

## F.A.Q: argomenti del colloquio [Q-Z]

Il colloquio orale tratterà uno,  
al più due,  
degli argomenti sotto elencati.

Un'esposizione corretta prevede di saper scrivere:

- definizioni precise dei termini matematici usati,
- illustrazioni di esempi collegati,
- cenni ai principali risultati relativi all'argomento trattato.

- (1) Numeri naturali, interi, razionali: ci sono segmenti di lunghezza non razionale.
- (2) Disuguaglianze fondamentali:  
$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1 + h^2)^n \geq 1 + nh^2, \quad e^{h^2} \geq 1 + h^2.$$
- (3) I rapporti incrementali, quindi le derivate, delle  $x^n$  si servono delle espressioni di  $(a + b)^n$ .
- (4) Per gli insiemi di numeri si parla di limitatezza, estremi inferiore e/o superiore, minimi e/o massimi, connessione (essere o meno intervalli).
- (5) Le famiglie di intervalli incapsulati di reali (chiusi, limitati e non vuoti) hanno, necessariamente, intersezione non nulla: cosa che potrebbe mancare lavorando nei soli razionali.
- (6) Grafici di polinomi (primo, secondo e terzo grado) e di semplici funzioni razionali. Esempi.
- (7) Per le funzioni (reali di una variabile reale) si parla di dominio, immagine, iniettività, monotonia, invertibilità: lettura di tali proprietà dai grafici.
- (8) La funzione  $e^x$ : la monotonia, i polinomi che la approssimano, relazioni tra  $e^x$  e  $x^m$  per  $x \rightarrow +\infty$ .
- (9) La funzione  $\ln(x)$  come inversa di  $e^x$ : monotonia, i limiti nell'origine di  $x^r \ln(x)$ .
- (10) Le funzioni goniometriche  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ : periodicità, formule di addizione.
- (11) Le funzioni  $\tan(x)$ ,  $\arctan(x)$ , importanza di quest'ultima come funzione crescente in  $\mathbb{R}$  e limitata.
- (12) Le successioni, esplicite o ricorsive, sono funzioni di  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ : monotonia, limitatezza, convergenza.
- (13) Il teorema di convergenza delle successioni limitate e monotone.
- (14) Tecniche di confronto: il *teorema dei carabinieri*.

- (15) Definizione di funzione continua ed esempi di funzioni non continue: la funzione parte intera.
- (16) Il limite di una funzione in un punto e la *prolungabilità per continuità* agli estremi del dominio.
- (17) Il *teorema dei valori intermedi* o *d'esistenza degli zeri*: il ruolo della continuità e dell'essere definite su intervalli.
- (18) Il *teorema di Weierstrass*: esistenza di massimo e minimo legata alla continuità, al dominio, ai limiti agli estremi.
- (19) Velocità media, velocità istantanea, derivata: esempi di funzioni derivabili e non derivabili (in qualche punto).
- (20) Deduzione delle formule di derivazione per le funzioni più comuni.
- (21) Le equazioni delle tangenti al grafico.
- (22) Il *teorema di Rolle* e il *teorema di Lagrange*: il test della monotonia.
- (23) Regole di derivazione: somme, prodotti, quozienti, funzioni composte.
- (24) La *formula di Taylor*: espressione di Lagrange per il resto.
- (25) Polinomi di Taylor di

$$e^x, \sin(x), \cos(x), \log(1+x), \frac{1}{1+x}.$$

- (26) La serie geometrica e le serie (di Taylor) di  $e^x, \sin(x), \cos(x)$ .
- (27) Infinitesimi, ordini di infinitesimo in un punto, gli *o piccolo* di Landau: esempi.
- (28) Il *teorema di Cauchy* e la *Regola di de l'Hôpital* per il quoziente di infinitesimi.
- (29) Funzioni convesse:  $x^2$  e non solo.
- (30) Integrali, somme integrali, aree: calcolo diretto di  $\int_a^b (mx + p) dx$ .
- (31) Integrabilità: il caso delle funzioni monotone limitate.
- (32) Il *teorema della media*: stime numeriche del valore di un integrale.
- (33) Funzione integrale, *teorema fondamentale del calcolo*.
- (34) Le primitive di alcune funzioni più comuni.
- (35) Il procedimento di *integrazione per parti* e *per sostituzione*.
- (36) Integrali impropri: intervalli di integrazione illimitati o funzione integranda divergente in un punto. Tecniche di confronto.
- (37) Le serie armoniche generalizzate  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , legami con gli integrali impropri.