Equazione di Laplace

1. La funzione di Green

Sia, indicati con x e y due punti di $\mathbb{R}^3$

$$E(x,y) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|x-y|}$$

Consideriamo la rappresentazione integrale di $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, anche rinunciando all'ipotesi che sia armonica

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \left\{ E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y - \iiint_{\Omega} E(x,y)\,\triangle u(y) dy$$

e consideriamo la relazione integrale, sempre dedotta dal teorema della divergenza, che lega u ad una qualsiasi altra funzione v regolare in $\overline{\Omega}$

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\sigma - \iiint_{\Omega} \{u\triangle v - v\triangle u\}\, dy$$

relazione che, nel caso v armonica si riduce a

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\sigma + \iiint_{\Omega} v\triangle u\, dy$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \left\{ (E-v)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial (E-v)}{\partial n} \right\} d\sigma - \iiint_{\Omega} (E-v)\,\triangle u dy$$

$\boxed{\text{Primo caso}}$

Supponiamo che la u soddisfi il problema di Dirichlet interno, non omogeneo,

$$\begin{cases} \triangle u = f & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

allora, supponendo di aver scelto v tale che

$$(E-v)\big|_{y\in\partial\Omega} = 0$$

si ha, posto

$$G = E - v$$

$$u(x) = -\iint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma - \iiint_{\Omega} G\, f\, dy \tag{1}$$

La funzione G prende il nome di *funzione di Green per il problema di Dirichlet* e consente, tramite la (1) di rappresentare direttamente la soluzione u.

$\boxed{\text{Secondo caso}}$

Supponiamo che la u soddisfi il problema di Neumann interno, non omogeneo,

$$\begin{cases} \triangle u = f & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Analogamente, supponendo di aver scelto v tale che

$$\left.\frac{\partial (E - v)}{\partial n}\right|_{y \in \partial\Omega} = 0$$

si ha, posto

$$G = E - v$$

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \varphi(y)\, G(x,y)\, d\sigma_y - \iiint_{\Omega} G(x,y)\, f(y)\, dy \tag{2}$$

In questo secondo caso la funzione G prende il nome di *funzione di Green per il problema di Neumann* e consente, tramite la (2) di rappresentare direttamente la soluzione u.

1.1. Un circolo vizioso. Le formule (1) e (2) rappresentano le soluzioni dei problemi rispettivamente di Dirichlet e di Neumann, a patto di disporre delle corrispondenti funzioni di Green G.
La determinazione delle funzioni di Green dipende dalla risoluzione di analoghi problemi di Dirichlet e di Neumann: si cercano infatti funzioni v che risolvano

$$\begin{cases} \begin{cases} \triangle v(x) = 0 \\ v(y) = E(x,y) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ \forall y \in \partial\Omega \end{array} \right. \\ \\ \begin{cases} \triangle v(x) = 0 \\ \dfrac{\partial v(y)}{\partial n} = \dfrac{\partial E(x,y)}{\partial n} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ \forall y \in \partial\Omega \end{array} \right. \end{cases} \tag{3}$$

C'é quindi un prezzo da pagare, la determinazione della v, che ovviamente sará una $v(x,y)$ dal momento che da y dipende la condizione al contorno: ma non si tratta di un circolo vizioso.

La determinazione della $v(x)$ che coincida con $E(x, y)$ su $\partial\Omega$ si fa *una tantum* per l'insieme Ω su cui si vuol lavorare: con essa poi si risolvono, tramite la corrispondente $G(x, y)$

tutti

i problemi di Dirichlet e, analogamente, di Neumann.

1.2. L'interpretazione elettrostatica. Nell'interpretazione elettrostatica la funzione di Green per il problema di Dirichlet,

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} + v(x, y)$$

rappresenta il potenziale nel punto x generato da una carica unitaria posta nel punto $y \in \Omega$, o viceversa, supponendo che $\partial\Omega$, la superficie che racchiude Ω sia un conduttore.... messo a terra! (cioé a potenziale zero).

Il primo termine

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

é il potenziale, libero nello spazio, creato nel punto y dalla carica unitaria posta in x , o viceversa.

Il secondo v indica il potenziale del campo generato dalle cariche, presenti per induzione su $\partial\Omega$.

1.3. Proprietá della funzione di Green.

- La funzione di Green $G(x, y)$ per ogni fissato x é armonica in y per $y \neq x$,
- al tendere di $y \to x$ la funzione di Green diverge positivamente come $\frac{1}{|x-y|}$
- $G(x, y)$ si annulla per $y \in \partial\Omega$,
- $G(x, y) > 0, \quad \forall y \in \Omega$,
- $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} \leq 0$
- $G(x, y) = G(y, x)$.

