Teoria di Lebesgue

1. La misura di Peano-Jordan

La misura di Peano Jordan di un insieme é quasi sempre proposta per sottoinsiemi limitati $E \subseteq \mathbb{R}^2$: si tratta di quanto suggerito dalla carta quadrettata, millimetrata, ecc.
Scelto un passo ℓ per la quadrettatura si contano i quadratini completamente contenuti in E e quelli che intersecano E anche senza essere completamente contenuti in E: le somme delle loro areee forniscono due numeri non negativi

$$S_-(\ell) \quad \leq \quad S^+(\ell)$$

ove si riconosca che per $\ell \approx 0$ tali due numeri si accostano

$$\sup_\ell S_-(\ell) = \inf_\ell S^+(\ell) \tag{1}$$

tale comune valore viene accolto come area(E) o, piú in generale, $m(E)$ misura di E.
Gli insiemi E per cui l'uguaglianza (1) non si realizza si dicono *non misurabili* secondo Peano Jordan.

L'inconveniente che rende la costruzione di Peano Jordan della misura parzialmente insoddisfacente (dal punto di vista teorico) é collegato alla sua additivitá, finita ma non numerabile: é ben noto che

- i numeri razionali costituiscono un insieme numerabile,
- quindi i punti del piano a coordinate razionali costituiscono un insieme numerabile,
- tuttavia l'insieme E costituito dai punti a coordinate razionali contenuti in un certo quadrato non é misurabile.

L'insoddisfazione risiede nel fatto detta $\{P_n\}$ la successione dei punti a coordinate razionali contenuti in tale quadrato

- i singoli punti P_n sono insiemi misurabili e disgiunti fra loro,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

- ci si attenderebbe che
$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(P_n) = 0$$
mentre invece si riconosce che non si puó neanche parlare di $m(E)$ perché E é non misurabile...!

2. Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^1$

2.1. La misura esterna.

La *misura di Lebesgue* in $\mathbb{R}^1$ risolve, in parte, l'insoddisfazione precedente: il risultato é collegato ad un diverso, piú generale, utilizzo delle quadrettature che, nel caso di $\mathbb{R}^1$ si riferiscono agli intervalli: la differenza fondamentale sta nell'ammettere l'uso di successioni di intervalli, mentre Peano Jordan operano con un numero finito di intervalli.

Definizione 2.1. *Per ogni $A \subset \mathbb{R}$ consideriamo le successioni $\{I_n\}$ di intervalli aperti che ricoprono A*
$$A \subset \bigcup_n I_n$$
indicata con $\mathcal{A}$ la famiglia di tali successioni si definisce misura esterna di A il numero
$$m^*(A) \;=\; \inf_{\{I_n\}\in\mathcal{A}} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$
denominato misura esterna di A.

Ogni insieme A possiede, riferendosi anche alla possibilitá $m^*(A) = +\infty$, una misura esterna, finita o infinita.

Proposizione 2.2. *La misura esterna é monotona:*
$$A \subseteq B \quad \to \quad m^*(A) \leq m^*(B)$$

Dimostrazione. Ovvia. □

Proposizione 2.3. *La misura esterna é subadditiva*
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$$

Dimostrazione. Scelto $\varepsilon > 0$ determiniamo per ciascun A_i una famiglia di intervalli aperti $\{I_k^i\}$ tale che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) \leq m^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Tenuto presente che

$$A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i \quad \to \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} I_k^i$$

riesce

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i,k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}$$

ovvero

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) + \varepsilon$$

da cui, stante l'arbitrarietà di ε, la subadditività. □

Esempio 2.4. *Sia $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali di $[0,1]$, insieme espresso stante la numerabilitá dei razionali, da una successione*

$$A = \{a_1,\, a_2,\, a_3, ...\}$$

Scelto $\varepsilon > 0$ per ogni $a_k \in A$, consideriamo, per ogni $a_k \in A$, l'intervallo aperto

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right)$$

Riesce naturalmente $a_k \in I_k$ e quindi

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

Ne segue pertanto che

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\varepsilon$$

da cui, stante l'arbitrarietá di ε segue $m^*(A) = 0$.
Si noti che invece secondo l'ordinaria misura di Peano Jordan l'insieme A sarebbe riuscito non misurabile.
Si noti inoltre che l'insieme

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

- *é un aperto,*
- *contiene tutti i razionali di $[0,1]$,*
- *ha misura esterna $m^*(U) \leq 2\varepsilon$.*

L'aperto U é sorprendente: chiunque é (erroneamente) portato a credere che un aperto che contenga i razionali di $[0,1]$ debba inevitabilmente contenere tutto $[0,1]$ e quindi, per monotonia, ammettere area esterna maggiore o uguale a 1.

Proposizione 2.5. *Nel caso in cui A sia un intervallo (chiuso, aperto, semiaperto) riesce $m^*(A) = \ell(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvia. □

2.2. Gli insiemi misurabili.

Definizione 2.6. *Un insieme E si dice misurabile se*[1]

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^1 : \quad m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E})$$

Per ogni insieme misurabile si definisce la misura

$$m(E) = m^*(E)$$

Esempio 2.7.

