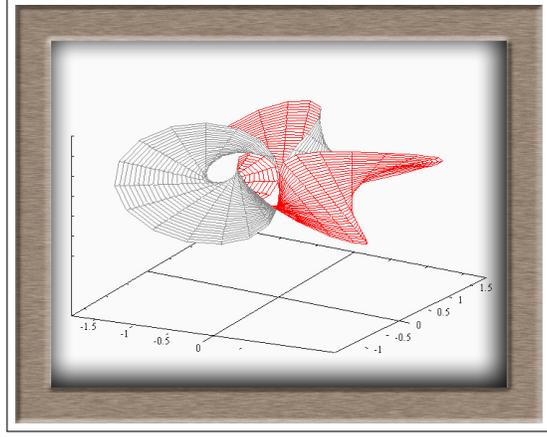


# ANALISI VETTORIALE

2008-2009 (nuovo ordinamento)



prof. L.Lamberti  
<http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti>  
Appunti del Corso di **Analisi Vettoriale**  
Corso di Laurea In Fisica  
anno accademico 2008-2009

Il disegno di copertina, un nastro di Möbius doppiamente ritorto, é stato realizzato con GNUPLOT,

```
set parametric
set urange [ 0.00 : 6.28 ]
set vrange [ -0.50 : 0.50 ]
set xrange [ -1.80 : 1.80 ]
set yrange [ -1.80 : 1.80 ]
set zrange [ -1.50 : 1.50 ]
x(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*cos(u)
y(u,v) = (1 + 2*v*sin(2*u))*sin(u)
z(u,v) = 2*v*cos(2*u)
splot x(u,v), y(u,v), z(u,v)
```

*Appunti rivisti con la collaborazione degli studenti del Corso di Analisi Vettoriale 2007-2008*  
*Ultima revisione 29 settembre 2008*

## Indice

<b>Parte 1. Integrali doppi</b>	<b>1</b>
Capitolo 1. Misura di Peano-Jordan nel piano	3
1. L'area dei sottografici	3
2. Proprietà dell'area	4
3. L'algoritmo di Peano-Jordan	4
4. L'area della frontiera...	7
5. Un problema	8
6. Aree di unioni e intersezioni...	8
7. Un insieme non misurabile	9
Capitolo 2. Integrali multipli	11
1. Le somme integrali	11
2. Somme, differenze e prodotti di funzioni integrabili	15
3. Additività	16
4. Integrabilità delle funzioni continue	17
5. Il teorema della media	19
6. Una generalizzazione naturale...	19
7. Integrali tripli	22
Capitolo 3. Formule di riduzione degli integrali	25
1. Integrali sopra rettangoli	25
2. Integrali su domini normali	29
3. Riduzione integrali tripli	30
Capitolo 4. Trasformazioni e cambiamenti di coordinate	33
1. Il caso unidimensionale	33
2. Trasformazioni affini del piano	35
3. Cambiamenti di coordinate affini	39
4. Un caso di trasformazione non affine	44
5. Cambi di coordinate generali	46
6. Un cenno di dimostrazione	47
7. La trasformazione degli integrali doppi	48
8. Le coordinate polari	49
9. Cambiamenti di coordinate in integrali tripli	51

10. I solidi di rotazione	54
11. Parallelepipedi in $\mathbb{R}^n$	56
<b>Parte 2. Integrali impropri</b>	<b>61</b>
Capitolo 5. Integrali impropri di funzioni di una variabile	63
1. Introduzione	63
2. Integrali su intervalli limitati	63
3. Intervalli illimitati	67
4. L'indipendenza dalla successione	68
Capitolo 6. Integrali impropri doppi o tripli	71
1. Integrali impropri doppi o tripli	71
2. Regioni d'integrazione illimitate	74
3. Esempi di integrali doppi	75
Capitolo 7. Integrali impropri dipendenti da parametri	77
1. Il caso in dimensione 1	77
2. Integrali impropri come funzioni di un parametro	77
3. Convergenza uniforme di un integrale improprio	77
4. Continuitá rispetto a un parametro	79
5. Integrali impropri su un intervallo limitato	80
6. Integrazione rispetto a un parametro	81
7. Derivazione rispetto a un parametro	81
8. Condizioni di sicurezza	82
<b>Parte 3. Campi vettoriali</b>	<b>83</b>
Capitolo 8. Integrali curvilinei	85
1. Integrali curvilinei	85
2. Integrale curvilineo di una funzione	86
3. Proprietá degli integrali curvilinei	88
4. Baricentro di una curva $\Gamma$	89
Capitolo 9. Campi vettoriali	91
1. Introduzione	91
2. Il campo del gradiente	93
3. Integrali curvilinei di campi vettoriali	94
4. Il lavoro dei campi gradiente	98
Capitolo 10. Campi conservativi	101
1. La condizione necessaria	101
2. Il rotore	102
3. Condizioni sufficienti	107

<b>Parte 4. Serie</b>	111
Capitolo 11. Alcuni richiami sulle serie numeriche	113
1. Introduzione	113
2. La convergenza assoluta	116
3. Le serie a segni alterni	118
4. La convergenza semplice	119
5. Il teorema di Abel	120
Capitolo 12. Serie e/o successioni di funzioni	127
1. Introduzione	127
2. Il tubo	129
3. Test di convergenza uniforme per le serie	133
Capitolo 13. L'importanza di essere uniformemente convergenti	137
1. Continuità del limite	137
2. Integrale del limite	140
3. Derivata del limite	142
Capitolo 14. Le serie di potenze	147
1. Introduzione	147
2. Tante nuove serie	147
3. L'intervallo di convergenza	148
<b>Parte 5. Il teorema della divergenza</b>	151
Capitolo 15. Il teorema di Torricelli in due dimensioni	153
1. Introduzione	153
2. Il flusso traverso il bordo	154
3. Il caso di un triangolo	158
4. Il teorema della divergenza	161
Capitolo 16. La prima generalizzazione	163
1. Il caso dei plurirettangoli	163
2. Il caso dei poligoni	165
3. Il teorema della divergenza	166
4. I gradienti delle funzioni armoniche	169
5. Alcune applicazioni	171
6. Corone circolari, ecc.	172
Capitolo 17. Il teorema di Stokes	173
1. L'orientamento	173
2. Introduzione al teorema di Stokes	175
3. Qualche disegno...	176
4. I campi conservativi	179

Capitolo 18. La formula di integrazione per parti	181
1. Introduzione	181
2. Valore intrinseco della divergenza	184
3. Il laplaciano in coordinate polari	185
Capitolo 19. Superfici	189
1. Superfici cartesiane: piano tangente	189
2. Superfici regolari parametriche	189
3. Alcune superfici fondamentali	191
4. Curve trasformate in curve...	199
Capitolo 20. Area di una superficie	201
1. Introduzione	201
2. Un esempio importante	202
3. Il caso cartesiano	204
4. Area di una superficie parametrica	206
5. Una giustificazione alternativa	209
6. Le superfici di rotazione	210
Capitolo 21. Integrali superficiali	213
1. Introduzione	213
2. Il teorema della divergenza nello spazio	214
3. Il teorema di Stokes nello spazio	214
4. Lavoro, campi irrotazionali, ecc.	216
5. Campi a divergenza nulla	217
Capitolo 22. Il linguaggio delle forme differenziali	223
1. Introduzione	223
2. Il teorema di Stokes nel piano	224
3. Il teorema della divergenza nel piano	225
4. Gli integrali $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dydz$ , ecc.	225
5. Il teorema di Stokes nello spazio	226
6. Campi a divergenza nulla	227
<b>Parte 6. Funzioni implicite</b>	<b>231</b>
Capitolo 23. Risolvere equazioni	233
1. Introduzione	233
2. Gli insiemi di livello	235
3. Interpretazione geometrica	238
4. Il teorema delle funzioni implicite	239
5. La dimostrazione del teorema di Dini	244
6. Serviamoci della formula di Taylor	248
7. Usiamo GnuPlot	250

8. Usiamo <i>Mathematica</i>	251
Capitolo 24. Equazioni in piú incognite	255
1. Introduzione	255
2. La formula di Taylor	256
3. Tangenti, normali, curvatura	258
4. Tangente per funzioni implicite	259
5. Normali per funzioni implicite	260
6. Curvatura	260
Capitolo 25. Il caso dei sistemi	263
1. Il Teorema di Dini per i sistemi	263
Capitolo 26. Funzioni implicite e punti uniti	269
1. Equazioni, punti uniti, contrazioni	269
2. Il caso di un sistema	272
Capitolo 27. Un'applicazione: le trasformazioni del piano	275
1. Esempi fondamentali	275
2. Il teorema di Dini e le trasformazioni	276
3. Le coordinate curvilinee	278
4. Un contreesempio fondamentale	280
Capitolo 28. Massimi e minimi vincolati	281
1. Introduzione	281
2. La dimostrazione	283
Capitolo 29. L'interpretazione di Lagrange	289
1. Introduzione	289
2. La condizione sufficiente	291
3. Un caso intermedio	292
4. Estremi vincolati: il caso generale	294
<b>Parte 7. Equazioni differenziali</b>	<b>297</b>
Capitolo 30. Introduzione	299
1. Risolvere un'equazione differenziale	299
2. Il problema di Cauchy	300
3. Un'equivalenza	301
Capitolo 31. La dipendenza dal dato iniziale	303
1. Due problemi di Cauchy	303
2. La stima di Gronwall	303
3. Il teorema d'unicità	306
Capitolo 32. Il teorema d'esistenza per il problema di Cauchy	309

