Equazione di Laplace

1. Introduzione

Si da il nome di operatore di Laplace o laplaciano all'operatore differenziale

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

in tre dimensioni, o agli analoghi in dimensioni diverse.
L'operatore di Laplace é un operatore differenziale lineare del secondo ordine di tipo ellittico.
Il nome di *ellittico* dato al Laplaciano o di *iperbolico* dato all'operatore delle onde sono collegati alle forme quadratiche ottenute sostituendo agli operatori di derivazione i corrispondenti monomi:

$$\begin{array}{lcl} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & \to & x^2 + y^2 + z^2 \\ u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & \to & t^2 - c^2(x^2 + y^2 + z^2) \end{array}$$

La forma quadratica corrispondente al laplaciano é definita positiva, donde il nome di *operatore ellittico*, quella corrispondente all'equazione delle onde non é definita, donde il nome di *operatore iperbolico*.
Le funzioni u che verificano l'equazione

$$\triangle u = 0$$

si dicono funzioni armoniche.
Esse hanno numerose importanti proprietá, quasi tutte collegabili alla proprietá di media:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S[x_0,r]} u(y) d\sigma$$

che lega il valore di una funzione armonica in un punto ai valori che essa prende sulla superficie sferica $S[x_0, r]$ di centro x_0 e raggio r.
Tale proprietá é alla base dei metodi numerici relativi ai problemi che coinvolgono funzioni armoniche.

1.1. Coordinate polari o sferiche.

Sono importanti le espressioni polari del laplaciano in dimensione 2 o 3:

$$n=2: \quad \triangle u(x,y) = u_{\rho\,\rho} + \frac{1}{\rho}\,u_\rho + \frac{1}{\rho^2}\,u_{\theta\,\theta}$$

$$n=3: \quad \triangle u(x,y,z) = \frac{1}{\rho^2\sin(\theta)}\left\{\left(\rho^2\sin(\theta)u_\rho\right)_\rho + \left(\sin(\theta)u_\theta\right)_\theta + \left(\frac{1}{\sin(\theta)}u_\varphi\right)_\varphi\right\}$$

1.2. Esempi di funzioni armoniche.

- In dimensione $n=1$: $u(x)=\alpha x+\beta$, polinomi di primo grado,
- In dimensione $n=2$: $u(x,y)$ tutte le parti reali e le parti immaginarie delle funzioni olomorfe,
- in dimensione $n=3$: tutte le precedenti e molte altre.... !

2. Problemi collegati al laplaciano

Assegnato un dominio Ω si considerano, in varie occasioni, i seguenti problemi al contorno

- Problema interno di Dirichlet (DI)

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ u = f & \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

- Problema interno di Neumann (NI)

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ \dfrac{df}{d\nu} = f & \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

- Problema esterno di Dirichlet (DE)

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \notin \Omega \\ u = f & \forall P \in \partial\Omega \\ \lim\limits_{P\to\infty} u(P) = 0 & \end{cases}$$

- Problema esterno di Neumann (NE)

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ \dfrac{df}{d\nu} = f & \forall P \in \partial\Omega \\ \lim\limits_{P\to\infty} u(P) = 0 & \end{cases}$$

3. Una proprietá di minimo

Sia Ω limitato, sia $\mathfrak{F}$ lo spazio delle funzioni di classe $C^2(\Omega)$ che coincidono con $f(x)$ sulla frontiera $\partial\Omega$: per ogni $\varphi \in \mathfrak{F}$ consideriamo il funzionale quadratico, non negativo,

$$\Psi(\varphi) \;=\; \iiint_{\Omega} |\nabla\varphi(y)|^2 \, dy$$

Riesce

$$\min_{\varphi\in\mathfrak{F}} \Psi(\varphi) = \Psi(u)$$

essendo $u \in \mathfrak{F}$ la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ u = f & \forall P \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Esempio 3.1. *Consideriamo la questione in dimensione $n = 1$: sia $\Omega = [0, 1]$, e sia $f(0) = a$, $f(1) = b$.*
Lo spazio $\mathfrak{F}$ é pertanto lo spazio delle funzioni di classe $C^2([0, 1])$ che prendono agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$ i valori a e b assegnati.
Tra le funzioni di $\mathfrak{F}$ c'é la funzione lineare, e quindi armonica, $u'' \equiv 0$,

$$u(x) = a + (b - a)x$$

Tutte le altre si possono esprimere modificando la u con un addendo v_0 di classe $C^2([0, 1])$ nullo agli estremi.
Riesce

$$\int_0^1 [u'(x) + v_0'(x)]^2 \, dx = \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx + 2\int_0^1 u'(x)\, v_0'(x) \, dx + \int_0^1 [v_0'(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx - 2\int_0^1 u''(x) v_0(x) dx + \int_0^1 [v_0'(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx + \int_0^1 [v_0'(x)]^2 \, dx \geq \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2}(b - a)^2$$

La funzione lineare u é pertanto, tra quelle che prendono agli estremi di $[0, 1]$ i valori a e b quella che ha derivata prima al quadrato di integrale piú basso.

