PDE lineari primo ordine

5. Equazioni quasi lineari

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{1}$$

Una funzione $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice soluzione della (1) in Ω se

$$\forall (x, y) \in \Omega : \; a(x, y, u(x, y))u_x + b(x, y, u(x, y))u_y = c(x, y, u(x, y))$$

Definizione 5.1. *La funzione $u(x, y)$, o meglio, il grafico cartesiano*

$$z = u(x, y)$$

si dice costituire una superficie integrale dell'equazione (1).

6. Le curve caratteristiche

Consideriamo il campo vettoriale tridimensionale

$$\overrightarrow{v}(x, y, z) = \{a(x, y, z),\, b(x, y, z),\, c(x, y, z)\}$$

consideriamo le curve $\{x(t), y(t), z(t)\}$ soluzioni del sistema di equazioni differenziali ordinarie autonome

$$\begin{cases} x' = a(x, y, z) \\ y' = b(x, y, z) \\ z' = c(x, y, z) \end{cases} \tag{2}$$

che chiamiamo *curve caratteristiche* dell'equazione (1).

Proposizione 6.1. *Le soluzioni $u(x, y)$ della (1) verificano sulle curve caratteristiche l'equazione*

$$z(t) - u[x(t), y(t)] = k$$

essendo k costante.

Dimostrazione. Infatti

$$\frac{d}{dt}\left(z(t) - u[x(t), y(t)]\right) =$$

$$= c[x(t), y(t), z(t)] - \{a[x(t), y(t), z(t)]u_x + b[x(t), y(t), z(t)]u_y\} = 0$$

avendo tenuto conto che u é soluzione della (1). □

La precedente proposizione suggerisce un algoritmo per determinare il valore della soluzione u lungo i punti di una caratteristica:

- sia $(x_0.y_)$ un punto del piano,
- sia $u(x_0, y_0)$ il valore di u in tale punto,
- costruiamo la caratteristica $\mathcal{C}$ relativa alle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0,\;\; y(0) = y_0,\;\; z(0) = u(x_0, y_0)$$

- lungo tutta $\mathcal{C}$ riesce,

$$u[(x(t), y(t)] - z(t) = u[x(0), y(0)] - z(0) = 0$$

  e quindi

$$u[x(t), y(t)] = z(t)$$

In altre parole la determinazione dei valori della soluzione u equivale alla difficoltá della determinazione delle soluzioni del sistema di equazioni ordinarie (2).

7. Il problema di Cauchy

Sia assegnata nel piano (x, y) una curva γ_0 di equazioni parametriche

$$\gamma_0 : \;\; x = f(s), \;\; y = g(s), \;\; s \in I \subseteq \mathbb{R}$$

e sia $h(s)$ una funzione $h : \gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ assegnata anch'essa.

Cerchiamo una soluzione u della (1) che coincida su γ_0 con la funzione h:

$$u[f(s), g(s)] \; = \; h(s)$$

La determinazione di una tale soluzione prende il nome di *problema di Cauchy* relativo alla curva γ_0 e ai valori iniziali $h(s), \;\; s \in I$.

7.1. L'algoritmo di calcolo.

Il precedente algoritmo di calcolo suggerisce la determinazione dei valori della soluzione del problema di Cauchy precedente:

- scelto comunque s costruiamo la caratteristica, cioé la soluzione del sistema (2) relativa alle condizioni iniziali

$$x(0) = f(s),\ y(0) = g(s),\ \ z(0) = h(s)$$

- su tutti i punti di tale curva caratteristica u coincide con la z.

PROBLEMA: Al variare di s le caratteristiche corrispondenti spazzano (con unicitá) tutto il piano ?

7.2. Interpretazione geometrica.

Consideriamo la curva Γ_0 di equazioni parametriche

$$x = f(s),\ y = g(s),\ z = h(s), \quad s \in I$$

Si vuole determinare una superficie integrale della (1)

$$z = u(x, y)$$

che contenga Γ_0.