1. Il Teorema d'esistenza	309
2. La successione	310
3. La convergenza	314
4. La funzione limite	316
5. Conclusioni	317
6. Una dimostrazione sintetica	318
7. Esistenza in grande...	319
8. Step by step...	321
9. La derivabilit� rispetto al dato iniziale	321
10. La dipendenza da altri parametri	325
11. Equazioni e sistemi	326
Capitolo 33. Equazioni lineari di primo ordine	329
1. Il caso omogeneo	329
2. Il caso non omogeneo	330
3. Le equazioni di Bernoulli	332
Capitolo 34. Equazioni lineari di ordine $n$	333
1. Indipendenza lineare	333
2. Il caso omogeneo	335
3. Equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee	337
4. Non omogenee a coefficienti costanti	341
5. Equazioni omogenee di Eulero	342
6. Equazioni lineari non omogenee	343
Capitolo 35. A cosa servono le serie di potenze ?	349
1. Introduzione	349
2. Un'equazione differenziale semplicissima	349
3. Un'equazione lineare del second'ordine	350
4. La serie binomiale	354
5. Il calcolo di un integrale	356
6. Le equazioni differenziali di Bessel	359
Capitolo 36. Le equazioni autonome	365
1. Introduzione	365
2. Un approccio formale	365
3. La teoria qualitativa	367
4. Equazioni a variabili separabili	369
5. Cambiare variabile	369
6. Equazioni in forma omogenea	370
7. Primitive di ordine superiore	370
Capitolo 37. Equazioni ai differenziali totali	373
1. Introduzione	373

2. Una generalizzazione	373
3. Fattore integrante.	375
4. Traiettorie ortogonali	376
5. Le isocline	380
Capitolo 38. Il principio delle contrazioni	383
1. Punti uniti	383
2. Il principio delle contrazioni	384
3. Iterate	386
Capitolo 39. Lo spazio delle funzioni continue	389
1. Introduzione	389
2. Lo spazio $C^0(K)$	389
3. La completezza	391
4. Trasformazioni continue	393
Capitolo 40. Applicazioni del principio delle contrazioni	399
1. Il problema di Cauchy	399
<b>Parte 8. Indici</b>	<b>401</b>
Bibliografia	403



Parte 1

**Integrali doppi**



## CAPITOLO 1

### Misura di Peano-Jordan nel piano

#### 1. L'area dei sottografici

Assegnata una funzione continua  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  non negativa, l'area della regione sottografico è rappresentata dall'integrale  $\int_a^b f(x) dx$ .

Il suo valore è determinato approssimando il sottografico con un certo numero di rettangoli: in altri termini si determina l'area di una regione con contorno curvilineo, il sottografico di  $f(x)$ , approssimandola con rettangoli.

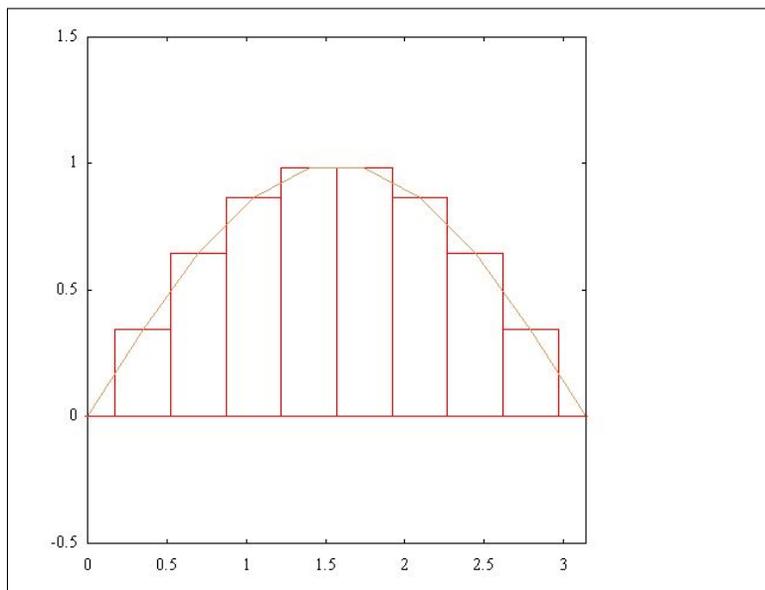


FIGURA 1. Approssimiamo il sottografico di  $\sin(x)$

Per definire l'area di regioni del piano più generali occorre svincolarsi dal concetto di integrazione di funzioni di una variabile, mantenendo però l'idea dell'approssimazione tramite "aree elementari", aree di regioni formate da rettangoli.

## 2. Proprietà dell'area

La nozione di area di una regione limitata  $S$  discende, intuitivamente, dalla questione seguente:

*quante copie di un quadrato unitario o di un suo sottomultiplo occorrono per ricoprire la regione  $S$  da misurare?*

Richiederemo che l'area  $A(S)$  di un insieme  $S$  di  $\mathbb{R}^2$  verifichi, volendo soddisfare alle esigenze dell'intuizione, le seguenti proprietà <sup>1</sup>:

- 1:  $A(S) \geq 0$ .
- 2: Se  $S$  è un quadrato di lato  $l$ , allora  $A(S) = l^2$ .
- 3: Se  $S = S_1 \cup S_2$  con  $S_1$  e  $S_2$  privi di punti interni comuni  $A(S) = A(S_1) + A(S_2)$ .

Si noti che dalle proprietà elencate discende la *monotonia* dell'area: se  $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow A(S_1) \leq A(S_2)$ .

## 3. L'algoritmo di Peano-Jordan

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme limitato e non vuoto.

Quadrettiamo il piano con quadrati di lato 1 costruendo la griglia determinata dalle rette di equazioni  $x = h, y = k$ , per  $h, k \in \mathcal{Z}$  e indichiamo con

- $A_0^+(S)$  la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato 1 che hanno almeno qualche punto in comune con  $S$ ;
- $A_0^-(S)$  la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato 1 completamente contenuti in  $S$ , assumendo lo 0 se nessun quadrato risultasse completamente contenuto in  $S$ .

Risulta

$$A_0^-(S) \leq A_0^+(S)$$

Passiamo ad una quadrettatura più sottile, costruendo la griglia determinata dalle rette di equazione  $x = h/2, y = k/2$ , per  $h, k \in \mathcal{Z}$ : ogni quadrato iniziale viene suddiviso in 4 quadrati di lato  $\frac{1}{2}$ , e indichiamo con

- $A_1^+(S)$  la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato  $\frac{1}{2}$  che hanno punti in comune con  $S$ ;
- $A_1^-(S)$  la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato  $\frac{1}{2}$  completamente contenuti in  $S$  <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Courant, Volume II, Capitolo 4 §4.1

<sup>2</sup>Se ce n'erano di lato 1 ce ne saranno, a maggior ragione, di lato  $1/2$

Si ha

$$A_0^-(S) \leq A_1^-(S) \leq A_1^+(S) \leq A_0^+(S)$$

Il procedimento si itera suddividendo il piano in quadrati di lato  $2^{-n}$  tramite le rette di equazione

$$x = \frac{h}{2^n} \quad y = \frac{k}{2^n}, \quad h, k \in \mathcal{Z}$$

dando luogo alle due successioni  $\{A_n^-(S)\}$  e  $\{A_n^+(S)\}$  che verificano

$$A_0^-(S) \leq A_1^-(S) \leq \cdots \leq A_n^-(S) \leq A_n^+(S) \leq \cdots \leq A_1^+(S) \leq A_0^+(S)$$

- $\{A_n^-(S)\}$  é monotona non decrescente e limitata superiormente,
- $\{A_n^+(S)\}$  é monotona non crescente e limitata inferiormente.

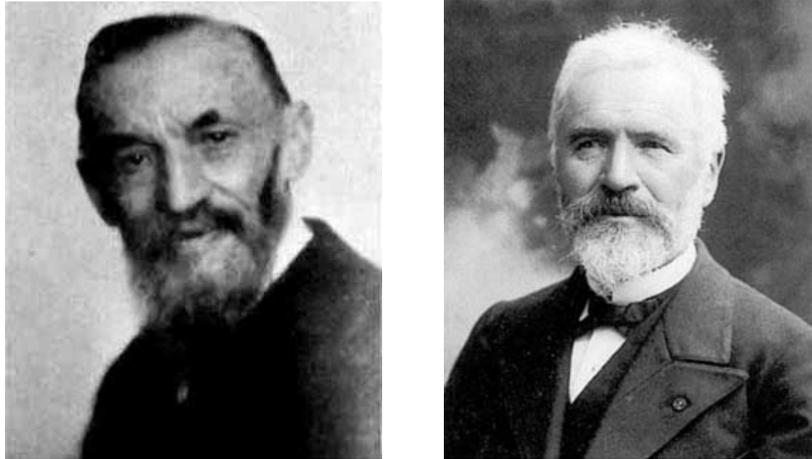


FIGURA 2. Giuseppe Peano (1855-1932), Camille Jordan (1838-1922)

**3.1. Area interna ed area esterna.** Le due successioni

$$\{A_n^-(S)\}, \quad \{A_n^+(S)\}$$

monotone e limitate sono, quindi, convergenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^-(S) = A_-(S), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+(S) = A_+(S).$$

I due numeri  $A_-(S)$ ,  $A_+(S)$ , loro limiti, si chiamano *area interna* ed *area esterna* di  $S$ .

e soddisfano la relazione

$$A_-(S) \leq A_+(S).$$

DEFINIZIONE 3.1. Se  $A_-(S) = A_+(S)$  l'insieme  $S$  si dice misurabile secondo Peano-Jordan<sup>3</sup> e il comune valore delle aree interna ed esterna si chiama area (o misura di Peano-Jordan) di  $S$

$$A(S) := A_-(S) = A_+(S).$$

ESEMPIO 3.2. Consideriamo il procedimento esposto in relazione alla regione  $S$  delimitata dall'ellisse  $5x^2 + 10y^2 = 15$

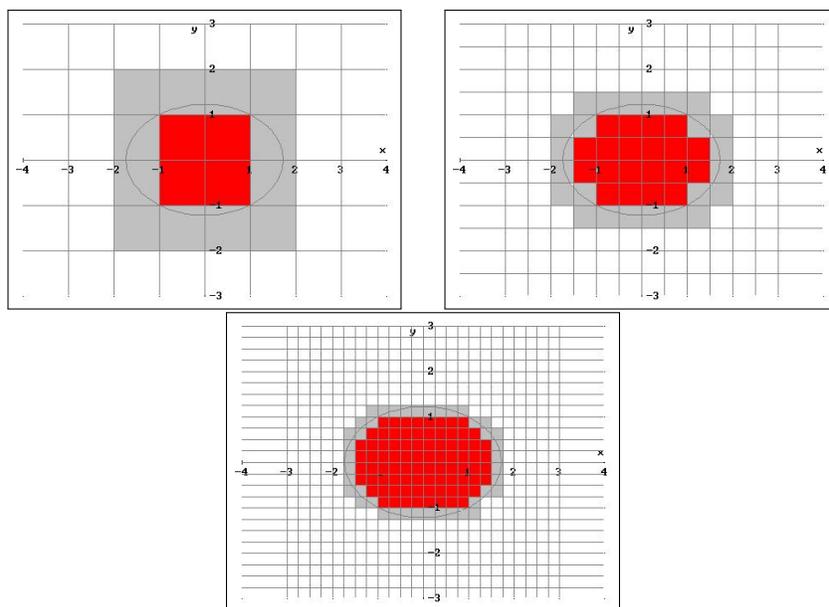


FIGURA 3. Le varie quadrettature per l'ellisse  $5x^2 + 10y^2 \leq 15$

I valori che si possono leggere in Figura 3 sono i seguenti:

$n$	$A_n^-(S)$	$A_n^+(S)$
0	4	16
1	5	11
2	5.25	7.56

Come si vede gli  $A_n^-(S)$  aumentano al crescere di  $n$  mentre gli  $A_n^+(S)$  diminuiscono: i valori indicati nella tabella sono naturalmente ottenuti contando i quadretti e moltiplicando per la loro area, 1 per  $n = 0$ ,  $1/4$  per  $n = 1$  e  $1/16$  per  $n = 2$ .