- *L'insieme $\emptyset$ é misurabile.*
- *Tutto $\mathbb{R}$ é misurabile,*
- *Se E é misurabile allora lo é anche $\widetilde{E}$*

Proposizione 2.8. *Ogni sottoinsieme di un insieme E di misura esterna nulla è misurabile e ha misura nulla.*

Teorema 2.9. *La famiglia $\mathcal{L}$ degli insiemi misurabili contiene gli intervalli (a,b) ed è una $\sigma-$algebra, cioè se contiene una famiglia numerabile di insiemi $\{E_n\}$ allora contiene*

$$\bigcup_n E_n, \qquad \bigcup_n E_n$$

. Se $\{E_n\} \in \mathcal{L}$ è una famiglia numerabile di insiemi due a due disgiunti allora riesce

$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n m(E_n)$$

DIMOSTRAZIONE.

[1] $\widetilde{E} = \mathcal{C}(E)$, complementare di E.

- misurabilitá delle unioni finite: siano E_1, E_2 misurabili allora

$$m^*(A \cap \widetilde{E_1}) = m^*(A \cap \widetilde{E_1} \cap E_2) + m^*(A \cap \widetilde{E_1} \cap \widetilde{E_2})$$
$$m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \cap \widetilde{E_2})$$

da cui sommando membro a membro

$$m^*(A) = m^*(A\cap\widetilde{E_1}\cap E_2)+m^*(A\cap\widetilde{E_1}\cap\widetilde{E_2})+m^*(A\cap E_1\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap\widetilde{E_2})$$

ovvero

(2)
$$m^*(A) = m^*(A\cap\widetilde{E_1}\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap\widetilde{E_2})+m^*(A\cap[\widetilde{E_1 \cup E_2}])$$

Tenuto presente che

$$A \cap [E_1 \cup E_2] \subseteq [A \cap E_1 \cap E_2] \cup \left[A \cap E_1 \cap \widetilde{E_2}\right] \cup \left[A \cap E_2 \cap \widetilde{E_1}\right]$$

riesce, per subadditivitá

$$m^*(A\cap[E_1 \cup E_2]) \leq m^*(A\cap\widetilde{E_1}\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap\widetilde{E_2})$$

da cui, sostituendo nella (2),

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [\widetilde{E_1 \cup E_2}])$$

da cui l'uguaglianza, ancora per la subadditivitá

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [\widetilde{E_1 \cup E_2}])$$

che riconosce la misurabilitá di $E_1 \cup E_2$.
- Passando ai complementari si riconosce che la famiglia degli insiemi misurabili è chiusa anche rispetto alle intersezioni finite.
- additivitá sulle unioni disgiunte: siano $E_1, E_2, ..., E_n$ insiemi misurabili e disgiunti a due a due.

Per ogni insieme A riesce

$$m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

Questa relazione, ovviamente vera se $n = 1$ si prova, in generale, per induzione: ammettendola cioè valida per l'ordine $n - 1$ e dimostrando che allora è vera, di conseguenza, anche per l'ordine successivo n.
  - tenuto presente che E_n è misurabile ed è disgiunto dai precedenti si ha

$$A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i] \cap E_n = A \cap E_n$$
$$A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i] \cap \widetilde{E_n} = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]$$

– sommando si ha, quindi,

$$m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]) = m^*(A \cap E_n) + m^*(\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right])$$

– e quindi, per l'ipotesi induttiva

$$m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]) = m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i)$$

- additivitá numerabile: sia $\{E_n\}$ una famiglia di insiemi misurabili e a due a due disgiunti. Per il risultato precedente segue che

$$\sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) = m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]) \leq m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right])$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) \leq m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right])$$

La subadditivitá fornisce la disuguaglianza opposta e quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) = m^*(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right])$$

Indicato con $F = \bigcup_n E_n$ occorre verificare perché F sia misurabile l'uguaglianza

$$\forall A: \quad m^*(A) = m^*(A \bigcap F) + m^*(A \bigcap \widetilde{F})$$

Tenuta presente che ogni unione finita è misurabile abbiamo

$$m^*(A) = m^*(A \bigcap [\bigcup_{n=0}^{m} E_n]) + m^*(A \bigcap \widetilde{[\bigcup_{n=0}^{m} E_n]}) \geq$$

$$\geq m^*(A \bigcap [\bigcup_{n=0}^{m} E_n]) + m^*(A \bigcap \widetilde{[\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n]})$$

da cui, passando al limite su m e tenuto conto della additività osservata prima,

$$m^*(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A \bigcap E_n) + m^*(A \bigcap \widetilde{F})$$

da cui segue, per subadditività,

$$m^*(A) \geq n^*(A \bigcap F) + m^*(A \bigcap \widetilde{F})$$

da cui l'uguaglianza e, quindi la misurabilità di F.

