) &= \alpha G(0) \\ S(30) &= \beta A(0) \end{cases}$$

Modello che sará poi iterabile, nel successivo trentennio, come

$$\begin{cases} G(60) &= \gamma G(30) + \delta A(30) + \varepsilon S(30) \\ A(60) &= \alpha G(30) \\ S(60) &= \beta A(30) \end{cases}$$

Il modello di Leslie

Indicati con n i vari successivi trentenni da studiare, e dette G_n, A_n, S_n le corrispondenti numerositá si avrá

$$\begin{cases} G_{n+1} & = \gamma G_n + \delta A_n + \varepsilon S_n \\ A_{n+1} & = \alpha G_n \\ S_{n+1} & = \beta A_n \end{cases}$$

Limiti del modello

- il piú evidente: i vari coefficienti $\alpha, \ldots, \varepsilon$ rimangano costanti, cosa tutt'altro che certa,
- il secondo limite l'aver trascurato ogni contatto con l'esterno o con fattori imprevisti: emigrazioni o immigrazioni, epidemie, guerre, ecc.
- il terzo: la pura proporzionalitá, non tiene conto di dipendenze piú complesse: i coefficienti di sopravvivenza potrebbero diminuire a fronte di eccessi di popolazione (il problema della fame nel mondo...).

Un problema

Esiste una distribuzione $\{G, A, S\}$ costante ?

Dire che $\{G, A, S\}$ é una distribuzione costante vuol dire che si mantiene nel tempo, ovvero che posseduta alla $n-$esima iterazione si conserva nella $(n+1)-$esima

$$\left\{ \begin{array}{ll} G & = \gamma G + \delta A + \varepsilon S \\ A & = \alpha G \\ S & = \beta A \end{array} \right.$$

Sostituendo A ed S ricavati dalla seconda e terza equazione nella prima si ha

$$G = \gamma G + \delta \alpha G + \varepsilon \alpha \beta G \quad \rightarrow \quad 1 = \gamma + \delta \alpha + \varepsilon \alpha \beta$$

condizione di bilancio tra natalitá e mortalitá per conservare immutata la popolazione.

Salmoni e orsi: equilibri naturali

I salmoni

La popolazione dei salmoni:

- la massima etá raggiungibile é 3 anni,
- la popolazione é ripartita in tre classi di etá, $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$
- la probabilitá di sopravvivere un anno é collegata all'etá.

Supponiamo:

- note le due probabilitá di sopravvivenza
  - dal primo al secondo anno $\alpha = 5\ 10^{-3} = 0.5\%$,
  - dal secondo al terzo $\beta = 5\ 10^{-2} = 5\%$,
- note le capacitá riproduttive per ciascun anno di etá,
  - $\gamma = 0$ nulla nel primo anno,
  - $\delta = 0$ nulla nel secondo,
  - $\varepsilon = 4000$ nel terzo
- nota la distribuzione per etá a un certo anno $t = 0$.

I salmoni

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 5\ 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 5\ 10^{-2} & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Immaginando di partire da una distribuzione

$$x_1(0) = 1000, \quad x_2(1) = 1000, \quad x_3(1) = 1000$$

si hanno le seguenti successive distribuzioni:

I salmoni

	1^0	2^0	3^0
$t = 0$	1000	1000	1000
$t = 1$	$4\ 10^6$	5	50
$t = 2$	$2\ 10^5$	$2\ 10^4$	0.25
$t = 3$	1000	1000	1000

Che evidenziano una distribuzione periodica della popolazione dei salmoni, con una punta di presenze adulte ogni tre anni.

Fenomeni di periodicitá sono stati osservati in numerose popolazioni, il piú famoso riguarda un ciclo settennale delle cicale.

prerequisiti:

STRUMENTI UTILI:

- prodotto scalare tra due vettori,
- matrici, prodotto matrice vettore,
- sistemi lineari,
- autovalori e autovettori,
- prodotto di matrici,
- matrici inverse.

Il prodotto scalare

Due vettori u e v sono

- due coppie di numeri,
- due terne di numeri,
- ...due $n-$ple di numeri

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad n = 1, 2, ...$$

Il prodotto scalare dei due vettori u e v é il numero espresso dalla seguente somma

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

somma che viene generalmente indicata con la notazione

$$< u, v >$$

Il prodotto scalare

Esempio

Siano $u = \{1, 2, 3\}, \ v = \{4, 5, 6\}$ *riesce*

$$< u, v >= 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

GEOGEBRA

Assegnati u e v ad esempio come

```
u = { 1, 2, 3 }
v = { -1, 0, 5}
```

il prodotto scalare si calcola con il comando

```
Somma[u*v]
```

Matrici

Una matrice é una tabella di numeri:

- un certo numero n di righe,
- un certo numero m di colonne.

