1. Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}$

La differenza fondamentale tra integrale di Lebesgue e integrale di Riemann consiste nella diversa scelta delle decomposizioni su cui sostanzialmente si basa ogni integrale:

- l'integrale di Riemann decompone in intervalli l'intervallo di integrazione,
- l'integrale di Lebesgue decompone in intervalli l'immagine della funzione integranda.

1.1. Il caso delle funzioni semplici.

Sia

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x)$$

nulla al di fuori di un insieme di misura finita. Essendo le $\chi_{A_i}(x)$ le funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili A_i: si definisce, con scelta assolutamente obbligata,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} c_i m(A_i)$$

L'integrale definito sopra è lineare nella funzione integranda e monotono, nel senso che se $\varphi(x) \leq \psi(x)$ allora

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx$$

Osservazione 1.1. *La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di funzioni caratteristiche naturalmente non è unica: si chiama rappresentazione canonica quella*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_j \, \chi_{B_j}(x)$$

in cui gli a_j sono tutti e soli i diversi valori possibili di f e B_j sono i corrispondenti insiemi di livello.
La definizione dell'integrale é buona se mostriamo che il valore non cambia se riferito a due diverse rappresentazioni della stessa funzione: cosa che naturalmente accade in conseguenza della additivitá della misura.

1.2. Funzioni limitate su insiemi di misura finita. Se $f(x)$ é misurabile e limitata su un insieme di misura finita si costruiscono facilmente per ogni $\varepsilon > 0$ due funzioni semplici $\varphi(x), \ \psi(x)$ tali che

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \ \ |\psi(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Teorema 1.2. *Sia f misurabile e limitata su un insieme di misura finita E, allora*

$$\inf_{\psi \leq f} \int \psi(x)dx = \sup_{f \leq \varphi} \int \varphi(x)dx$$

Il comune valore viene assunto come valore dell'integrale di f.

Proposizione 1.3. *Se f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ allora il valore dell'integrale di Riemann e quello di Lebesgue coincidono.*

2. Successioni di funzioni misurabili

Il risultato piú importante di cui si fa correntemente uso nell'ambito della teoria é il fatto che la convergenza puntuale mantiene la misurabilitá: si noti che, in generale la convergenza puntuale non mantiene né la continuitá né la integrabilitá secondo Riemann.
Il fatto che mantenga la misurabilitá dipende dal fatto che sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore di una successione di funzioni misurabili é misurabile: accettato tale risultato ne deriva che sono misurabili sia il limite inferiore che il limite superiore di una successione di funzioni misurabili e quindi, nel caso in cui la successione sia convergente é misurabile il limite.

Teorema 2.1. *(Egoroff) Sia $\{f_n(x)\}$ una successione definita su un insieme misurabile E di misura finita, convergente quasi ovunque a $f(x)$: allora comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E_\varepsilon \subset E$ tale che*

- $m(E - E_\varepsilon) \leq \varepsilon$
- *la successione converge uniformemente in E_ε.*

Dimostrazione. [1]
Scelto $\varepsilon > 0$ consideriamo, per ogni n, gli insiemi misurabili

$$F_n : \quad \{|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

Costruiamo con essi la successione decrescente di insiemi misurabili

$$E_m = \bigcup_{i=m}^{\infty} F_i$$

Tenuto conto che, prima o poi, per ogni punto x_0 riesce $|f_s(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ si riconosce che

$$\bigcap_m E_m = \emptyset$$

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Egorov's_theorem

e quindi (qui si usa il fatto di stare dentro un insieme di misura finita)

$$\lim_{m\to\infty} m(E_m) = 0$$

Esiste pertanto n_ε tale che

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad m(E_n) \leq \varepsilon$$

Ne segue che

$$x \notin E_{n_\varepsilon} : m \geq n_\varepsilon \quad \to \quad |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

Osservazione 2.2. *Il fenomeno illustrato dal precedente teorema di Egoroff (teorema anche attribuito all'italiano Carlo Severini) era un tempo riferito con il titolo di*

convergenza quasi uniforme

Esso infatti riconosce che ogni successione di funzioni che converga puntualmente, cioè punto per punto, in un insieme di misura finita E converge uniformemente in una parte $E - E_\varepsilon$ di E, parte assai vicina ad E in quanto ne differisce solo per E_ε insieme di misura piccola quanto si vuole.
L'esempio piú evidente del fenomeno si incontra pensando alla successione

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1]$$

successione che converge in ogni punto ma, come è ben noto tenuto presente che la funzione limite $f(x)$ è discontinua, non uniformemente.
Tuttavia è facile riconoscere che tale successione converge uniformemente in ogni intervallino $[0, 1-\varepsilon] \subseteq [0, 1]$.
In questo caso l'insieme E_ε di Egoroff è l'intervallino $[1-\varepsilon, 1]$.