2. Il metodo delle immagini elettrostatiche

La determinazione della v, vedi problemi (3), tale che

$$E - v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in \partial\Omega$$

conduce, naturalmente, alla ricerca di una funzione v che dipenda, come la E da due variabili puntuali, x e y.

Tale determinazione si ottiene, in alcuni casi geometricamente semplici, mediante il *metodo delle immagini elettrostatiche*.

Il caso della sfera

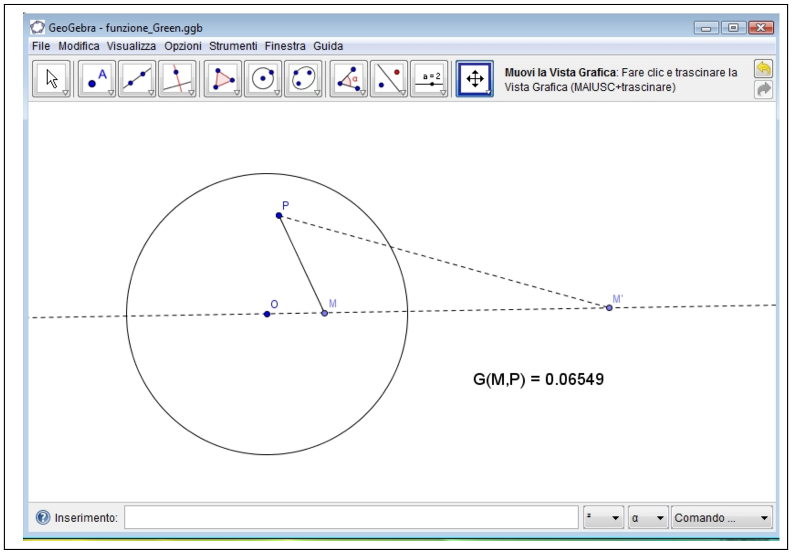

Figura 1. Il metodo delle immagini elettrostatiche

Consideriamo, come esempio il caso di Ω una sfera di centro l'origine O e raggio R: sia $x \in \overset{o}{\Omega}$ e sia

$$\frac{R^2}{|x|^2}\,x$$

il trasformato di x per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera di raggio R.
Si puó dimostrare (con un po' di geometria elementare ma non banale) che per ogni $y \in \partial\Omega$ riesce

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{R}{|x|}\frac{1}{\left|y - \dfrac{R^2}{|x|^2}\,x\right|}$$

cioé, posto

$$v(x,y) = \frac{R}{4\pi\,|x|}\frac{1}{\left|y - \dfrac{R^2}{|x|^2}\,x\right|}$$

riesce

$$\forall y \in \partial\Omega : \;\; E(x,y) - v(x,y) = 0$$

Pertanto la soluzione del problema di Dirichlet interno nella sfera Ω_R di centro l'origine e raggio R

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega_R \\ u = f & \forall P \in \partial\Omega_R \end{cases}$$

si rappresenta con il seguente integrale

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_R} f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left\{ \frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{\left| y - \frac{R^2}{|x|^2}\, x \right|} \right\} d\sigma_y$$

2.1. Il calcolo della derivata normale di $G(x,y)$. Indicati con

$$x_1 = \frac{R^2}{|x|^2}\, x, \quad r_0 = |x-y|, \quad r_1 = |x_1 - y|, \quad \frac{r_0}{r_1} = \frac{|x|}{R}\, \forall y \in \partial\Omega$$

si ha

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{r_1} \right\}$$

da cui

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r_0} - \frac{R}{|x|} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r_1} \right\}$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{r_0^2} \cos\left(\widehat{(x-y)\, n} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_1^2} \cos\left(\widehat{(x_1-y)\, n} \right)$$

e tenuto conto che, per $y \in \partial\Omega$, dal teorema di Carnot sui triangoli segue

$$R^2 + |x-y|^2 - 2R|x-y| \cos\left(\widehat{(x-y)\, n} \right) = |x|^2$$

e

$$R^2 + |x_1-y|^2 - 2R|x_1-y| \cos\left(\widehat{(x_1-y)\, n} \right) = |x_1|^2$$

si ha quindi, ricavando i coseni

$$\frac{R^2 + |x-y|^2 - |x|^2}{2R|x-y|} = \cos\left(\widehat{(x-y)\, n} \right)$$

$$\frac{R^2 + |x_1-y|^2 - |x_1|^2}{2R|x_1-y|} = \cos\left(\widehat{(x_1-y)\, n} \right)$$