Le n colonne di una stessa matrice possono essere lette come

$$n \text{ vettori a } m \text{ componenti ciascuno}$$

Le m righe come m *vettori a* n *componenti ciascuno*.

Matrici

Esempio

La matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

ha $n = 2$ *righe e* $m = 3$ *colonne.*
Le sue tre colonne sono, ordinatamente, i tre vettori a due componenti ciascuno,

$$u = \{1, 4\}, \quad v = \{2, 5\}, \quad w = \{3, 6\}$$

Gli elementi a_{ij} di una matrice dipendono da due indici: il numero i della riga e il numero j della colonna.

Matrici

Esempio

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 5,\ a_{23} = 6$$

- *La prima colonna é il vettore* $u = \{a_{11}, a_{21}\}$,
- *la seconda il vettore* $v = \{a_{12}, a_{22}\}$,
- *la terza il vettore* $w = \{a_{13}, a_{23}\}$.

GeoGebra

La matrice precedente si assegna con il comando

```
A = {{1,2,3},{4,5,6}}
```

Prodotto matrice vettore

Assegnati

- la matrice A ad n righe ed m colonne
- il vettore x ad m componenti,

si definisce il vettore

$$y = A\,.\,x$$

- ad n componenti,
- ciascuna data dal prodotto scalare di ciascun vettore riga della matrice per il vettore u assegnato.

Prodotto matrice vettore

Esempio

Sia A la precedente matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

e sia $x = \{10, 11, 12\}$*: riesce*

$$y = \{< \{1,2,3\}, \{10,11,12\} >, < \{4,5,6\}, \{10,11,12\} >\} = \{68, 167\}$$

NOTA: *Per eseguire il prodotto matrice vettore é indispensabile che il numero di colonne della matrice (ovvero la lunghezza delle sue righe) sia uguale al numero di componenti del vettore.*

Prodotto matrice vettore

GeoGebra

Per eseguire il prodotto matrice vettore occorre assegnare il vettore, ad esempio quello $\{10, 11, 12\}$ precedente con il comando

`u = {{10},{11},{12}}`

che lo interpreta come matrice a tre righe e una colonna. Oppure con il comando

`u = Trasposta[{{10,11,12}}]`

Il prodotto $v = Au$ si calcola, dopo aver assegnati `A` e `u`, con il comando

`v = A*u`

Prodotto matrice vettore

Osservazione

Una notazione alternativa.
Indicati con a_{ij} gli elementi della matrice A e con x_j quelli del vettore x allora riesce

$$A \,.\, x = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j ,\ \cdots \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j , \right\}$$

qualunque siano le dimensioni m ed n.

Il caso quadrato

Il caso piú interessante di prodotti matrice vettore é quello di matrici

- quadrate, uguale numero $m = n$ di righe e colonne, detto ordine della matrice,
- ordine abbastanza basso (2,3,...).

Le matrici quadrate di ordine 2 rappresentano le trasformazioni lineari del piano: il loro ruolo puó essere sperimentato con il seguente PROGRAMMA GEOGEBRA.

Prodotto di matrici

Assegnate due matrici A e B, supponiamo quadrate dello stesso ordine e indicati con

- $\{a_1, , a_2, \ldots a_n\}$ i vettori formati dalle righe di A
- $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ i vettori formati dalle colonne di B

si chiama

matrice prodotto $A\,B$ righe per colonne

la matrice C che ha come elementi i prodotti scalari

$$c_{ij} =< a_i, b_j >$$

Una lettura alternativa

Il prodotto di due matrici si puó leggere in termini di prodotto matrice vettore:

- siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine,
- siano b_1, b_2, $\ldots b_n$ le colonne di B,
- la matrice prodotto AB ha come colonne

$$\{Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_n\}$$

Prodotto di matrici

Il prodotto di due matrici é un'operazione complicata...!
Fra l'altro si tratta di un'operazione non commutativa, cioé puó riuscire

$$AB \neq BA$$

Il prodotto é particolarmente semplice (ed é commutativo) nel caso di due matrici diagonali