Sia u la soluzione del precedente problema di Dirichlet (**??**): per ogni funzione $v_0 \in C^2(\Omega)$ nulla su $\partial\Omega$ riesce

$$u(y) \pm \, v_0(y) \in \mathfrak{F}$$

viceversa ogni funzione $v \in \mathfrak{F}$ puó pensarsi come $u + v_1$ per convenienti $v_1 \in C^2(\Omega)$ nulla su $\partial\Omega$.

$$\Psi(u \pm v_0) = \Psi(u) \pm 2\iiint_\Omega \nabla u\, \nabla v_0 dy + \Psi(v_0)$$

riesce quindi

$$\Psi(u \pm v_0) \geq \Psi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\iiint_\Omega \nabla u\, \nabla v_0 dy\right| = 0$$

condizione quest'ultima che, per il teorema della divergenza equivale a

$$\iiint_\Omega v_0(y) \triangle u(y)\, dy = 0$$

É noto che tale ultima condizione é vera in corrispondenza ad ogni $v_0 \in C^2(\Omega)$ nulla su $\partial\Omega$ se e solo se riesce

$$\triangle\, u = 0$$

Quindi tra le funzioni di $\mathfrak{F}$ quella armonica ha il gradiente di modulo quadrato ad integrale piú basso.

4. Il principio di massimo

Per le funzioni armoniche in una dimensione, $u(x) = \alpha x + \beta$ é ovvio che in qualsiasi intervallo $[a, b]$ riesce

$$\min\{u(a), u(b)\} \leq u(x) \leq \max\{u(a), u(b)\}$$

Cioé il massimo e il minimo della funzione in un intervallo sono il massimo e il minimo sulla frontiera.
Il risultato si conserva in piú dimensioni: sia $M = \max_{P\in\overline{\Omega}} u(P)$ se

$$\exists\, P_0 \in \overset{o}{\Omega}\!: \;\; u(P_0) = M,$$

allora tenuto conto che $u(P_0)$ coincide con la media su ogni superficie sferica di centro P_0 se ne deduce che riesce

$$u(P) = u(P_0)$$

su tutta la superficie sferica scelta e, quindi, stante l'arbitrarietá, riesce

$$u(P) = u(P_0) \;\; \forall P \in B(P_0, r)$$

avendo indicato con $B(P_0, r)$ una sfera di centro P_0 e raggio tale da stare dentro Ω.
Allargandosi si arriva a toccare la frontiera $\partial\Omega$ e quindi a trovare un punto $P^* \in \partial\Omega$ in cui riesce $u(P^*) = M$, e quindi

$$\max_{P\in\overline{\Omega}} u(P) = \max_{P\in\partial\Omega} u(P)$$

Discorso analogo per il minimo.

Proposizione 4.1. *Se due funzioni u e v armoniche in Ω verificano la disuguaglianza*

$$\forall t \in \partial\Omega : \; u(t) \leq v(t)$$

allora riesce anche

$$u(x) \leq v(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Corollario 4.2. *Sia u armonica in Ω e costante su $\partial\Omega$: allora é costante in Ω.*

5. Unicitá del problema di Dirichlet interno

Proposizione 5.1. *Siano u e v le soluzioni dei due problemi*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ u = f & \forall P \in \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle v = 0 & \forall P \in \Omega \\ u = g & \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

allora riesce

$$\max_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |f(x) - g(x)|$$

Dimostrazione. Consideriamo la differenza

$$w = u - v$$

La w é armonica e prende sulla frontiera i valori $f(x) - g(x)$.
Dal principio di massimo segue allora

$$\forall x \in \Omega : \; \min_{t \in \partial\Omega}\{f(t) - g(t)\} \leq u(x) - v(x) \leq \max_{t \in \partial\Omega}\{f(t) - g(t)\}$$

da cui l'asserto.
La precedente Proposizione **??** garantisce naturalmente l'unicitá della soluzione per il problema di Dirichlet interno.

5.1. Il problema esterno.

Se si omette la condizione di essere infinitesima all'infinito il problema esterno non ha unicitá come si riconosce dal seguente contresempio: sia Ω la sfera di centro l'origine e raggio $r = 1$ consideriamo il problema

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \notin \Omega \\ u = 1 & \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

Le due funzioni

$$u_1(x) \equiv 1, \quad u_2(x) = \frac{1}{r}$$

sono soluzioni del problema che, quindi non ha unicitá.
Unicitá che ritorna se aggiungiamo, come fatto precedentemente, la condizione $\lim_{r \to \infty} u(P) = 0$.