Dai pochi conti effettuati potremmo anticipare per l'area interna e l'area esterna le stime seguenti

$$5.25 \leq A_-(S) \leq A_+(S) \leq 7.56$$

<sup>3</sup>Camille Jordan 1838-1922, Giuseppe Peano 1853-1932.

Risultato del resto in accordo con la nota formula dell'area dell'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ ,

$$\text{Area} = \pi a b$$

Nel nostro caso infatti

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{1.5} \quad \text{Area} = \pi \sqrt{3} \sqrt{1.5} \cong 6.661$$

OSSERVAZIONE 3.3 (Misura di Peano-Jordan e vecchie aree di poligoni). *Si può riconoscere che:*

- *i quadrati di lato  $\ell$  hanno misura di Peano-Jordan  $\ell^2$ , coincidente cioè con la vecchia area.*
- *i rettangoli di lati  $a, b$  hanno misura di Peano-Jordan  $a \times b$ , coincidente cioè con la vecchia area.*
- *i triangoli, quindi i poligoni, hanno misura di Peano-Jordan coincidente con la vecchia area.*

#### 4. L'area della frontiera...

La proprietà per un insieme  $S$  di essere misurabile secondo Peano-Jordan equivale al fatto che le due successioni

$$\{A_n^-(S)\}, \quad \{A_n^+(S)\}$$

siano contigue:

$$A_n^+(S) - A_n^-(S) \rightarrow 0$$

Tenuto conto che la differenza fra  $A_n^+(S)$  e  $A_n^-(S)$  dipende dal computo dei rettangolini che intersecano la frontiera di  $S$  si intuisce come la misurabilità di un insieme sia collegata ad avere una frontiera ...non troppo estesa !

Vale al riguardo il seguente teorema di cui è omessa la dimostrazione:

TEOREMA 4.1. *Un insieme  $S$  limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera  $\partial S$  ha misura esterna nulla*

$$A_-(S) = A_+(S) = A(S) \quad \Leftrightarrow \quad A_+(\partial S) = 0.$$

COROLLARIO 4.2. *Condizione necessaria e sufficiente per riconoscere che un insieme sia dotato di area è che comunque si scelga  $\varepsilon > 0$  sia possibile ricoprire la sua frontiera con un numero finito di quadrati che abbiano somma delle aree minore di  $\varepsilon$ .*

Le curve regolari sono insiemi di misura esterna nulla, i grafici di funzioni continue anche.

COROLLARIO 4.3. *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $f \geq 0$ . Allora l'insieme*

$$R(f) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

*il sottografico di  $f$ , è un insieme misurabile e*

$$A(R(f)) = \int_a^b f(x) dx.$$

COROLLARIO 4.4. *Ogni insieme la cui frontiera sia composta da un numero finito di grafici di funzioni continue  $y = f(x)$  o  $x = g(y)$  è misurabile.*

Sono pertanto misurabili tutti gli insiemi del piano la cui frontiera sia formata da un numero finito di archi di curve regolari o di grafici di funzioni continue.

## 5. Un problema

La misurabilità di un insieme potrebbe dipendere dal riferimento cartesiano rispetto al quale eseguiamo le quadrettature ?

In altri termini spostando (traslando o ruotando) un insieme misurabile la sua misurabilità

si conserva ?

e la sua area si conserva ?

TEOREMA 5.1. *La misurabilità (o meno) di un insieme  $S$  e la sua misura di Peano-Jordan sono invarianti per traslazioni e rotazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa, niente affatto banale...! □

## 6. Aree di unioni e intersezioni...

La caratterizzazione degli insiemi misurabili dedotta, Teorema 4.1, dalla misura esterna nulla della frontiera, consente di riconoscere il seguente

TEOREMA 6.1. *L'unione  $S \cup Z$  e l'intersezione  $S \cap Z$  di due insiemi misurabili  $S, Z$  è misurabile. Se inoltre i due insiemi non hanno punti interni comuni riesce*

$$A(S \cup Z) = A(S) + A(Z).$$

Per convincersi basta ricordare che

$$\partial(S \cup Z) \subseteq \partial S \cup \partial Z, \quad \partial(S \cap Z) \subseteq \partial S \cup \partial Z$$

e quindi riconoscere che, se  $\partial S$  e  $\partial Z$  hanno misura esterna nulla anche  $\partial S \cup \partial Z$  avrà misura esterna nulla e  $\partial(S \cup Z)$  e  $\partial(S \cap Z)$ , suoi sottinsiemi l'avranno nulla.

### 7. Un insieme non misurabile

L'insieme  $S$  formato da tutti e soli i punti  $(x, y)$  appartenenti al quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  con coordinate razionali non è misurabile.

Il risultato si riconosce osservando che, per quanto si raffini la quadrettatura riesce sempre

$$A_n^-(S) = 0, \quad A_n^+(S) \geq 1.$$

Infatti nessun quadrato, per quanto piccolo, può essere contenuto in  $S$ :

- ogni quadrato, per quanto piccolo, contiene punti a coordinate irrazionali,
- $S$  non contiene i punti a coordinate irrazionali.

Del resto tutti i quadrati, per quanto piccoli, che intersechino il quadrato  $Q := [0, 1] \times [0, 1]$  intersecano di conseguenza  $S$  e viceversa: quindi

$$A_n^+(S) = A_n^+(Q) \geq 1$$

Ne segue pertanto che

$$A_-(S) = 0, \quad A^+(S) = 1, \quad A_-(S) \neq A^+(S)$$

Una questione interessante è riconoscere la frontiera  $\partial S$  dell'insieme proposto: la frontiera è tutto il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Quindi riesce

$$A(\partial S) = A([0, 1] \times [0, 1]) = 1 \neq 0$$

mentre avevamo riconosciuto, Teorema 4.1, che condizione necessaria e sufficiente perché un insieme  $S$  sia misurabile è  $A(\partial S) = 0$

#### 7.1. Unioni finite, unioni numerabili,...

L'esempio precedente suggerisce un'altra osservazione:

- l'unione di due insiemi misurabili è misurabile,
- quindi l'unione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile,
- l'unione di una famiglia numerabile di insiemi misurabili può essere *non misurabile*.

Infatti l'insieme non misurabile  $S$  precedentemente introdotto è unione di una famiglia numerabile di insiemi misurabilissimi...

...la famiglia dei singoli punti  $P_n = (x_n, y_n)$  a coordinate razionali !



## CAPITOLO 2

### Integrali multipli

#### 1. Le somme integrali

Sia  $f$  una funzione limitata su un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato. Indichiamo con  $R_{ik}^n$

$$R_{ik}^n : \quad \frac{i}{2^n} \leq x \leq \frac{i+1}{2^n}, \quad \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n}$$

il quadratino di posto  $i, k$  relativo alla  $n$ -esima suddivisione a metà nella quadrettatura del piano.

Prolungata  $f$  a tutto  $\mathbb{R}^2$  definendola nulla fuori di  $S$ , siano

$$M_{i,k}^n = \sup_{(x,y) \in R_{ik}^n} f(x,y), \quad m_{i,k}^n = \inf_{(x,y) \in R_{ik}^n} f(x,y)$$

l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $f(x,y)$  in  $R_{ik}^n$ : naturalmente, essendo  $f = 0$  fuori di  $S$  sarà

$$M_{i,k}^n = m_{i,k}^n = 0 \quad \forall R_{ik}^n \cap S = \emptyset$$

Le somme, relative ai soli quadratini che intersecano  $S$ ,

$$(1) \quad F_n^-(f, S) = \sum_{i,k} m_{i,k}^n A(R_{ik}^n), \quad F_n^+(f, S) = \sum_{i,k} M_{i,k}^n A(R_{ik}^n),$$

si dicono *somme integrali superiori e inferiori* della funzione  $f$ , relative alla suddivisione  $n$ -esima di  $S$ .