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto di matrici

É ancora abbastanza semplice nel caso che la seconda delle due matrici sia diagonale:

$$AB = A \left| \begin{array}{lll} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{array} \right|$$

dette $\{a_1, a_2, a_3\}$ le colonne di A riesce

$$AB = \{\beta_1\, a_1, \beta_2\, a_2, \beta_3\, a_3\}$$

Matrici inverse

La matrice

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

si dice *matrice identitá*.
Assegnata una matrice L si dice sua inversa, e si indica con L^{-1} una matrice tale che

$$L\,.\,L^{-1} = L^{-1}\,.\,L = I$$

Teorema

Una matrice quadrata L possiede inversa se e solo se $\det L \neq 0$

Evoluzione della popolazione totale

Supponendo che la popolazione sia divisa nelle tre fasce di etá standard e che esse evolvano con il modello di Leslie cosa si puó pensare dell'evoluzione della popolazione totale

$$N_n = G_n + A_n + S_n$$

É piuttosto improbabile che la numerositá totale abbia una dinamica altrettanto semplice tipo

$$N_{n+1} = k\, N_n$$

Si puó tuttavia riconoscere una dinamica un po' piú complessa del tipo

$$N_n = xN_{n-1} + yN_{n-2} + zN_{n-3} \tag{1}$$

con coefficienti x, y, z abbastanza facilmente determinabili.

Evoluzione della popolazione totale

Introdotto il vettore $u = \{1, 1, 1\}$ e detto $V_n = \{G_n, A_n, S_n\}$ riesce ovviamente

$$N_n =< V_n, u >$$

L'espressione (1) congetturata per N_n si riscrive come

$$< V_n, u >= x < V_{n-1}, u > +y < V_{n-2}, u > +z < V_{n-3}, u > \tag{2}$$

ovvero, tenuto conto che

$$V_{n-2} = LV_{n-3}, \quad V_{n-1} = L^2 V_{n-3}, \quad V_n = L^3 V_{n-3}$$

si deve avere, per ogni n

$$< L^3 V_{n-3}, u >= x < L^2 V_{n-3}, u > +y < LV_{n-3}, u > +z < V_{n-3}, u >$$

Evoluzione della popolazione totale

Schema del lavoro:

- assegnare la matrice L e determinare la sua trasposta L^* (le righe diventano colonne),
- calcolare le due matrici prodotto $L^*.L^*$ e $L^*.L^*.L^*$
- calcolare i quattro vettori

$$(L^*.L^*.L^*).u, \quad x(L^*.L^*).u, \qquad y(L^*).u, \quad zu$$

- determinare il sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z
  - prima equazione: prima componente di $(L^*.L^*.L^*).u$ uguale alla somma delle prime componenti degli altri tre vettori,
  - seconda equazione: seconda componente di $(L^*.L^*.L^*).u$ uguale alla somma delle seconde componenti degli altri tre vettori,
  - terza equazione: terza componente di $(L^*.L^*.L^*).u$ uguale alla somma delle terze componenti degli altri tre vettori.

Evoluzione della popolazione totale

Le soluzioni x, y, z dedotte forniscono i tre coefficienti tali che

$$N_n = xN_{n-1} + yN_{n-2} + zN_{n-3}$$

Osservazione

Ulteriore problema (ancora piú difficile): *come si determinano le successioni che verificano una formula ricorsiva quale la precedente*

$$N_n = xN_{n-1} + yN_{n-2} + zN_{n-3} \quad ?$$

Autovalori e autovettori

PROBLEMI:

- esistono vettori u tali che il trasformato $L\,u$ sia parallelo a u, cioé proporzionale a u ?
- ove riesca parallelo, cioé proporzionale, qual'é il fattore di proporzionalitá λ

$$L\,u = \lambda\,u \quad ?$$

- I vettori u tali che Lu sia parallelo a u si dicono *autovettori*,
- i corrispondenti fattori λ si dicono *autovalori*,
- se $Lu = \lambda u$ allora, qualunque sia il numero reale t riesce anche

$$L(tu) = \lambda(tu)$$

Autovalori e autovettori

$$Lu = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad (L - \lambda I)u = 0$$

da cui, per il teorema di Cramer riesce

$$\det |L - \lambda I| = 0$$

La precedente equazione in λ determina gli *autovalori* della matrice L.
Si tratta di un'equazione di secondo grado se la matrice L é di ordine 2, di terzo grado se la matrice L é di ordine 3, ecc.