8. L'algoritmo generale

La determinazione della soluzione della (1) soddisfacente la condizione di Cauchy

$$u[f(s), g(s)] \ = \ h(s)$$

ovvero della superficie integrale contenente Γ_0 si fa risolvendo la famiglia di sistemi di equazioni ordinarie

$$\left\{ \begin{array}{l|l} x' = a(x,y,z) & x(0) = f(s) \\ x' = a(x,y,z) & x(0) = g(s) \\ x' = a(x,y,z) & x(0) = h(s) \end{array} \right. \qquad s \in I$$

Siano $\forall s \in I$

$$x = X(s,t),\ y = Y(s,t),\ z = Z(s,t)$$

le soluzioni del sistema assegnato.
Se il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X(s,t) \\ y = Y(s,t) \end{array} \right. \tag{3}$$

é risolvibile rispetto a s e a t, cioé se assegnato comunque (x, y) esistono s e t, unici, tali che la caratteristica uscente da $(f(s), g(s))$ passi, al tempo t per (x, y), allora, dette

$$s = S(x, y), \;\; t = T(x, y)$$

le funzioni implicite definite da tale sistema (3), la funzione di x e y

$$u(x, y) = Z[S(x, y), T(x, y)] \tag{4}$$

é soluzione del problema di Cauchy assegnato. La risolvibilitá del sistema (3) dipende dal verificare o meno la condizione di Dini.

Verifichiamo che la (4) sia soluzione del problema di Cauchy assegnato: Per quanto riguarda la condizione iniziale, tenuto conto che

$$\{x = f(s), \; y = g(s)\} \quad \to \quad S[x(s), y(s)] = s, \; T[x(s), y(s)] = 0$$

segue

$$u[x(s), y(s)] = Z[s, 0] = h(s)$$

Mentre per quanto riguarda che la funzione $u(x, y) = Z[S(x, y), T(x, y)]$ soddisfi la (1) occorre calcolare le u_x e u_y e per fare ció predisporre le espressioni delle derivate delle funzioni implicite $S(x, y), \; T(x, y)$.

Dalle identitá dalle quali si ricavano $S(x, y), \; T(x, y)$

$$\begin{cases} x = X(S(x, y), T(x, y)) \\ y = Y(S(x, y), T(x, y)) \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 1 = X_s S_x + X_t T_x \\ 0 = X_s S_y + X_t T_y \\ 0 = Y_s S_x + Y_t T_x \\ 1 = Y_s S_y + Y_t T_y \end{cases}$$

da tali relazioni si ricavano i due sistemi

$$\begin{cases} 1 = X_s S_x + X_t T_x \\ 0 = Y_s S_x + Y_t T_x \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = X_s S_y + X_t T_y \\ 1 = Y_s S_y + Y_t T_y \end{cases}$$

dai quali si deduce

$$S_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_s & a \\ Y_s & b \end{vmatrix}}, \quad T_x = \frac{\begin{vmatrix} X_s & 1 \\ Y_s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_s & a \\ Y_s & b \end{vmatrix}}, \quad S_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_s & a \\ Y_s & b \end{vmatrix}}, \quad T_y = \frac{\begin{vmatrix} X_s & 0 \\ Y_s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_s & a \\ Y_s & b \end{vmatrix}}$$

Indicato con D il comune denominatore delle quattro espressioni

$$D = \begin{vmatrix} X_s & a \\ Y_s & b \end{vmatrix}$$

si ha

$$S_x = \frac{b}{D}, \quad T_x = -\frac{Y_s}{D}, \quad S_y = -\frac{a}{d}, \quad T_y = \frac{X_s}{D}$$

Calcoliamo ora le derivate parziali della $u(x, y) = Z[S(x, y), T(x, y)]$

$$\begin{cases} u_x = Z_s S_x + Z_t T_x \\ u_y = Z_s S_y + Z_t T_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{1}{D} \{b - cY_s\} \\ \\ u_y = \dfrac{1}{D} \{-a + cX_s\} \end{cases}$$

Ne segue

$$au_x + bu_y = \frac{1}{D} \{abZ_s - acY_s - abZ_s + bcX_s\} = c$$

8.1. Le condizioni di Dini.

La risolvibilitá del sistema (3) sará, come tutti i problemi di funzioni implicite una risolvibilitá *in piccolo* .
La nota condizione di risolvibilitá del sistema

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \end{cases}$$

rispetto a s e t é

$$\det \begin{vmatrix} X_s(s, t) & X_t(s, t) \\ Y_s(s, t) & Y_t(s, t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Condizione che possiamo verificare in corrispondenza di $(s, t) = (0, 0)$ e dedurne poi, per continuitá, la validitá per (s, t) in un intorno (piú o meno piccolo) dell'origine.
Tenuto conto che

$$X(s, 0) = f(s), \quad Y(s, 0) = g(s)$$

la condizione di Dini diventa, scritta nell'origine,

$$\det \begin{vmatrix} f'(0) & a(f(0), g(0), h(0)) \\ g'(0) & b(f(0), g(0), h(0)) \end{vmatrix} \neq 0$$