$\square$

Proposizione 2.10. *Gli intervalli* (a, ∞) *e* $(-\infty, a)$ *sono misurabili.*

Proposizione 2.11. *Ogni insieme aperto è misurabile, ogni insieme chiuso è misurabile.*

Proposizione 2.12. *Ogni insieme di Borel, cioè ogni insieme della* $\sigma-$*algebra minima contenente gli aperti è misurabile.*

Proposizione 2.13. *Sia Sia* $\{E_i\}$ *una successione di insiemi misurabili tali che* $\forall i: \ E_{i+1} \subset E_i$ *allora riesce*

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$$

Proposizione 2.14. *Le seguenti proprietá per un insieme* E *sono equivalenti:*

- E *è misurabile,*
- $\forall\varepsilon > 0 \ \exists O_\varepsilon \supset E \ \ m^*(O_\varepsilon - E) \leq \varepsilon$ *essendo* O_ε *un aperto.*
- $\forall\varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \subset E \ \ m^*(E - F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *essendo* F_ε *un chiuso.*

3. Esempio di insieme non misurabile

Consideriamo due numeri x, y (reali) di $[0, 1]$ equivalenti se

$$x - y = r \in Q$$

Suddividiamo pertanto $[0, 1]$ nelle classi d'equivalenza relative a tale relazione: stanno in una stessa classe tutti e soli i reali che differiscono tra loro per un razionale.
Consideriamo l'insieme P costituito prendendo da ciascuna delle precedenti classi uno ed un solo elemento.
Indicata con $\{r_k\}$ la successione dei razionali e posto

$$P_k = P + r_k \qquad \text{mod } 1$$

essi riescono disgiunti e si ha

$$[0, 1] = \bigcup P_k$$

Se P fosse misurabile allora....

- sarebbero misurabili tutti i P_k
- ed essi avrebbero la stessa misura di P.

Ma allora

$$[0,1] = \bigcup P_k \quad \to \quad m([0,1]) = \sum_{k=0}^{\infty} m(P_k) = \begin{cases} 0 & se \quad m(P) = 0 \\ \infty & se \quad m(P) > 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che $m([0,1]) = 1$ si vede che non c'è alcuna misura legittima per P: non resta che abbandonare la congettura che P sia misurabile...

4. L'insieme di Cantor

Si tratta di un insieme particolarmente interessante[2] per le patologie che è in grado di illustrare: la sua costruzione è iterativa a partire da $[0,1]$

- E_1: si divide $[0,1]$ in tre parti uguali e si prendono la prima e la terza,
- E_2: si dividono ciascuno degli intervalli che compongono E_1 in tre parti uguali e si prendono la prima e la terza,
- E_{n+1}: si dividono ciascuno degli intervalli che compongono E_n in tre parti uguali e si prendono la prima e la terza.

Riesce

$$m(E_1) = \frac{2}{3}, \quad m(E_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2, ..., m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^2, ...$$

Si definisce

$$C = \bigcap_n E_n$$

riesce ovviamente $m(C) = 0$.

Lemma 4.1. *C è formato da tutti e soli i numeri reali $x \in [0,1]$ che nella rappresentazione ternaria*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

hanno coefficienti a_k solo 0 o 2.

Teorema 4.2. *C ha la stessa cardinalità di $[0,1]$.*

DIMOSTRAZIONE.

I numeri di $[0,1]$ possono rappresentarsi con la base 2 o con la base 3 come

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \quad (a_k = 0,1), \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k} \quad (b_k = 0,1,2)$$

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

Consideriamo quindi la corrispondenza biunivoca f tra $[0,1]$ e C

$$f: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k} \quad (b_k = 0,1,2)$$

ove

$$b_k = \begin{cases} 0 & se \quad a_k = 0 \\ 2 & se \quad a_k = 1 \end{cases}$$

La presenza di una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi significa appunto *stessa cardinalità*. □

La prima patologia posseduta da C è quindi quella di avere misura nulla pur non essendo numerabile.

FIGURA 1. Prime approssimazioni dell'insieme di Cantor

5. Le funzioni misurabili

Le funzioni costanti a tratti si chiamano *step function*.
Le combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili si chiamano *funzioni semplici*.

Definizione 5.1. *Una* $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice misurabile se*

- E *è misurabile,*
- $\forall a \in \mathbb{R}: \quad f^{-1}(a,+\infty)$ *è misurabile.*

- Le *step function* sono misurabili.
- Le funzioni continue sono misurabili.
- Le funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili sono misurabili.
- Le funzioni semplici sono misurabili.

Si osservi che la *orribile* funzione di Dirichlet

$$d(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in Q \\ 0 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$

è una funzione semplice !

Proposizione 5.2. *Lo spazio delle funzioni misurabili contiene le costanti e costituisce un'algebra.*

Proposizione 5.3. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili: allora sono misurabili anche*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n$$

Teorema 5.4 (Densitá delle funzioni semplici)**.** *Sia* f *misurabile, limitata e definita su un insieme di misura finita, allora* $\varepsilon > 0$ *esiste una funzione semplice* $\varphi_\varepsilon(x)$ *tale che*

$$|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$