Tenuto conto che  $m_{i,k}^n \leq M_{i,k}^n$ , riesce

$$F_n^-(f, S) \leq F_n^+(f, S).$$

Passando dalla  $n$ -esima alla  $n+1$ -esima suddivisione, ciascun quadrato  $R_{ik}^n$  è diviso in 4 quadratini di lato dimezzato, che indicheremo con  $R_{j,s}^{n+1}$  per certe 4 coppie  $(j, s)$

In tali quattro quadratini riesce<sup>1</sup>:

$$m_{i,k}^n \leq m_{j,s}^{n+1} \leq M_{j,s}^{n+1} \leq M_{i,k}^n,$$

---

<sup>1</sup>Si ricordi che se  $A \subseteq B$  l'estremo inferiore di una stessa funzione su  $A$  è maggiore o uguale dell'estremo inferiore su  $B$ : relazione analoga, scambiata, per gli estremi superiori.

e quindi, tenuto conto che

$$A(R_{ik}^n) = \sum_{j,s} A(R_{js}^{n+1})$$

$$m_{i,k}^n A(R_{ik}^n) \leq \sum_{j,s} m_{j,s}^{n+1} A(R_{js}^{n+1}) \leq \dots \\ \dots \leq \sum_{j,s} M_{j,s}^{n+1} A(R_{js}^{n+1}) \leq M_{i,k}^n A(R_{ik}^n)$$

da cui, sommando, la relazione tra le somme integrali inferiori e superiori

$$F_n^-(f, S) \leq F_{n+1}^-(f, S) \leq F_{n+1}^+(f, S) \leq F_n^+(f, S)$$

relative a decomposizioni consecutive  $n$ -esima ed  $n + 1$ -esima, e, in generale

$$F_0^-(f, S) \leq \dots \leq F_n^-(f, S) \leq F_{n+1}^-(f, S) \leq \dots \\ \dots \leq F_{n+1}^+(f, S) \leq F_n^+(f, S) \leq \dots \leq F_0^+(f, S).$$

Tenuto conto che le due successioni  $\{F_n^-(f, S)\}$  e  $\{F_n^+(f, S)\}$  delle somme integrali sono

- limitate,
- monotone: crescente la prima, decrescente la seconda,

esse sono necessariamente convergenti:

$$F^-(f, S) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^-(f, S), \quad F^+(f, S) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^+(f, S)$$

Si ha inoltre, tenuto conto che  $F_n^-(f, S) \leq F_n^+(f, S)$ ,

$$F^-(f, S) \leq F^+(f, S).$$

**DEFINIZIONE 1.1.** [Funzioni integrabili] Una funzione  $f(x, y)$  definita in  $S$  limitata si dice integrabile in  $S$  se le somme integrali inferiori e superiori costituiscono una coppia di classi contigue, cioè

$$F^-(f, S) = F^+(f, S).$$

*L'integrale doppio*

$$\iint_S f(x, y) dx dy$$

è per definizione il comune valore dei due limiti delle somme integrali inferiori e di quelle superiori.

**TEOREMA 1.2.** *Le funzioni caratteristiche*

$$f_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

degli insiemi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitati misurabili secondo Jordan sono integrabili su ogni  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Basta notare che riesce

$$F^-(f_\Omega, S) = A_-(S \cap \Omega), \quad F^+(f_\Omega, S) = A_+(S \cap \Omega)$$

□

COROLLARIO 1.3. *Le costanti  $f(x, y) \equiv c$  sono integrabili su ogni insieme limitato e misurabile  $S$  e riesce*

$$\iint_S c \, dx \, dy = c A(S)$$

TEOREMA 1.4. *Siano  $f, g$  integrabili in  $S$  e riesca*

$$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in S$$

*Riesce*

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_S g(x, y) \, dx \, dy$$

COROLLARIO 1.5. *Sia  $f$  integrabile in  $S$  e riesca*

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in S$$

*ne segue*

$$m A(S) \leq \iint_S f(x, y) \, dx \, dy \leq M A(S)$$

### 1.1. Condizioni (sufficienti) di integrabilità.

L'integrabilità di  $f(x, y)$  su  $S$  significa che per  $\forall \varepsilon > 0$  riesce, per  $n$  abbastanza grande,

$$F_n^+(f, S) - F_n^-(f, S) = \sum_{i,k} (M_{i,k}^n - m_{i,k}^n) A(R_{ik}^n) < \varepsilon$$

L'espressione che deve diventare piccola é una somma di prodotti

$$M_{i,k}^n - m_{i,k}^n \quad A(R_{ik}^n)$$

perché sia piccola basta che

$$|M_{i,k}^n - m_{i,k}^n| < \varepsilon \quad \forall i, k$$

. Infatti allora

$$F_n^+(f, S) - F_n^-(f, S) < \varepsilon \sum_{i,k} A(R_{ik}^n) = \varepsilon A(S)$$

Una condizione piú tenue si ottiene ove sia possibile decomporre la somma  $F_n^+(f, S) - F_n^-(f, S)$  in due somme  $\alpha$  e  $\beta$

$$\sum_{\alpha} (M_{i,k}^n - m_{i,k}^n) A(R_{ik}^n) \quad + \quad \sum_{\beta} (M_{i,k}^n - m_{i,k}^n) A(R_{ik}^n)$$

tali che

- per tutti gli addendi che compongono la  $\alpha$  riesca

$$|M_{i,k}^n - m_{i,k}^n| < \varepsilon$$

- per tutti gli addendi che compongono la  $\beta$  riesca

$$|M_{i,k}^n - m_{i,k}^n| < K, \quad \sum_{\beta} A(R_{ik}^n) < \varepsilon$$

Le due condizioni implicano infatti che

$$F_n^+(f, S) - F_n^-(f, S) < \varepsilon A(S) + K \varepsilon$$

Le condizioni indicate si trovano correttamente dimostrate nel paragrafo 4, a pagina 17.

La prima delle due condizioni indicate corrisponde alla lipschitzianità di  $f$  in  $S$ , la seconda a possibili discontinuità di  $f$  su insiemi, per esempio un numero finito di punti o una curva, di area esterna nulla.

ESEMPIO 1.6. *La funzione  $f(x, y) = \sin(x + y)$ , lipschitziana in  $\mathbb{R}^2$ , quindi in ogni  $S$  è integrabile per la prima condizione.*

*La funzione*

$$g(x, y) = \begin{cases} \sin(x + y) & \text{se } x < y \\ \cos(x + y) & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

*è ancora integrabile per il secondo motivo: le sue discontinuità si incontrano solo sulla curva  $y = x$ , insieme di misura nulla.*

### 1.2. Somme generalizzate. Le somme

$$\sigma_n(f, S) = \sum_{i,k} f(x_{ik}^n, y_{ik}^n) A(R_{ik}^n),$$

con  $(x_{ik}^n, y_{ik}^n) \in R_{ik}^n$  si dicono *somme integrali generalizzate*.

Riesce ovviamente

$$F_n^-(f, S) \leq \sigma_n(f, S) \leq F_n^+(f, S)$$

per cui, se  $f$  è integrabile in  $S$  si ha anche

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, S) = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

OSSERVAZIONE 1.7. *Le somme generalizzate sono uno strumento numericamente piú semplice delle somme integrali inferiori e superiori le quali si servono degli estremi inferiore e superiore della  $f$  in ciascun rettangolino  $R_{ik}^n$ .*

*Le somme generalizzate si servono solo di valori, presi comunque, dalla funzione nel rettangolino  $R_{ik}^n$ : la costruzione di una somma generalizzata è quindi facilmente implementabile su computer, scegliendo ad*

*esempio di prendere sempre i valori della funzione in uno degli spigoli, ad esempio quello inferiore sinistro, oppure prendere sempre il valore nel centro, ecc.*

**1.3. Altre stime.** Altre utili stime integrali sono le seguenti

- $f \geq 0 \Rightarrow \iint_S f(x, y) dx dy \geq 0$
- $f \leq g \Rightarrow \iint_S f(x, y) dx dy \leq \iint_S g(x, y) dx dy,$
- 

$$\left| \iint_S f dx dy \right| \leq \iint_S |f| dx dy$$

•

$$(3) \quad \left| \iint_S f dx dy - \iint_S g dx dy \right| \leq \iint_S |f - g| dx dy$$

## 2. Somme, differenze e prodotti di funzioni integrabili

**2.1. La linearit .** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni integrabili sull'insieme limitato e misurabile  $S$  ed

$$F(x, y) = a f(x, y) + b g(x, y)$$

essendo  $a$  e  $b$  due costanti:

- Indicate con  $\sigma_n(f, S)$ ,  $\sigma_n(g, S)$ ,  $\sigma_n(F, S)$  le somme integrali generalizzate relative a tali funzioni su  $S$  riesce<sup>2</sup>

$$\sigma_n(F, S) = a \sigma_n(f, S) + b \sigma_n(g, S)$$

- essendo convergenti le due espressioni  $\sigma_n(f, S)$  e  $\sigma_n(g, S)$  a secondo membro sar  convergente anche la  $\sigma_n(F, S)$ ,
- 

$$\iint_S F(x, y) dx dy = a \iint_S f(x, y) dx dy + b \iint_S g(x, y) dx dy$$

---

<sup>2</sup>Supponendo di prendere, in tutte e tre le somme generalizzate, sempre gli stessi punti  $(x_{ik}^n, y_{ik}^n) \dots$

**2.2. I prodotti.** Consideriamo la funzione prodotto  $f(x, y) \cdot g(x, y)$ :

$$f(x_1, y_1)g(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)g(x_2, y_2) = \\ f(x_1, y_1) [g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)] + g(x_2, y_2) [f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)].$$

Detta  $M$  una costante che maggiori sia il modulo di  $f$  che quello di  $g$  si ha, su ogni quadratino  $R_{ik}^n$ ,

$$|M_{i,k}^n(fg) - m_{i,k}^n(fg)| \leq \\ \leq M |M_{i,k}^n(g) - m_{i,k}^n(g)| + M |M_{i,k}^n(f) - m_{i,k}^n(f)|.$$

Moltiplicando per le aree dei quadratini  $R_{ik}^n$  e sommando si ottiene<sup>3</sup>

$$|F_n^+(fg) - F_n^-(fg)| \leq M [|F_n^+(f) - F_n^-(f)| + |F_n^+(g) - F_n^-(g)|].$$

Le disequazioni indicate mostrano quindi che se le somme inferiori e superiori di  $f$  e quelle di  $g$  sono contigue allora saranno contigue anche quelle di  $fg$ , ovvero anche la funzione  $F = f \cdot g$  è integrabile.