□

6. Unicitá del problema di Neumann interno

Siano u e v due soluzioni del problema di Neumann interno

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \forall P \in \Omega \\ \dfrac{df}{d\nu} = f & \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

La loro differenza $w = u - v$ é armonica e ha derivata normale nulla sulla frontiera $\partial\Omega$: dal teorema della divergenza riesce

$$0 = \iint_{\partial\Omega} w(y) \frac{\partial w(y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y = \iiint_{\Omega} |\nabla w(y)|^2 dy$$

da cui

$$|\nabla w(y)| = 0 \quad \to \quad w(y) = \text{costante}$$

da cui

$$u(x) = v(x) + \text{costante}$$

Ovvero il problema di Neumann ha unicitá a meno di costanti.

7. La soluzione fondamentale

Indichiamo semplicemente con

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3), \quad |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$$

La funzione (di sei variabili reali)

$$E(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

possiede le seguenti proprietá:

- $E(x, y) > 0$,
- $E(x, y) = E(y, x)$,
- $E \in C^\infty(x \neq y)$,
- $\triangle_x E(x, y) = \triangle_y E(x, y) = 0 \quad \forall x \neq y$
- $E(x, y)$ é dotata di integrale rispetto ad y generalizzato in ogni dominio Ω chiuso, limitato e misurabile, qualunque sia x,
- le derivate parziali prime $E_{x_i}(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ sono dotate di integrale rispetto ad y generalizzato in ogni dominio Ω chiuso, limitato e misurabile, qualunque sia x.

La soluzione di numerosi problemi collegati al laplaciano é rappresentata con formule integrali che si servono della funzione $E(x, y)$ e/o delle sue derivate prime.

La funzione $E(x,y)$ presenta, per $x=y$ una singolaritá del tipo illimitato di ordine
$$\frac{1}{r^1}$$
Le sue derivate prime presentano una singolaritá del tipo illimitato di ordine
$$\frac{1}{r^2}$$
Tenuta presente la dimensione 3 dello spazio la funzione $E(x,y)$ e le sue derivate prime sono dotate di integrale generalizzato anche in domini limitati Ω che includono x.
Si puó quindi far uso di integrali quali
$$\iiint_\Omega E(x,y)\varphi(y)dy, \quad \iiint_\Omega \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}\varphi(y)dy, ...$$
qualunque sia la funzione (continua) $\varphi(y)$ e ovunque sia il punto x.
Per quanto riguarda integrali di $E(x,y)$ in dimensione 2, cioé sulle frontiere $\partial\Omega$, ancora nessuna difficoltá dovunque sia x, mentre non possono in generale essere integrate le derivate prime di $E(x,y)$ su $\partial\Omega$ se $x \in \partial\Omega$.

7.1. Un fenomeno sorprendente. Se la superficie $\partial\Omega$ é sufficientemente regolare allora la derivata normale
$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}$$
presenta, per $x, y \in \partial\Omega$ una singolaritá bassa, tanto da riconoscere che il suo integrale generalizzato su $\partial\Omega$ é limitato.
Immaginiamo che $\partial\Omega$ sia cartesiana
$$y_3 = f(y_1, y_2)$$
con
$$f(0,0) = 0, \;\; f_{y_1}(0,0) \;=\; f_{y_2}(0,0) \;=\; 0$$
Prendiamo $x = 0$, punto appartenente a $\partial\Omega$:
$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + f^2(y_1,y_2)}, \quad \overrightarrow{n_y} = \frac{1}{\sqrt{1+f_{y_1}^2+f_{y_2}^2}}\{f_{y_1},\; f_{y_2},\; -1\}$$
riesce
$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^3}\{y_1,\; y_2,\; f(y_1,y_2)\}\,\frac{1}{\sqrt{1+f_{y_1}^2+f_{y_2}^2}}\{f_{y_1},\; f_{y_2},\; -1\}$$
Da cui

$$\left|\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right| \leq \frac{|y_1 f_{y_1}(0,0) + \ y_2 f_{y_2}(0,0) \ - \ f(y_1,y_2)|}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+f^2(y_1,y_2)}\right)^3} \leq M\frac{y_1^2+y_2^2}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^3}$$

Riassumendo

$$\left|\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$$

da cui l'asserto.
Si ricordi che una tale singolaritá debole si trova solo per la derivata normale di E, mentre non si trova, in generale, per altre derivate oblique.

8. Formule di rappresentazione integrale

Lemma 8.1. *Sia Ω un dominio chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$ si ha, dal teorema della divergenza*

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y = \begin{cases} -1 & \forall x \in \overset{o}{\Omega} \\ \\ 0 & \forall x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Dimostrazione. Cominciamo con il caso $x \notin \overline{\Omega}$: il teorema della divergenza riconosce che

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y = \iiint_{\Omega} \triangle_y\, E(x,y)\, dy$$

da cui l'asserto, tenuto conto che $\triangle_y\, E(x,y) = 0$.