Autovalori e autovettori

Per ogni autovalore λ esiste (almeno) un *autovettore* u cioé un vettore non nullo tale che

$$Lu = \lambda u$$

Se la matrice L possiede tre autovalori distinti allora possiede anche tre autovettori (uno per ciascun autovalore) linearmente indipendenti.

Autovalori e autovettori

$$L = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

sia la matrice di Leslie nel caso di 3 fasce di etá: determiniamo gli autovettori $v \neq 0$ e gli autovalori λ

$$L\,v = \lambda\,v \quad \Leftrightarrow \quad (L - \lambda I)v = 0$$

Com'é noto i numeri λ sono le radici dell'equazione

$$\det|L - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ p_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & p_2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Il polinomio caratteristico

Svolti i calcoli si perviene al polinomio, $p(\lambda) = \det(L - \lambda I)$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + \lambda a_2 p_1 + a_3 p_1 p_2$$

detto polinomio caratteristico della matrice L, e quindi all'equazione $p(\lambda) = 0$.
Tenuto conto che $\lambda = 0$ non é radice dell'equazione, posto

$$q(\lambda) = \frac{a_1\lambda^2 + \lambda a_2 p_1 + a_3 p_1 p_2}{\lambda^3} = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 p_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 p_1 p_2}{\lambda^3}$$

Si ha

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(\lambda) = 1$$

che mostra, basta pensare al grafico di $q(\lambda)$, l'esistenza di una e una sola radice $\lambda_1 > 0$.

Un primo autovettore

Sia

$$v = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

l'autovettore relativo all'autovalore λ_1: deve riuscire

$$(L - \lambda_1 I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} (a_1 - \lambda_1)v_1 & +a_2 v_2 & +a_3 v_3 & = 0 \\ p_1 v_1 & -\lambda_1 v_2 & & = 0 \\ & p_2 v_2 & -\lambda_2 v_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Da cui segue

$$v = t\left\{1,\ \frac{p_1}{\lambda_1},\ \frac{p_1 p_2}{\lambda_1^2}\right\}$$

Confronto dei tre autovalori

Teorema

Sia $\lambda_1 > 0$ *la radice positiva dell'equazione*

$$1 = q(\lambda)$$

allora ogni altra radice $\mu = re^{i\theta}$ *di tale equazione verifica la disuguaglianza*

$$|\mu| \leq \lambda_1$$

Confronto dei tre autovalori

Dimostrazione.

$$1 = q(re^{i\theta}) \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{a_1}{re^{i\theta}} + \frac{a_2 p_1}{r^2 e^{2i\theta}} + \frac{a_3 p_1 p_2}{r^3 e^{3i\theta}}$$

da cui, prendendo la parte reale a primo e secondo membro si ha

$$1 = \frac{a_1 \cos(\theta)}{r} + \frac{a_2 p_1 \cos(2\theta)}{r^2} + \frac{a_3 p_1 p_2 \cos(3\theta)}{r^3} \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 p_1}{r^2} + \frac{a_3 p_1 p_2}{r^3}$$

La funzione $q(\lambda)$ é decrescente per $\lambda > 0$ e riesce $q(\lambda_1) = 1$ quindi

$$1 \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 p_1}{r^2} + \frac{a_3 p_1 p_2}{r^3} \quad \rightarrow \quad r \leq \lambda_1$$

□

Confronto dei tre autovalori

NOTA:
Si puó dimostrare che se dei tre coefficienti a_1, a_2, a_3 due consecutivi sono diversi da zero allora vale la disuguaglianza stretta

$$|\mu| < \lambda_1$$

La dimostrazione deriva dal seguente

Lemma

Siano A, B, C tre numeri positivi, l'equazione

$$A\cos(\theta) + B\cos(2\theta) + C\cos(3\theta) = A + B + C$$

implica $\theta = 0$.

Confronto dei tre autovalori

Dimostrazione.

Dall'equazione segue

$$(1-\cos(\theta))A + (1-\cos(2\theta))B + (1-\cos(3\theta))C = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (1-\cos(\theta))A = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0$$

$\square$

Le iterazioni di un profilo

Sia

$$L = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{vmatrix}$$

La matrice L rappresenta la trasformazione che al vettore u fa corrispondere il nuovo vettore $v = Lu$.
Iterando la trasformazione su v si determina un nuovo vettore

$$w = Lv = L(Lu))$$

Il vettore w si determina direttamente da u servendosi della matrice prodotto $L^2 = L\,L$.