*OSSERVAZIONE 2.1. Quanto detto sopra significa che se  $f$  e  $g$  sono due funzioni integrabili su  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  allora le loro somme, differenze o prodotto  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  sono anche esse integrabili in  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ .*

*Naturalmente può accadere che  $f + g$  o  $f - g$  o  $fg$  siano integrabili senza che lo siano nè  $f$  nè  $g$ .*

*OSSERVAZIONE 2.2. Se  $f$  e  $g$  sono integrabili in  $S$  allora*

$$\iint_S [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_S f(x, y) dx dy + \beta \iint_S g(x, y) dx dy$$

*Mentre, in generale,*

$$\iint_S f(x, y) \cdot g(x, y) dx dy \neq \iint_S f(x, y) dx dy \cdot \iint_S g(x, y) dx dy$$

### 3. Additività

Sia  $S = S' \cup S''$  : le relative funzioni caratteristiche verificano la relazione:

$$\chi_{S' \cup S''} + \chi_{S' \cap S''} = \chi_{S'} + \chi_{S''}$$

Da tale relazione segue, moltiplicando membro a membro per  $f$

$$\chi_{S' \cup S''} f + \chi_{S' \cap S''} f = \chi_{S'} f + \chi_{S''} f$$

e dalla linearità

$$\iint_{S' \cup S''} \chi_{S' \cup S''} f dx dy + \iint_{S' \cap S''} \chi_{S' \cap S''} f dx dy = \iint_{S' \cup S''} \chi_{S'} f dx dy + \iint_{S' \cup S''} \chi_{S''} f dx dy$$

<sup>3</sup>tenuto conto della disequazione triangolare  $|\sum(a_i - b_i)| \leq \sum|a_i - b_i|$

ovvero

$$\iint_{S' \cup S''} f dx dy + \iint_{S' \cap S''} f dx dy = \iint_{S'} f dx dy + \iint_{S''} f dx dy$$

In particolare se  $S' \cap S''$  è privo di punti interni comuni, si ha

$$(4) \quad \iint_{S' \cup S''} f dx dy = \iint_{S'} f dx dy + \iint_{S''} f dx dy$$

#### 4. Integrabilità delle funzioni continue

**TEOREMA 4.1.** *Una funzione continua in  $S$ , insieme chiuso limitato e misurabile, è integrabile in  $S$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il teorema nell'ipotesi aggiuntiva che  $f$  sia lipschitziana, cioè che esista una costante  $L$  tale che

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Riesca inoltre

$$|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in S$$

Stante la misurabilità di  $S$  possiamo limitarci a considerare, nelle somme integrali, solo gli addendi relativi ai quadratini interamente contenuti in  $S$ .

Trascurare infatti quelli che intersecano la frontiera vuol dire trascurare... poca cosa: tenuto conto che la misurabilità di  $S$  implica che la frontiera  $\mathcal{F}S$  ha misura esterna nulla, scelto  $\varepsilon$  riesce

$$\sum A(R_{ik}^n) \leq \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

essendo la somma riferita ai quadratini  $R_{ik}^n$  che ricoprono la frontiera, ne segue quindi che gli stessi addendi nelle somme integrali producono

$$\left| \sum (|M_{ik}^n| + |m_{ik}^n|) A(R_{ik}^n) \right| \leq 2M \sum A(R_{ik}^n) \leq 2M\varepsilon$$

In ogni quadratino  $R_{ik}^n$  interno  $M_{ik}^n$ , e  $m_{ik}^n$ , gli estremi superiore e inferiore della  $f$ , sono, stante la continuità, il massimo e il minimo di  $f(x, y)$  nel quadratino, quindi due valori

$$M_{i,k}^n = f(x_M, y_M), \quad m_{i,k}^n = f(x_m, y_m)$$

presi dalla funzione in due punti  $(x_M, y_M), (x_m, y_m) \in R_{ik}^n$  :

$$F_n^+ - F_n^- = \sum_{i,k} (M_{i,k}^n - m_{i,k}^n) A(R_{ik}^n) =$$

$$= \sum_{i,k} (f(x_M, y_M) - f(x_m, y_m)) A(R_{ik}^n).$$

Riesce, per la condizione di Lipschitz,

$$(5) \quad |f(x_M, y_M) - f(x_m, y_m)| \leq L \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

avendo tenuto conto che due punti dello stesso quadratino  $R_{ik}^n$  non possono distare piú della diagonale  $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$  del quadratino stesso.

Quindi

$$0 \leq F_n^+ - F_n^- \leq L \frac{\sqrt{2}}{2^n} \sum_{i,k} A(R_{ik}^n) \leq L \frac{\sqrt{2}}{2^n} A(S) \rightarrow 0$$

dove le somme sono estese agli indici dei rettangoli completamente contenuti in  $S$ .

Quindi tenuto conto che le due successioni  $\{F_n^-\}$  e  $\{F_n^+\}$  delle somme integrali sono

- convergenti
- convergenti allo stesso limite come segue dalla diseuguaglianza

$$|F_n^+ - F_n^-| \leq L \frac{\sqrt{2}}{2^n} A(S);$$

se ne deduce che  $f(x, y)$  è integrabile. □

**4.1. Oscillazione e integrabilità.** La differenza tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore di una funzione  $f$  su un insieme  $S$  si può chiamare  $O_S(f)$

oscillazione di  $f$  su  $S$ .

Riconoscere che una funzione  $f$  è integrabile su  $S$  equivale, con il linguaggio delle oscillazioni, a dire che la somma

$$\sum_{i,k} O_{R_{ik}^n}(f) A(R_{ik}^n),$$

riferita alla funzione prolungata a zero fuori di  $S$ , è infinitesima per  $n \rightarrow \infty$ .

In altri termini una funzione discontinua, una funzione che presenti dei salti di discontinuitá in qualche punto o su qualche linea, può essere integrabile purché...

...l'insieme su cui si presentano tali oscillazioni patologiche sia contenuto in un numero finito di quadratini  $R_{ik}^n$  di area complessiva piccola quanto si vuole.

OSSERVAZIONE 4.2. Abbiamo riconosciuto, vedi Teorema 1.2, che le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili sono integrabili: rivediamo la questione alla luce

- delle discontinuità che le funzioni caratteristiche hanno,
- dell'insieme su cui tali discontinuità si incontrano.

Le discontinuità si incontrano in corrispondenza dei punti di frontiera: vicino ad essi cadono, per definizione di punto di frontiera sia punti dell'insieme che punti non appartenenti all'insieme, sia punti in cui la funzione caratteristica vale 1 sia punti in cui vale 0.

Ma se l'insieme è misurabile la sua frontiera ha area esterna nulla.

Ecco quindi il fenomeno: discontinuità sí, ma su insiemi di area nulla...

## 5. Il teorema della media

Una stima analoga a quella del teorema del valor medio del calcolo integrale per funzioni di una singola variabile si incontra anche nel caso degli integrali doppi.

Sia  $S$  un insieme chiuso, limitato, connesso e misurabile e sia  $f$  una funzione continua in  $S$ . Siano  $m$  e  $M$ , rispettivamente, il minimo e il massimo di  $f$  nell'insieme  $S$ : si riconoscono facilmente le disequazioni

$$(6) \quad m A(S) \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq M A(S).$$

ovvero

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y) dx dy \in [m, M]$$

Stante l'ipotesi che  $S$  sia connesso esisterà quindi, Teorema dei Valori Intermedi, almeno un punto  $(\xi, \eta) \in S$  in cui riesca

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)$$

ovvero

$$\iint_S f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) A(S)$$

## 6. Una generalizzazione naturale...

I conti fatti in questo capitolo, fino a questo punto, hanno considerato somme integrali, inferiori, superiori o generalizzate, sempre riferite ad uno stile di decomposizione del piano  $\mathbb{R}^2$  abbastanza particolare:

- quadrettatura di lato 1,
- quadrettatura di lato 1/2 ottenuta per dimezzamento della precedente,
- quadrettatura di lato 1/4 ancora da dimezzamento,
- ecc.

É stata questa scelta di decomposizioni a permetterci di riconoscere il carattere monotono delle somme integrali inferiori e superiori, carattere che, unito alla limitatezza, ha offerto su un piatto d'argento l'esistenza dei due limiti  $F^-(f)$ ,  $F^+(f)$ .

Si può lavorare, cioè costruire somme integrali inferiori e superiori, anche riferendosi a stili di decomposizione del piano diversi e più generali: per esempio quadrettando prima con quadretti di lato 1, poi di lato 1/2, poi di lato 1/3, ecc. come pure decomponendo in opportuni rettangoli.

Si può perdere, con tali generalizzazioni, la monotonia delle  $F_n^-(f)$  e delle  $F_n^+(f)$ : sopravvive tuttavia la stabilizzazione di tali somme al tendere a zero della (massima) diagonale dei tasselli in cui si decompone  $\mathbb{R}^2$ .

Il risultato generale é riassunto nel seguente

**TEOREMA 6.1.** *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato, sia  $f$  definita in  $S$  e limitata, sia  $\delta := \{R_{hk}\}$  una decomposizione di  $\mathbb{R}^2$  in rettangoli (non necessariamente uguali fra loro).*

*Detti*

$$m_{hk} = \inf_{(x,y) \in R_{hk} \cap S} f, \quad M_{hk} = \sup_{(x,y) \in R_{hk} \cap S} f$$

*le somme*

$$F_\delta^-(f) = \sum_{hk} m_{h,k} A(R_{hk}), \quad F_\delta^+(f) = \sum_{hk} M_{h,k} A(R_{hk})$$

*riferite ai soli rettangoli che intersecano  $S$  dipendono dalla decomposizione scelta ma ammettono limite al tendere a zero della massima diagonale dei rettangoli che compongono la decomposizione e che intersecano  $S$ , limite che non dipende dalla decomposizione scelta.*

In altri termini, qualunque sia la decomposizione  $\delta$  le somme integrali  $F_\delta^-(f)$  e  $F_\delta^+(f)$  hanno, al tendere a zero della  $\max(\delta)$ , massima diagonale dei rettangolini della decomposizione che intersecano  $S$ , gli stessi limiti delle somme integrali  $F_n^-(f)$ ,  $F_n^+(f)$  precedentemente considerate in (2)

$$\lim_{\max(\delta) \rightarrow 0} F_{\delta}^{-}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{-}(f) = F^{-}(f)$$

$$\lim_{\max(\delta) \rightarrow 0} F_{\delta}^{+}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{+}(f) = F^{+}(f)$$

### 6.1. Cosa implica l'integrabilità...

La funzione  $f(x, y) = \sin(x + y)$ , continua, anzi lipschitziana in tutto  $\mathbb{R}^2$  é integrabile nel quadrato  $Q : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

Eseguiamo ora un esperimento numerico, apparentemente molto aleatorio: consideriamo le somme

$$\frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{h + k + \vartheta_{hk}}{n}\right)$$

essendo i  $\vartheta_{hk}$  numeri presi a caso (RANDOM) in  $[0, 1]$  e chiediamoci cosa pensare di tale somma.