Tenuto conto dei legami tra x e x_1 riesce inoltre

$$\frac{R^2 + |x_1-y|^2 - |x_1|^2}{2R|x_1-y|} = \frac{|x|^2 + |x-y|^2 - R^2}{2|x||x-y|} = \cos\left(\widehat{(x_1-y)\, n} \right)$$

da cui sostituendo

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_0^2}\cos\left(\widehat{(x-y)\,n}\right) - \frac{R}{|x|}\frac{1}{r_1^2}\cos\left(\widehat{(x_1-y)\,n}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2+|x-y|^2-|x|^2}{2R|x-y|} - \frac{R}{|x|}\frac{1}{r_1^2}\frac{|x|^2+|x-y|^2-R^2}{2|x||x-y|}\right\}$$

Tenuto conto, come precedentemente osservato che

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{|x|}{R} \quad\to\quad \frac{R}{|x|}\frac{1}{r_1^2} = \frac{|x|}{Rr_0^2}$$

riesce

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2+|x-y|^2-|x|^2}{2R|x-y|} - \frac{|x|}{Rr_0^2}\frac{|x|^2+|x-y|^2-R^2}{2|x||x-y|}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_0^2}\left\{\frac{R^2+|x-y|^2-|x|^2}{2R|x-y|} - \frac{|x|^2+|x-y|^2-R^2}{2R\,|x-y|}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\,R}\,\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}$$

2.2. La formula risolutiva.

Tenuto conto della formula di rappresentazione (1) si ha, nel caso $\triangle u = 0$,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi\,R}\iint_{\partial\Omega}\varphi(y)\,\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\,d\sigma_y$$

Il caso del semispazio

Sia $\Omega:\ z\geq 0$: collochiamo nel punto $x\in\Omega$ la carica unitaria, sia

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}$$

il potenziale da essa determinato nello spazio.
Indicato con x_1 il simmetrico di x rispetto alla frontiera $z=0$ di Ω la funzione di Green riesce, naturalmente,

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_1-y|}\right\} =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right\}$$

Tenuto conto che la normale é l'asse ζ riesce

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right]_\zeta - \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right]_\zeta\right\}$$

Calcolando tale derivata normale sul piano $\zeta = 0$ si ha

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_y}\right|_{y\in\partial\Omega} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{z}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}\right)^{3/2}}$$

2.3. La formula risolutiva. Tenuto conto della formula di rappresentazione (1) si ha, nel caso $\triangle u = 0$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\partial\Omega}\varphi(y)\,\frac{1}{|x-y|^3}\,d\sigma$$

3. I potenziali di volume, di strato, di doppio strato

3.1. Potenziale di volume. Assegnata la funzione $\rho(x) \in C^0(\Omega)$ la funzione

$$\mathcal{V}_\rho(x) = \iiint_\Omega \rho(y)E(x,y)dy$$

prende il nome di potenziale di volume (o di dominio) determinato da $\rho(x)$.

Teorema 3.1. *L'integrale che definisce $\mathcal{V}_\mu(x)$ esiste, in senso generalizzato, in ogni $x \in \mathbb{R}^3$.*

Teorema 3.2. *La funzione $\mathcal{V}_\mu(x)$ gode delle seguenti proprietá:*

- $\mathcal{V}_\mu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\Omega\})$
- $\triangle\mathcal{V}_\mu(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{\overline{\Omega}\}$
- $\triangle\mathcal{V}_\mu(x) = \rho(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\mathcal{V}_\mu(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$\boxed{\text{Osservazione}}$

La formula

$$\triangle\iiint_\Omega \rho(y)E(x,y)dy = \rho(x) \quad \forall x \in \Omega$$

si interpreta tradizionalmente come una convoluzione: indicata con

$$e(x) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|x|}$$

riesce

$$\mathcal{V}_\mu(x) = \mu \, * \, e\,(x)$$

da cui discende

$$\triangle \mathcal{V}_\mu(x) = \mu \, * \, \triangle e\,(x) = \mu \, * \, \delta = \mu(x)$$

essendo δ la misura di Dirac concentrata nell'origine.

3.2. Potenziale di semplice strato. Assegnata la funzione $\mu(x) \in C^0(\partial\Omega)$ la funzione

$$V_\mu(x) = \iint_{\partial\Omega} \mu(y) E(x,y)\, d\sigma$$

prende il nome di potenziale di semplice strato determinato da μ.

Teorema 3.3. *L'integrale che definisce $V_\mu(x)$ esiste, in senso generalizzato, in ogni $x \in \mathbb{R}^3$.*

Teorema 3.4. *La funzione $V_\mu(x)$ gode delle seguenti proprietá:*

- $V_\mu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\partial\Omega\})$
- $\triangle V_\mu(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{\partial\Omega\}$
- $V_\mu(x) \in C^0(\mathbb{R}^3)$

Indicato semplicemente con V l'operatore che, fissato Ω fa corrispondere ad ogni funzione continua $\mu(y)$ la $V_\mu(x)$ riesce

$$V : C^0(\partial\Omega) \mapsto C^0(\mathbb{R}^3).$$

3.3. Potenziale di doppio strato. Assegnata la funzione $\nu(x) \in C^0(\partial\Omega)$ la funzione

$$W_\nu(x) = \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma$$

prende il nome di potenziale di doppio strato determinato da ν.