Ovvero, leggendo geometricamente tale condizione, il vettore

$$\{f'(0),\ g'(0)\}$$

non deve essere parallelo al vettore

$$\{a(f(0), g(0), h(0)),\ b(f(0), g(0), h(0))\}$$

9. Legge di conservazione

Un esempio importante di equazione alle derivate parziali del primo ordine é fornito dalla legge di conservazione applicata, ad esempio alla massa di un soluto in un fluido che scorre.
Indichiamo con $u(x,t)$ la densitá lineare del soluto nel punto x e al tempo t: la quantitá Q di soluto presente nel tratto $[x_1, x_2]$ al tempo t é pertanto

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(s,t)\, ds$$

Se indichiamo con $q(u(x,t))$ la velocitá con la quale il soluto traversa il punto x avremo

$$Q(t+\triangle t) - Q(t) \approx$$

$$\approx \int_{x_1}^{x_2} [u(s,t+\triangle t) - u(s,t)]\, ds + [q(u(x_1,\tau) - q(u(x_2,\tau))]\, \triangle t$$

ovvero

$$\frac{Q(t+\triangle t) - Q(t)}{\triangle t} \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{u(s,t+\triangle t) - u(s,t)}{\triangle t} ds + [q(u(x_1,\tau) - q(u(x_2,\tau))]$$

ovvero, per $\triangle t \to 0$,

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} u_t(s,t) ds + q(u(x_1,t) - q(u(x_2,t))$$

Ammettendo, per conservazione, che

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

allora riesce anche

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(s,t) ds + q(u(x_1,t) - q(u(x_2,t)) = 0$$

ovvero, essendo

$$q(u(x_1,t) - q(u(x_2,t)) = \int_{x_1}^{x_2} (q(u))_x\, ds$$

si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} \{u_t(s,t) + (q(u))_x\}\, ds = 0$$

Tenuto conto che tale formula integrale deve essere vera qualunque sia l'intervallo $[x_1, x_2]$ ne segue

$$u_t(x,t) + (q(u))_x = 0 \tag{5}$$

L'espressione piú semplice di $q(u)$ puó essere

$$q(u) = v \,.\, u$$

essendo v la velocitá, costante, con la quale scorre il solvente (la velocitá dell'acqua nel fiume).

Con tale scelta di $q(u)$ l'equazione di continuitá (5) diventa

$$u_t(x,t) + v \,.\, u_x(x,t) = 0$$

equazione a coefficienti costanti.
Supponendo ad esempio che il soluto sia un'inquinante, immesso (incidentalmente) nel fiume al tempo $t = 0$ e che ha occupato una certa breve area del fiume, cioé un tratto incluso tra x_0 e x_1, allora questo stesso tratto, sporco, avanza lungo il fiume, restando uguale, con la stessa velocitá dell'acqua del fiume.
Il modello é particolarmente spartano perché non tiene conto della inevitabile diffusione: anche se l'acqua del fiume non scorresse, cioé se $v = 0$, l'inquinante si spargerebbe lungo il fiume per semplice diffusione.
L'espressione del flusso $q(u)$ contiene oltre all'addendo $v \,.\, u$ anche un addendo del tipo $-D \,.\, u_x$.
L'equazione di continuitá che ne deriva sará probabilmente

$$u_t(x,t) + v \,.\, u_x(x,t) - D u_{xx}(x,t) = 0$$

piú simile all'equazione del calore che ad un'equazione di primo ordine.

10. L'equazione di continuitá in $\mathbb{R}^3$

Sia $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ il vettore velocitá di un fluido nello spazio: indichiamo con $\rho(x,y,z,t)$ la densitá spaziale di tale fluido nel punto (x,y,z) al tempo t.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{S} = \partial\Omega$ la superficie che lo delimita: detta $\overrightarrow{\nu}$ la normale esterna a $\mathcal{S}$ la massa di fluido che entra (o esce) da Ω traversando la porzione superficiale $d\sigma$ nel tempo dt é

$$\rho \,.\, \overrightarrow{V} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma\, dt$$

Per cui la parte che entra (o esce) da Ω per via del movimento cui é soggetto il fluido durante il tempo $[t, t+dt]$ é

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho \,.\, \overrightarrow{V} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, d\sigma\, dt$$

quantitá che in virtú del teorema della divergenza equivale a

$$\left(\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\rho \,.\, \overrightarrow{V}\right)\, dx\, dy\, dz \right) dt$$