Una risposta prudente potrebbe essere

*l'arbitrarietà degli addendi  $\vartheta_{hk}$  rende di fatto arbitraria la somma...*

una risposta piú colta e precisa é invece:

le somme proposte sono somme integrali della funzione  $\sin(x + y)$ , integrabile in  $Q$  relative alle decomposizioni  $\delta_n$  di  $\mathbb{R}^2$  in quadratini di lato  $1/n$ , somme che indichiamo con  $\sigma_n(f)$  pertanto riesce,

$$F_{\delta_n}^{-}(f) \leq \sigma_n(f) \leq F_{\delta_n}^{+}(f)$$

e tenuto conto che al crescere di  $n$  riesce, cfr. Teorema 6.1,

$$\lim_{\max(\delta) \rightarrow 0} F_{\delta}^{-}(f) = \lim_{\max(\delta) \rightarrow 0} F_{\delta}^{+}(f) = \iint_Q \sin(x + y) dx dy$$

riesce di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f) = \iint_Q \sin(x + y) dx dy$$

quindi, anche se non conosco (per ora) il valore di tale integrale ovvero del limite delle  $\sigma_n(f)$ , posso escludere che le perturbazioni date alla somma dai termini aleatori  $\vartheta_{hk}$  in essa inseriti rendano arbitraria la somma stessa.

### 7. Integrali tripli

Il problema piú comune che conduce all'introduzione di integrazioni triple, o estese a regioni di  $\mathbb{R}^3$ , é il calcolo della massa  $m$  di un solido  $V$ .

Detti

- $vol(V)$  il volume, la misura, di tale solido,
- $\delta_o$  la densit  materiale posseduta

riesce, per definizione di densit ,

$$m = \delta_o \cdot vol(V)$$

Il problema si complica nel caso di solidi non omogenei, cio  quando la densit  é variabile da punto a punto.

Si tratta di una situazione concreta, si pensi, ad esempio ad un serbatoio  $V$  pieno di una miscela di materiali di pesi specifici diversi: dopo un certo periodo di riposo i materiali piú pesanti saranno scesi sul fondo, i piú leggeri saliti in superficie.

In altre parole la densit  materiale  $\delta = \delta(z)$  nel serbatoio  $V$  varia con la profondit .

Non é del resto irragionevole pensare a densit  che dipendano anche dalle altre due coordinate  $x$  e  $y$ .

La replica per il calcolo della massa della semplice espressione

$$m = \delta(x, y, z) \cdot vol(V)$$

non é piú adatta: quale dei tanti diversi valori  $\delta(x, y, z)$  prendere ?

Il buon senso suggerisce naturalmente di

- decomporre il solido, il serbatoio  $V$ , in parti

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$$

in ciascuna delle quali la densit  materiale sia approssimabile con una costante,

- calcolare le masse

$$m_i = \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot vol(V_i)$$

di ciascuna di tali parti, avendo assunto come approssimazione della densit  il valore  $\delta(x_i, y_i, z_i)$  preso in  $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$

- sommare le masse delle varie parti

$$m \approx \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot vol(V_i)$$

per stimare la massa di  $V$

L'espressione

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{vol}(V_i)$$

é analoga a quelle, vedi pagina 14, introdotte parlando di

*somme integrali generalizzate*

per la definizione di integrali doppi di funzioni di due variabili.

Sotto questo punto di vista la massa  $m$  del solido  $V$  occupato da materiali di densità  $\delta(x, y, z)$  é il numero reale approssimato dalle somme (7), cioè l'integrale triplo

$$\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz$$



## Formule di riduzione degli integrali

E' di fondamentale importanza nel calcolo degli integrali doppi il fatto che essi possano essere ricondotti a successive integrazioni semplici.

### 1. Integrali sopra rettangoli

Dapprima consideriamo il rettangolo  $R$  del piano  $x, y$  definito dalle condizioni  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  e sia  $f$  una funzione continua in  $R$ . Decomporre  $R$  in rettangolini significa

- decomporre  $[a, b]$  con  $i$  punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- decomporre  $[c, d]$  con  $k$  punti

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

Le somme integrali generalizzate di  $\iint_R f(x, y) dx dy$  sono pertanto

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \sum_{i,k} f(x_i, y_k) A(R_{i,k}) = \\ (8) \quad &= \sum_{i,k} f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) (y_{k+1} - y_k) = \\ &= \sum_k (y_{k+1} - y_k) \sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Tenuto conto che, almeno se la decomposizione é abbastanza sottile riesce

$$\sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x, y_k) dx$$

e quindi, indicata con

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

riesce

$$\sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \approx G(y_k)$$

sostituendo nella precedente (8) si ha

$$\sigma(f) \approx \sum_k (y_{k+1} - y_k) G(y_k) \approx \int_c^d G(y) dy$$

ovvero, complessivamente,

$$(9) \quad \iint_R f(x, y) dx dy \approx \sigma(f) \approx \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Rivediamo ordinatamente i passaggi proposti:

- Ammettiamo che la funzione

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

sia continua in  $[c, d]$ ,

- Quindi è possibile calcolare

$$\int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

- Si può riconoscere il seguente teorema

**TEOREMA 1.1** (Formule di riduzione). *Sussistono le seguenti formule di riduzione*

$$(10) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx;$$

$$(11) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

- Le due formule significano che il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo si riduce al calcolo di due integrali semplici:
  - l'integrale di  $f(x, y)$  come funzione della sola  $x$ , vedi Figura 1

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- l'integrale della funzione  $\phi(y)$  trovata sopra

$$\int_c^d \phi(y) dy$$

– ovvero l'integrale di  $f(x, y)$  come funzione della sola  $y$

$$\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

– l'integrale della funzione  $\psi(x)$  trovata sopra

$$\int_a^b \psi(x) dx.$$

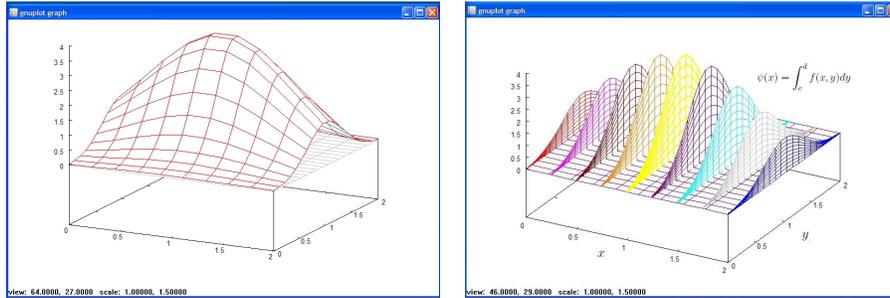


FIGURA 1. L'integrazione sulle sezioni:  $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ .

OSSERVAZIONE 1.2. Dalle (10) e (11) segue l'uguaglianza

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

ovvero nell'integrazione ripetuta di funzioni continue con estremi costanti è possibile invertire l'ordine di integrazione.

ESEMPIO 1.3. L'integrale di  $f(x, y) = x + y$  sul rettangolo  $R = [0, 2] \times [0, 1]$  si calcola al modo seguente:

$$\iint_R (x + y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y) dx$$

Il primo integrale semplice da calcolare è

$$\int_0^2 (x + y) dx = \frac{1}{2} x^2 + xy \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2} 2^2 + 2y = 2 + 2y$$

Il secondo integrale, quello in  $dy$  si calcola sul risultato del primo

$$\int_0^1 (2 + 2y) dy = 2 + 1 = 3$$

Abbiamo pertanto

$$\iint_R (x + y) dx dy = 3$$

Si può sperimentare l'invertibilità del procedimento: si sarebbe potuto prima calcolare l'integrale in  $dy$

$$\int_0^1 (x+y)dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}$$

e successivamente eseguire sul risultato ottenuto l'integrazione in  $dx$

$$\int_0^2 (x + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}2^2 + 1 = 3$$

87	71	9	31	77	98	13
43	61	12	15	82	46	46
36	20	57	69	9	93	27
75	14	60	4	60	60	86
8	2	91	61	31	97	65
7	35	15	14	43	61	21

256 203 244 194 302 455 258

$$\sum_i a_{ij}$$

386  
305  
311  
359  
355  
196

$$\sum_j a_{ij}$$

1912

$$\sum_{ij} a_{ij}$$

Per sommare gli elementi di una matrice si può:  
 sommare quelli di ciascuna riga e poi sommare i totali parziali ottenuti,  
 sommare quelli di ciascuna colonna e poi sommare i totali parziali ottenuti,  
 sommare tutti gli elementi uno dopo l'altro...

**Il primo metodo corrisponde alla formula**

**Il secondo metodo corrisponde alla formula**

**Il terzo metodo corrisponde alla formula**

$$\int dy \int f(x, y) dx$$

$$\int dx \int f(x, y) dy$$

$$\iint f(x, y) dx dy$$

FIGURA 2. Sommare gli elementi di una matrice.

OSSERVAZIONE 1.4. Il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo, cioè il calcolo delle sue somme integrali, somiglia al calcolo della somma degli elementi di una matrice.

Tale somma può essere determinata, tenuto conto delle proprietà commutativa e associativa dell'addizione, in modi diversi

- calcolare le somme degli elementi di ciascuna riga e poi sommare i totali parziali ottenuti,
- calcolare le somme degli elementi di ciascuna colonna e poi sommare i totali parziali ottenuti,
- calcolare la somma di tutti gli elementi, uno dopo l'altro in una qualsiasi forma di loro ordinamento.

I tre metodi sono illustrati in Figura 2: in essa si riconosce come i tre metodi, che conducono naturalmente alla stessa somma, siano collegati alle formule di riduzione degli integrali doppi.