Teorema 3.5. *L'integrale che definisce $W_\nu(x)$ esiste, in senso generalizzato, in ogni $x \in \mathbb{R}^3$.*

Teorema 3.6. *La funzione $W_\nu(x)$ gode delle seguenti proprietá:*

- $W_\nu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\partial\Omega\})$
- $\triangle W_\nu(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{\partial\Omega\}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} = W_\mu(x_0) \mp \frac{1}{2}\nu(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega$ *(vale il segno $-$ se si tende dall'interno e il segno $+$ se si tende dall'esterno)*

4. Uso dei potenziali

4.1. Il problema di Dirichlet interno. Cerchiamo soluzioni per il problema DI, vedi pagina **??**, nella forma di un opportuno potenziale di doppio strato

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma$$

- é evidente che $u(x)$ é armonica in $\overset{o}{\Omega}$ qualunque sia la scelta di $\nu(y)$,
- tenuto presente che $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x\to x_0} \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y$$

la condizione al contorno sará soddisfatta se e solo se $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$-\frac{1}{2}\mu(x_0) + \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y = f(x_0)$$

4.2. Il problema di Dirichlet esterno. Cerchiamo soluzioni per il problema DE, vedi pagina **??**, nella forma di un opportuno potenziale di doppio strato

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma$$

4.3. Il problema di Neumann interno. Cerchiamo soluzioni per il problema NI, vedi pagina **??**, nella forma di un opportuno potenziale di semplice strato

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \mu(y) E(x,y)\, d\sigma$$

- é evidente che $u(x)$ é armonica in $\overset{o}{\Omega}$ qualunque sia la scelta di $\nu(y)$,
- $\forall x \in \overset{o}{\Omega}$ si ha

$$\nabla_x \iint_{\partial\Omega} \mu(y) E(x,y)\, d\sigma_y = -\iint_{\partial\Omega} \mu(y) \nabla_y E(x,y)\, d\sigma_y$$

- tenuto presente che $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\partial u}{\partial n} = -\iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y = +\frac{1}{2}\mu(x_0) - \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y$$

la condizione al contorno sará soddisfatta se e solo se $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$+\frac{1}{2}\mu(x_0) - \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma_y = g(x_0)$$

5. Gli autovalori del Laplaciano

5.1. Il caso unidimensionale. Consideriamo il problema in un intervallo $\Omega : [0, a]$ della retta

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Integrando su Ω si ha

$$\int_{Omega} u\, u'' dx + \lambda \int_\Omega u^2\, dx = 0 \quad \to \quad \int_\Omega \left|\left|u'\right|^2\right|\, dx = \lambda \int_\Omega u^2\, dx$$

da cui segue che gli autovalori λ devono essere positivi.
Sono soluzioni del problema le funzioni

$$u_n(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

se e solo se

$$\lambda = \pi^2\, \frac{n^2}{a^2}$$

Se ne deduce che:

- gli autovalori sono una successione divergente a $+\infty$
- le autofunzioni $u_n(x)$ costituiscono un sistema completo relativamente alle funzioni $C^1(\Omega)$.

5.2. Il caso bidimensionale. Consideriamo il problema in un rettangolo $\Omega : [0, a] \times [0, b]$ nel piano

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Integrando su Ω si ha

$$\iint_{Omega} u \triangle u dx + \lambda \iint_\Omega u^2\, dx = 0 \quad \to \quad \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \lambda \iint_\Omega u^2\, dx$$

da cui segue che gli autovalori λ devono essere positivi.
Sono soluzioni del problema le funzioni

$$u_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)\, \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

se e solo se

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

Se ne deduce che:

- gli autovalori sono una successione divergente a $+\infty$
- le autofunzioni $u_{n,m}(x, y)$ costituiscono un sistema completo relativamente alle funzioni $C^1(\Omega)$.

5.3. Il caso tridimensionale. Consideriamo il problema in un dominio rettangolare $\Omega : \ [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ nello spazio

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Integrando su Ω si ha

$$\iiint_{Omega} u \triangle u dx + \lambda \iiint_{\Omega} u^2 \, dx = 0 \quad \rightarrow \quad \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \lambda \iiint_{\Omega} u^2 \, dx$$

da cui segue che gli autovalori λ devono essere positivi.
Sono soluzioni del problema le funzioni

$$u_{n,m,p}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

se e solo se

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)$$

Se ne deduce che:

- gli autovalori sono una successione divergente a $+\infty$
- le autofunzioni $u_{n,m,p}(x,y)$ costituiscono un sistema completo relativamente alle funzioni $C^1(\Omega)$.

Indice