Teorema 2.3. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili, equilimitate su E insieme misurabile di misura finita: allora detto*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \to \quad \int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di un piccolo teorema di convergenza dominata[2]: si tratta di un sottoprodotto quasi ovvio del teorema di Egoroff, vedi 1.4.

Si decompone E nelle due parti

- quella su cui la convergenza della successione è uniforme,
- quella su cui non c'è tale uniformitá ma che ha misura piccola...

□

[2]Il nome *convergenza dominata* si attribuisce tradizionalmente al successivo teorema 3.1, più generale, dovuto a Lebesgue stesso

2.1. Funzioni non negative. Per le funzioni non negative anche non limitate, si definisce:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sup_{\psi \leq f} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx$$

essendo l'estremo superiore preso al variare di ψ tra le funzioni misurabili e limitate a supporto su un insieme di misura finita.

Teorema 2.4. *[Lemma di Fatou] Siano $\{f_n(x)\}$ non negative, e sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ allora*

$$\int f(x)dx \leq \liminf \int f_n(x)dx$$

Dimostrazione. Tenuto conto che $\int f(x)dx$ è determinato tramite gli integrali $\int h(x)dx$ delle funzioni misurabili h limitate e a supporto di misura finita, tali che $0 \leq h(x) \leq f(x)$, consideriamo l'integrale di una di tali h.
Consideriamo $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$: la successione $\{h_n(x)\}$ converge ad $h(x)$ ed è limitata, quindi, tenuto conto del precedente Teorema 1.6,

$$\int h(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$$

Ne segue quindi la tesi

$$\int f(x)dx = \sup \int h(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$$

□

Corollario 2.5 (Teorema di Beppo Levi)**.** *Sia $\{f_n(x)\}$ una successione monotona crescente: detto $f(x)$ il limite riesce*

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$$

Dimostrazione. Disponendo del precedente Lemma di Fatou il teorema di Beppo Levi diventa un semplice corollario.

$$\int f_n(x)dx \leq \int f(x)dx = \lim_{nto\infty} \int f_n(x)dx$$

da cui l'asserto. □

3. Assoluta continuitá

Teorema 3.1. *Sia $f(x)$ misurabile, non negativa e con integrale*

$$\int_E f(x)dx < +\infty$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$A \subseteq E,\ \ m(A) \leq \delta_\varepsilon \quad \rightarrow \quad \int_A f(x)dx \leq \varepsilon$$

Dimostrazione. Se $f(x) \leq M$ il risultato sarebbe ovvio dal momento che

$$\int_A f(x)dx \leq M mis(A)$$

Nel caso in cui f non sia limitata consideriamo la successione delle troncate

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) \leq n \\ n & se \quad f(x) > n \end{cases}$$

La successione $\{f_n(x)\}$ é monotona crescente: quindi per il teorema di Beppo Levi riesce

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \exists n_\varepsilon :\ \ n \geq n_\varepsilon \int_A f(x)dx \leq \varepsilon + \int_A f_n(x)dx$$

da cui

$$\int_A f(x)dx \leq \varepsilon + n_\varepsilon mis(A)$$

□

4. Funzioni sommabili

Sia $f(x)$ una qualsiasi funzione misurabile: siano f_+ ed f_- la sua parte positiva e la sua parte negativa, entrambe funzioni non negative.
Se entrambe le due parti hanno integrale finito la f si dice sommabile e si definisce

$$\int f(x)dx = \int f_+(x)dx - \int f_-(x)dx$$

Teorema 4.1. *(Lebesgue) Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni sommabili in E*

- *riesca* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- *esista $g(x)$ sommabile in E tale che $\forall n :\ \ |f_n(x)| \leq g(x)$.*

Riesce allora $f(x)$ sommabile in E e

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi si ricava da una duplice applicazione del Lemma di Fatou 1.7:

- $|f_n(x)| \le g(x) \quad \to \quad |f(x)| \le g(x)$, quindi $f(x)$ é sommabile,
- $$f_n(x) \to f(x) \quad \to \quad \begin{cases} 0 \le g(x) + f_n(x) \to g(x) + f(x) \\ 0 \le g(x) - f_n(x) \to g(x) - f(x) \end{cases}$$

Applicando il Lemma di Fatou alle due successioni si ottiene

$$\int (g(x) + f(x))dx \le \liminf \int (g(x) + f_n(x))dx,$$

$$\int (g(x) - f(x))dx \le \liminf \int (g(x) - f_n(x))dx$$

ne segue

$$\begin{cases} \int g(x)dx + \int f(x)dx \le \int g(x)dx + \liminf \int f_n(x)dx \\ \int g(x)dx - \int f(x)dx \le \int g(x)dx + \liminf \int -f_n(x)dx \end{cases} \qquad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} \int f(x)dx \le \liminf \int f_n(x)dx \\ -\int f(x)dx \le -\limsup \int f_n(x)dx \end{cases}$$

Da cui, riassumendo

$$\limsup \int f_n(x)dx \le \int f(x)dx \le \liminf \int f_n(x)dx$$

da cui la tesi.

□