## 2. Integrali su domini normali

La riduzione dell'integrale doppio a due integrazioni semplici osservata sui rettangoli funziona anche su insiemi più generali: cerchi, ellissi, ecc.

**DEFINIZIONE 2.1.** Un insieme  $S \subset \mathbb{R}^2$  è normale rispetto all'asse  $x$  se è definito da

$$S = \{(x, y) : x \in [a, b], \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  due funzioni  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue per  $x \in [a, b]$ . Analogamente si parla di dominio normale rispetto ad  $y$  se  $S$  è rappresentabile come

$$S = \{(x, y) : y \in [c, d], \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con  $\gamma$  e  $\delta$  funzioni continue.

**TEOREMA 2.2.** Sia  $f$  una funzione continua definita su  $S$ , dominio normale rispetto all'asse  $x$ . Allora

$$(12) \quad \iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Analogamente si può dimostrare se il dominio è normale rispetto all'asse  $y$ :

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

ESEMPIO 2.3. Applichiamo la formula (12) per calcolare l'area del cerchio di centro l'origine e raggio  $R$ :  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  che può essere rappresentato come

$$S = \{x \in [-R, R], -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &= \iint_S dx dy = \int_{-R}^R \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \pi R^2. \end{aligned}$$

ESEMPIO 2.4. In modo simile è possibile calcolare l'area della regione  $E$  limitata, che ha per frontiera l'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  con  $a, b > 0$ . L'insieme è così definito:

$$E = \left\{ (x, y) : x \in [-a, a], -b\sqrt{1 - x^2/a^2} \leq y \leq b\sqrt{1 - x^2/a^2} \right\},$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= \iint_E dx dy = \int_{-a}^a \left( \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \right) dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

### 3. Riduzione integrali tripli

Il calcolo degli integrali tripli

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

è operazione complessa, più complessa di quella doppia.

Le tecniche di calcolo dipendono dalla semplicità della forma di  $V$  :

- un parallelepipedo o dominio rettangolare

$$V : \{a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q\}$$

- un dominio normale

$$V : \{(x, y) \in B, \quad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

essendo  $B$  a sua volta un rettangolo o un dominio normale del piano  $x, y$ .

La seconda possibilità é naturalmente triplice: quella indicata può essere denominata come

*normale rispetto all'asse  $z$*

le due seguenti

$$V : \{(x, z) \in B, \quad \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)\}$$

$$V : \{(y, z) \in B, \quad \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)\}$$

come normale rispetto agli assi  $y$  o  $x$ .

Nel caso che  $V$  sia un dominio rettangolare si hanno sei formule di riduzione,

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) \, dz \\ \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_c^d dy \int_a^b dx \int_p^q f(x, y, z) \, dz \\ \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

analoghe alle due degli integrali doppi, corrispondenti alle sei diverse permutazioni dell'ordine in cui eseguire le tre integrazioni semplici.

Nel caso  $V$  sia un dominio normale rispetto all'asse  $z$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_B dx \, dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

Formule analoghe nel caso  $V$  sia normale rispetto agli altri due assi.

ESEMPIO 3.1. *Sia  $V$  il cubo*

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

*l'integrale triplo*

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

*si decompone in*

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z \, dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO 3.2. *Sia*

$$V : \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

*il tetraedro del primo ottante  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ , delimitato dal piano  $x + y + z = 1$ .*

*Si tratta di un dominio normale sia rispetto all'asse  $z$  che all'asse  $y$  che all'asse  $x$ .*

*Rispetto all'asse  $z$  si ha infatti*

$$V : \{(x, y) \in B := \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

*La formula di riduzione é pertanto*

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_B dx \, dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \end{aligned}$$

## CAPITOLO 4

### Trasformazioni e cambiamenti di coordinate

Una delle proprietà da pretendere all'algoritmo che calcola l'area di un insieme  $E$  è che il risultato non cambi se si trasla oppure si ruota l'insieme stesso.

Il fatto che tale proprietà sia posseduta dall'algoritmo

$$\text{area interna} - \text{area esterna}$$

di Peano-Jordan è meno ovvio.

#### 1. Il caso unidimensionale

**1.1. Lunghezza di immagini di intervalli.** Consideriamo il caso unidimensionale: la misura (la lunghezza) di intervalli  $I \subseteq \mathbb{R}^1$

Sia

$$\phi : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione

- di classe  $C^1$  in  $(c, d)$
- invertibile
- con inversa di classe  $C^1$ ,

L'immagine di ogni intervallo  $[a, b] \subset (c, d)$  è un intervallo anch'esso <sup>1</sup>. Se  $\phi$  è non decrescente, si ha

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)].$$

In particolare la lunghezza dell'insieme immagine è

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(t) dt$$

Se invece la funzione è non crescente, l'immagine è l'intervallo  $[\phi(b), \phi(a)]$  e la sua lunghezza

$$\phi(a) - \phi(b) = \int_a^b -\phi'(t) dt.$$

---

<sup>1</sup>Teoremi di Weierstrass e Teorema d'esistenza degli zeri.

In generale, tenuto conto che  $\phi$  essendo invertibile è monotona, si ha

$$(1) \text{ lunghezza}\{\phi([a, b])\} = |\phi(b) - \phi(a)| = \int_a^b |\phi'(xt)| dx = \int_{\phi([a, b])} dx.$$

**ESEMPIO 1.1.** *La lunghezza dell'immagine di  $[1, 2]$  mediante la funzione  $\phi(x) = x^2$*

*La funzione è monotona crescente per  $x \geq 0$ , quindi dalla formula (1) si ha*

$$\phi([1, 2]) = [\phi(1), \phi(2)], \quad \text{lunghezza}\{\phi([1, 2])\} = \int_1^2 2x dx = 3$$

*L'ipotesi di monotonia è stata sfruttata in maniera cruciale: la formula (1) non vale se si sceglie l'intervallo  $[-1, 1]$ . Infatti, in questo caso  $\phi([-1, 1]) = [0, 1]$  pertanto*

$$\text{lunghezza}\{\phi[-1, 1]\} = 1 \quad , \quad \int_{-1}^1 |\phi'(t)| dt = \int_{-1}^1 2|t| dt = 2.$$

*Il problema è sorto dall'aver "contato due volte" la lunghezza dell'immagine nella formula con l'integrale: il motivo della discrepanza risiede nel fatto che la funzione  $\phi(x) = x^2$  non è iniettiva in  $[-1, 1]$ . Ogni punto dell'immagine viene raggiunto esattamente da due punti diversi provenienti dal dominio (con la sola eccezione dello zero).*

**OSSERVAZIONE 1.2.** *Dal teorema della media*

$$\text{lunghezza}\{\phi([a, b])\} = \int_a^b |\phi'(x)| dx = (b - a) |\phi'(\xi)|$$

*segue al tendere di  $a$  e di  $b$  a uno stesso punto  $x_0$*

$$\lim_{a, b \rightarrow x_0} \frac{1}{b - a} \int_a^b |\phi'(x)| dx = |\phi'(x_0)|$$

*espressione che attribuisce al modulo della derivata  $|\phi'(x_0)|$  nel punto il significato di fattore di dilatazione (o contrazione) della trasformazione  $\phi$  nel punto  $x_0$ .*

**1.2. L'integrazione per sostituzione.** La formula (1) è adatta a calcolare integrali di funzioni definite sull'immagine di  $[a, b]$ .

La funzione  $\phi$ , che per semplicità supponiamo crescente, trasformi l'intervallo  $[a, b]$  nell'intervallo  $[\phi(a), \phi(b)]$

$$[a, b] \xrightarrow{\phi} [\phi(a), \phi(b)]$$

Alla decomposizione

$$[a, b] \rightarrow [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b]$$

viene a corrispondere la decomposizione

$$\rightarrow [\phi(a) = \phi(x_0) < \phi(x_1) < \dots < \phi(x_n) < \phi(x_{n+1}) = \phi(b)]$$

L'integrazione su  $[\phi(a), \phi(b)]$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy \cong \sum_{j=1}^n f[\phi(x_j)][\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)]$$

tenuto conto dell'espressione (1) si presenta come

$$\cong \sum_{j=1}^n f[\phi(x_j)] \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi'(t)dt$$

da cui, approssimato l'integrale  $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi'(t)dt$  con  $\phi'(x_j)(x_{j+1} - x_j)$  si ha

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy \cong \sum_{j=1}^n f[\phi(x_j)]\phi'(x_j)(x_{j+1} - x_j) \cong \int_a^b f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

La formula

$$(2) \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy = \int_a^b f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

detta

*regola di integrazione per sostituzione<sup>2</sup>*

é pertanto una conseguenza diretta della formula di calcolo delle lunghezze di un intervallo e del suo trasformato mediante una funzione monotona  $\phi$ .

## 2. Trasformazioni affini del piano

### 2.1. Le trasformazioni affini.

Una trasformazione

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

---

<sup>2</sup>Regola considerata nel precedente corso di Derivate e Integrali

si dice affine se, scritta in forma vettoriale ha l'espressione seguente

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Le trasformazioni affini si dicono lineari se il vettore  $\xi = (h, k)$  è nullo. (Le trasformazioni lineari devono mandare l'origine nell'origine!).

Le traslazioni non cambiano ovviamente le aree: chiediamoci invece come cambia l'area del quadratino  $[-1, 1] \times [1, -1]$  dopo una trasformazione affine e in quale figura, quale parallelogramma, esso venga trasformato.