Tenuto conto che la massa contenuta in Ω é data da

$$\iiint_\Omega \rho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz$$

La variazione di massa contenuta in Ω nell'intervallo temporale $[,t+dt]$ dipende da due cause:

- una variazione in tale intervallo temporale della densitá ρ:

$$\iiint_\Omega [\rho(x,y,z,t)\ - \rho(x,y,z,t+dt)]\,dx\,dy\,dz$$

- la variazione imputata alla parte che entra (o esce) da Ω per via del movimento cui é soggetto il fluido durante il tempo $[t,t+dt]$ é

$$\left(\iiint_\Omega \operatorname{div}\left(\rho\,.\,\overrightarrow{V}\right)\,dx\,dy\,dz\right)dt$$

La *conservazione della massa* contenuta in Ω corrisponde all'assumere le due variazioni uguali ed opposte: da cui, dividendo per dt e passando al limite

$$\iiint_\Omega \left[\rho_t(x,y,z,t)\ + \operatorname{div}\left(\rho\,.\,\overrightarrow{V}\right)\right]dxdydz = 0$$

La validitá di una tale formula per ogni Ω corrisponde alla validitá in ogni punto dell'equazione

$$\rho_t\ + \operatorname{div}\left(\rho\,.\,\overrightarrow{V}\right)\ = 0$$

detta *equazione di continuitá*.
Vedi Courant John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. **II**, pag. 570, 602.

11. Esempio del traffico

Sia $u(x,t)$ la densitá di automobili lungo una autostrada: l'espressione del flusso $q(u)$ puó essere assunta come

$$q(u) = v(u)\,u$$

essendo $v(u)$ la velocitá media, dipendente naturalmente dalla densitá stessa: ad esempio $v(u) = v_M$, poco sotto la velocitá massima consentita, se la densitá u é inferiore ad una densitá critica u_0.
Superata tale densitá critica la velocitá diminuisce progressivamente fino ad annullarsi (la coda) quando la densitá supera la soglia U.
Semplicemente,

$$v(u) = v_M\,\left(1 - \frac{[u-u_0]_+}{U-u_0}\right)_+$$

da cui l'equazione di conservazione

$$u_t + \left[v_M \left(1 - \frac{[u - u_0]_+}{U - u_0} \right)_+ u \right]_x = 0$$

che diventa

$$\begin{cases} u < u_0 & u_t + v_M \, u_x = 0 \\ \\ u_0 < u < U & u_t + v_M \left(1 - \dfrac{2u - u_0}{U - u_0} \right) u_x = 0 \\ \\ U < u & u_t = 0 \end{cases}$$

Prendendo in considerazione il tratto intermedio e assumendo per semplicitá $u_0 = 0$ si perviene all'equazione quasi lineare

$$u_t + v_M \left(1 - 2\frac{u}{U} \right) u_x = 0$$

11.1. Il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} u_t + v_M \left(1 - 2\dfrac{u}{U} \right) u_x = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

La curva Γ_0 é, in questo caso

$$\Gamma_0 : t = 0, \; x = s, \; z = g(s) \qquad s \geq 0$$

Il sistema di equazioni ordinarie da risolvere:

$$\begin{cases} t' = 1 & t(0) = 0 \\ x' = v_M \left(1 - 2\dfrac{z}{U} \right) & x(0) = s \\ z' = 0 & z(0) = g(s) \end{cases}$$

produce

$$T(\tau, s) = \tau, \quad X(\tau, s) = v_M \left(1 - 2\frac{g(s)}{U} \right) \tau, \quad Z(\tau, s) = g(s)$$

Il sistema da risolvere in s e τ é pertanto

$$\begin{cases} \tau = t \\ v_M \left(1 - 2\dfrac{g(s)}{U} \right) \tau = x \end{cases}$$

ovvero, ricavando τ dalla prima si perviene all'equazione

$$g(s) = \frac{U}{2} \left(1 - \frac{x}{v_M t} \right)$$

La sua risolubilitá o meno, dipende naturalmente dalla scelta di $g(s)$

Indice

PDE lineari primo ordine 1
5. Equazioni quasi lineari 1
6. Le curve caratteristiche 1
7. Il problema di Cauchy 2
8. L'algoritmo generale 3
9. Legge di conservazione 6
10. L'equazione di continuitá in $\mathbb{R}^3$ 7
11. Esempio del traffico 8