Le potenze di una matrice

Come é stato calcolato w ottenuto applicando due volte la trasformazione determinata dalla matrice L, si possono calcolare successivi trasformati

$$w_n = L^n u$$

La determinazione delle matrici L^n é naturalmente ricorsiva

$$\begin{cases} L^0 & = & I \\ L^n & = & L \, . \, L^{n-1} \end{cases}$$

... ed é tutt'altro che ovvia !

Le matrici diagonalizzabili

Sebbene il modello di Leslie fornisca le singole iterazioni della distribuzione di etá non produce visibili facili informazioni circa il comportamento asintotico.
Limitiamoci, per semplicitá al caso di tre fasce di etá e quindi a matrici di Leslie di ordine 3.

Definizione

La matrice A si dice diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile M tale che

$$A = M \, . \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} . \, M^{-1} = M \, D \, M^{-1}$$

Le matrici diagonalizzabili

Teorema

Se la matrice A possiede tre autovettori, linearmente indipendenti,

$$u = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad v = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad w = \{w_1, w_2, w_3\},$$

corrispondenti agli autovalori λ_1, λ_2, λ_3 *posto*

$$M = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

riesce

$$A = M \, . \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} . \, M^{-1}$$

Le matrici diagonalizzabili

Le potenze di matrici diagonalizzabili sono particolarmente semplici:

$$
\begin{aligned}
A &= MDM^{-1} & & \\
A^2 &= M\,D\,M^{-1}M\,D\,M^{-1} & &= M\,D^2\,M^{-1} \\
A^3 &= M\,D\,M^{-1}M\,D\,M^{-1}M\,D\,M^{-1} & &= M\,D^3\,M^{-1}
\end{aligned}
$$

Tenuto conto che le potenze di matrici diagonali D sono ancora diagonali con elementi le potenze dei corrispondenti:

$$A^n = M\,.\begin{vmatrix} \alpha_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^n \end{vmatrix}.\,M^{-1}$$

Limite dei profili d'etá

Supponiamo di aver diagonalizzato la matrice di Leslie

$$L = M \,.\left|\begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right|.\, M^{-1}$$

Riesce pertanto

$$L^n = M \,.\left|\begin{array}{ccc} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{array}\right|.\, M^{-1}$$

Limite dei profili d'etá

Si ha quindi, detto v_n l'$n-$esima iterazione

$$v_n = M \, . \begin{vmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{vmatrix} . \, M^{-1} v_0$$

ovvero, dividendo membro a membro per λ_1^n si ha

$$\frac{1}{\lambda_1^n} v_n = M \, . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} \end{vmatrix} . \, M^{-1} v_0$$

Limite dei profili d'etá

Ne segue, passando al limite su n e tenendo presente che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\lambda_1^n} = M \, . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \, M^{-1} v_0$$

Un approccio alternativo

Assegnata la distribuzione iniziale $U_0 = \{G_0, A_0.S_0\}$ supponiamo di voler calcolare le distribuzioni successive

$$U_n = L^n U_0$$

Detti u, v, w i tre autovettori corrispondenti ai tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$Lu = \lambda_1 u, \quad Lv = \lambda_2 v, \quad Lw = \lambda_3 w$$

rappresentiamo U_0 come un'opportuna combinazione lineare dei tre autovettori

$$U_0 = c_1 u + c_2 v + c_3 w$$

Un approccio alternativo

A questo punto, per linearitá si ha

$$U_1 = LU_0 = c_1 Lu + c_2 Lv + vc_3 Lw = \lambda_1 c_1 u + \lambda_2 c2v + \lambda_3 c_3 w$$

e, in generale

$$U_n = LU_{n-1} = \lambda_1^n c_1 u + \lambda_2^n c_2 v + \lambda_3^n c_3 w$$

Un approccio alternativo

L'unica difficoltá resta quindi, supposto di conoscere autovalori e autovettori, quella di determinare i tre coefficienti c_1, c_2, c_3: difficoltá che corrisponde alla capacitá di risolvere il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$c_1\, u + c_2\, v + c_3\, w = U_0$$

ovvero indicata con M la matrice che ha come colonne u, v, w risolvere il sistema

$$M.\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = U_0$$

Un esperimento

Quanto segue costituisce la traccia di un lavoro che potrebbe essere eseguito nell'ambito di questo *Laboratorio Lauree Scientifiche:*