Il caso x interno a Ω non consente l'uso immediato del teorema della divergenza su Ω: consideriamo tuttavia una sferetta $B(x,r)$ di centro x, raggio r tutta contenuta in Ω e applichiamo il teorema della divergenza riferito a $\Omega - B(x,r)$:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y - \iint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y = 0$$

Calcoliamo l'integrale sulla frontiera della sferetta $B(x,r)$ servendosi di coordinate sferiche di centro in x:

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r^2}, \qquad \iint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y = -\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B(x,r)} d\sigma_y = -1$$

da cui l'asserto. $\square$

Il teorema della divergenza applicato alla $E(x,y)$ e ad una funzione armonica $u(y)$ conduce, se $x \notin \Omega$, a

$$\iint_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} - E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y =$$

$$= \iiint_{\Omega} \{u(y)\triangle_y E(x,y) - E(x,y)\triangle_y u(y)\}\, dy = 0$$

essendo i due laplaciani nell'integrale a secondo membro nulli entrambi. Nel caso in cui invece $x \in \overset{o}{\Omega}$ la formula non si puó applicare direttamente, ma, come fatto precedentemente si puó lavorare su $\Omega - B(x,r)$ essendo $B(x,r)$ una sferetta di centro x e raggio r: si ha pertanto

$$\iint_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} - E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y =$$

$$= \iint_{\partial B(x,r)} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y - \iint_{\partial B(x,r)} \left\{ E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y$$

Passando al limite per $r \to 0$ nei due integrali a secondo membro:

- il primo tende a $-u(x)$
- il secondo tende a zero.

Si ha pertanto

Lemma 8.2. *Sia u armonica in Ω, per ogni $x \in \overset{o}{\Omega}$ vale la seguente formula di rappresentazione integrale:*

$$u(x) = -\iint_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} - E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y \tag{2}$$

Nel caso, terzo e piú complesso, che $x \in \partial\Omega$ costruiamo, analogamente la sferetta $B(x,r)$ di centro x e raggio r: indichiamo con

- $S_r = \partial(\Omega \cap B(x,r))$ la porzione della superficie sferica che delimita $B(x,r)$ interna a Ω
- Σ_r la parte di $\partial\Omega$ fuori di $B(x,r)$

Applicando il teorema della divergenza su $\Omega - B(x,r)$ si ottiene quindi

$$\iint_{\Sigma_r} \left\{ u(y)\frac{deE(x,y)}{\partial n_y} - E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y =$$

$$= \iint_{S_r} \left\{ u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y - \iint_{S_r} \left\{ E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right\} d\sigma_y$$

É possibile dimostrare che:

- $\displaystyle\lim_{r\to 0} \iint_{\Sigma_r} \{.....\}\, d\sigma_y = \iint_{\partial\Omega} \{.....\}\, d\sigma_y$

- $\lim_{r\to 0}\iint_{S_r}\left\{u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right\}\,d\sigma_y = -\frac{1}{2}u(x)$
- $\lim_{r\to 0}\iint_{S_r}\left\{E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right\}\,d\sigma_y = 0$
- Il primo dei tre risultati, non banale, dipende dal tipo di singolaritá polare che la funzione di y
$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}$$
presenta per $y \to x$ se la frontiera $\partial\Omega$ é regolare, vedi paragrafo **??**, una singolaritá
$$\frac{1}{|x-y|^{2-\alpha}}, \quad \alpha > 0$$
- Il secondo dei tre risultati, non banale anch'esso, dipende dall'osservazione che la porzione S_r di superficie sferica somiglia sempre piú, al tendere di $r \to 0$ a una semi superficie sferica: quindi, pensando di lavorare in coordinate sferiche di centro x si ha
$$\iint_{S_r}\left\{u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right\}\,d\sigma_y \approx -\frac{u(x)}{4\pi r^2}\,2\pi\,r^2 = -\frac{1}{2}u(x)$$
- Il terzo dei tre risultati é il piú semplice tenuto conto che la derivata normale di u sará limitata e la funzione E ha una singolaritá del tipo $1/r^1$: quindi
$$\left|\iint_{S_r}\left\{E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right\}\,d\sigma_y\right| \leq \frac{M}{r}\,2\pi r^2 = 2\pi M r$$

8.1. Risultati di regolaritá. La formula di rappresentazione integrale (**??**) produce numerose ricadute importanti

- le funzioni armoniche in Ω sono necessariamente $C^\infty(\overset{o}{\Omega})$
- i valori in $\overset{o}{\Omega}$ sono determinati dai valori di u e della sua derivata normale su $\partial\Omega$.

Indice