- Assegnamo una matrice di Leslie,
- determiniamo il suo autovalore positivo λ,
- determiniamo il corrispondente autovettore u,
- scegliamo un vettore v_0 iniziale,
- determiniamo i successivi $v_n = L^n v_0$
- osserviamo che

$$\frac{1}{\lambda^n} v_n \approx c.u$$

Un esperimento

Dovremmo cioé riconoscere che

- qualunque sia la distribuzione iniziale v_0
- le distribuzioni iterate risultano sempre piú simili all'autovettore u,
- le norma delle distribuzioni iterate crescono come le corrispondenti potenze di λ.

Periodicitá, oscillazioni, ecc.

I profili iterati

$$U_n = LU_{n-1} = \lambda_1^n c_1 u + \lambda_2^n c_2 v + \lambda_3^n c_3 w$$

tendono a divenire proporzionali ad uno dei tre autovettori se i tre coefficienti

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3$$

sono diversi: l'addendo relativo al λ maggiore in modulo prevale ben presto sugli altri due.
L'esistenza di un autovalore prevalente é garantita nelle matrici di Leslie che abbiano nella prima riga almeno due elementi consecutivi non nulli.
Un interessante esperimento puó essere fatto con il seguente programma Programma GeoGebra.

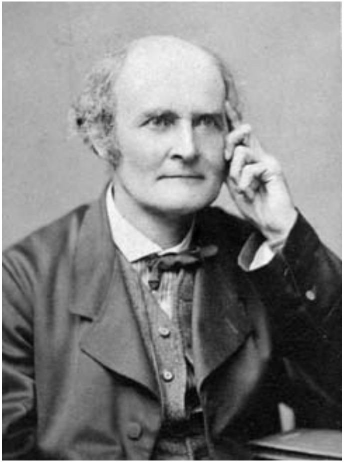


Figura: Sir William Rowan Hamilton 1805 - 1865, Arthur Cayley 1821 - 1895

Assegnata la matrice

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

il polinomio

$$p(\lambda) = \det |A - \lambda I| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

si chiama polinomio caratteristico della matrice A.
Abbiamo incontrato tale polinomio in occasione della ricerca degli autovalori e degli autovettori.

Il teorema di Hamilton Cayley

La matrice A verifica la seguente relazione

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$$

dedotta dal polinomio caratteristico di A.

Il risultato é vero in generale, cioé anche per matrici A di ordine $n > 2$:

$$p(\lambda) = \det |A - \lambda I| \quad \rightarrow \quad p(A) = 0$$

dove la seconda espressione rappresenta la matrice ottenuta sostituendo nel polinomio caratteristico A a λ e I nell'ultimo monomio, quello relativo a λ^0.

Il teorema di Hamilton Cayley

L'utilitá della relazione di Hamilton Cayley [1] consiste, ad esempio nel caso $n = 2$ nella uguaglianza

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0 \quad \rightarrow \quad A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I$$

e quindi, di conseguenza, moltiplicando per A^n

$$A^{n+2} = (a+d)A^{n+1} - (ad - bc)A^n$$

[1] Sir William Rowan Hamilton 1805 - 1865, Arthur Cayley 1821 - 1895

Supponiamo di occuparci di una popolazione con tre fasce di etá: sia

$$X_n = \{G_n, A_n, S_n\}$$

le rispettive numerositá al tempo n, e sia

$$L = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice di Leslie secondo la quale la popolazione si sviluppa. Il polinomio caratteristico é

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + bp\lambda + cpq$$

Dalla relazione di Hamilton Cayley si ha quindi

$$L^3 = a\,L^2 + b\,p\,L + c\,p\,q\,I$$

Indicata con

$$N_n = G_n + A_n + S_n =< X_n, \{1, 1, 1, \} >$$

la popolazione totale e tenuto conto che

$$L^3 = a\, L^2 + b\, p\, L + c\, p\, q\, I$$

si ha

$$N_{n+3} =< L^3 X_n, \{1, 1, 1, \} >=< a\, L^2 X_n + b\, p\, L X_n + c\, p\, q\, X_n >$$

da cui

$$N_{n+3} = a N_{n+2} + b\, p\, N_{n+1} + c\, p\, q\, N_n$$