- Primo caso: affinitá determinata da una matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

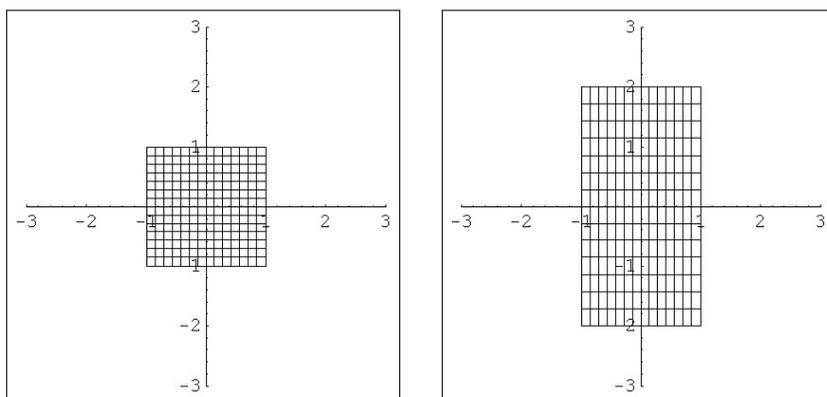


FIGURA 1. A Matrice diagonale

La trasformazione determinata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

produce una trasformazione analoga a quella di Figura 1, con la variante che la base inferiore del quadrato viene trasformata

nella base superiore del rettangolo e viceversa la base superiore del quadrato in quella inferiore del rettangolo.

- Secondo caso: affinit  determinata da una matrice non diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

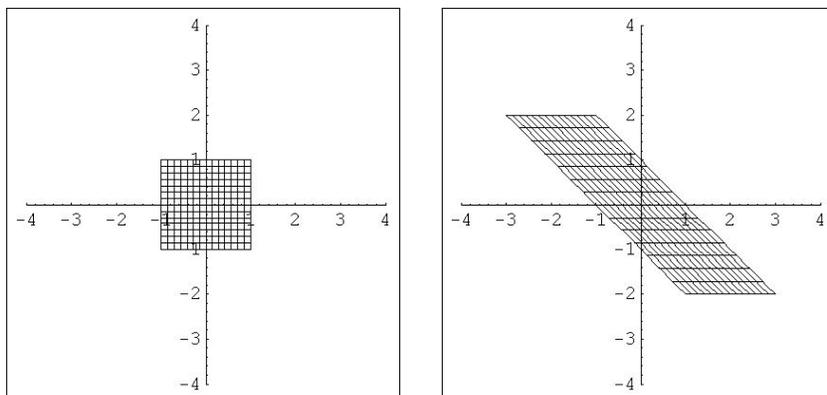


FIGURA 2. Matrice triangolare

- Terzo caso: affinit  determinata da una matrice qualsiasi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

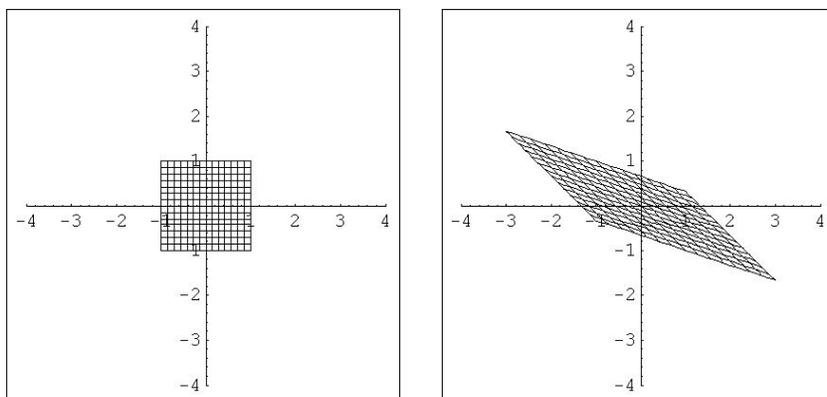


FIGURA 3. Matrice qualsiasi

I risultati intuibili dalle tre Figure sono i seguenti:

- primo caso: una matrice diagonale trasforma il quadratino in un rettangolo,

- secondo caso: una matrice triangolare trasforma il quadratino in un parallelogramma che ha tuttavia ancora un lato parallelo agli assi,
- terzo caso: una matrice qualsiasi trasforma il quadratino in un parallelogramma generico,
- in tutti i casi la frontiera viene trasformata nella frontiera

$$\Phi : \partial A \rightarrow \partial(\Phi(A))$$

Altrettanto prevedibili i risultati per le aree:

il parallelogramma  $\Phi_A(Q)$  cui si perviene tramite l'affinitá determinata dalla matrice  $A$  ha un'area proporzionale a quella del quadratino  $Q$  come riconosciuto dal seguente

**TEOREMA 2.1.** *Sia  $Q$  un triangolo e sia  $\Phi_A(Q)$  la sua immagine tramite la trasformazione affine*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \xi$$

di matrice  $A$ : riesce

$$\text{Area}(\Phi_A(Q)) = |\det(A)| \cdot \text{Area}(Q)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo, per semplicitá che  $\xi = 0$  e  $Q$  sia il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

Detta

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice che determina la trasformazione, l'immagine  $\Phi_A(Q)$  é il triangolo di vertici

$$(0, 0), \quad (a, c), \quad (b, d)$$

la cui  $\text{Area}(\Phi_A(Q))$  é espressa, com'é noto, dal determinante

$$\left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & c & 1 \\ b & d & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = |\det(A)| \text{Area}(Q)$$

□

**OSSERVAZIONE 2.2.** *Una fondamentale conseguenza della precedente formula (2.1) è che se la trasformazione determinata dalla matrice  $A$  conserva le aree, allora  $|\det A| = 1$  e la trasformazione inversa conserva anche lei l'area.*

**ESEMPIO 2.3.** *Dire se la formula (2.1) vale quando  $\det A = 0$ .*

Dal precedente Teorema 2.1 discende il seguente risultato generale

TEOREMA 2.4. *Sia  $E$  un insieme limitato e misurabile del piano e sia  $\Phi(x) = Ax + \xi$ . Allora l'immagine  $\Phi(E)$  è un insieme misurabile del piano e si ha*

$$\text{Area}(\Phi_A[E]) = |\det A| \text{Area}(E).$$

DEFINIZIONE 2.5 (La matrice jacobiana). *La matrice  $A$  che determina la trasformazione affine  $\Phi_A$  si dice anche*

*matrice jacobiana di  $\Phi$*

*In generale anche per trasformazioni non affini*

$$\Phi : R^2 \rightarrow R^2 : \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha(u, v) \\ \beta(u, v) \end{pmatrix}$$

*si chiama matrice jacobiana la matrice*

$$D\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha_u(u, v) & \alpha_v(u, v) \\ \beta_u(u, v) & \beta_v(u, v) \end{pmatrix}$$

Il simbolo adottato,  $D\Phi(u, v)$ , si aggiunge a quello piú tradizionale  $J(u, v)$  per sottolineare una significativa somiglianza della matrice jacobiana con l'ordinaria derivata delle funzioni  $\phi : R^1 \rightarrow R^1$ .

OSSERVAZIONE 2.6. *Nel caso delle trasformazioni affini  $\Phi_A$  é una trasformazione biunivoca, regolare con inversa altrettanto regolare se e solo se  $\det(A) \neq 0$*

### 3. Cambiamenti di coordinate affini

La formula per le aree espressa dal precedente Teorema 2.4 si estende, come ricordato nel caso unidimensionale, alla seguente formula, analoga, per gli integrali doppi.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (x, y) = \Phi_A(u, v) = \{au + bv, cu + dv\}$$

con  $\det(A) \neq 0$ , riesce

$$(3) \quad \iint_{\Phi_A(Q)} f(x, y) dx dy = \iint_Q f[\Phi(u, v)] |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

Questa formula, fondamentale, puó essere memorizzata tenendo presenti le osservazioni seguenti:

- si sostituisce alla funzione integranda  $f(x, y)$  la funzione composta

$$F(u, v) = f[au + bv, cu + dv]$$

ottenuta sostituendo ad  $x$  e ad  $y$  le espressioni  $au + bv$  e  $cu + dv$

- si sostituisce al blocco  $dx dy$  il nuovo blocco

$$|ad - bc| du dv$$

costruito con il valore assoluto del determinante della matrice della trasformazione affine scelta,

- Si calcola l'integrale

$$\iint_Q F(u, v) |ad - bc| du dv$$

**ESEMPIO 3.1.** *Supponiamo che  $P$  sia un parallelepipedo a base quadrata  $\ell = 4$  e altezza  $h = 10$  e supponiamo di volerne calcolare il volume come frutto di un'integrazione doppia:*

- **un primo sperimentatore** pone  $P$  in un riferimento cartesiano  $(u, v, z)$ , con la base sul piano  $z = 0$ , il centro nell'origine e i lati paralleli agli assi: per lui  $P$  diventa l'insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  definito da

$$-2 \leq u \leq 2, \quad -2 \leq v \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 10$$

Il volume coincide quindi con l'integrale doppio

$$\iint_Q 10 du dv, \quad Q : \{-2 \leq u \leq 2, \quad -2 \leq v \leq 2\}$$

- **un secondo sperimentatore** colloca il parallelepipedo in un riferimento  $(x, y, z)$  diversamente: ancora la base sul piano  $z = 0$  con il centro nell'origine, ma, invece di porre i lati lungo gli assi, pone le diagonali sugli assi: per lui quindi  $P$  diventa l'insieme  $F \subseteq \mathbb{R}^3$  definito da

$$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2}(1 - |x|) \leq y \leq 2\sqrt{2}(1 - |x|), \quad 0 \leq z \leq 10$$

Il volume coincide quindi, per il secondo sperimentatore, con l'integrale doppio

$$\iint_R 10 dx dy, \quad R : \{-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2}(1 - |x|) \leq y \leq 2\sqrt{2}(1 - |x|)\}$$

É evidente che ci aspettiamo lo stesso volume: osserviamo che i due quadrati  $Q$  ed  $R$  sono uno il trasformato dell'altro mediante la trasformazione affine  $\Phi_A$  determinata da  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \Phi_A(Q)$$

La formula del cambiamento delle coordinate negli integrali doppi

$$\iint_{\Phi_A(Q)} 10 \, dx \, dy = \iint_Q 10 |\det(A)| \, du \, dv$$

tenuto conto che  $\det(A) = 1$ , conferma infatti che l'uguaglianza dei due integrali e quindi dei due volumi.

ESEMPIO 3.2. Si debba calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy$$

essendo  $D$  il parallelogramma di vertici

$$(0, 0), \quad (2, 0), \quad (3, 3), \quad (1, 3)$$

nel quale é possibile riconoscere, vedi Figura 4, l'immagine del quadrato  $Q$  di vertici opposti  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  tramite la trasformazione affine

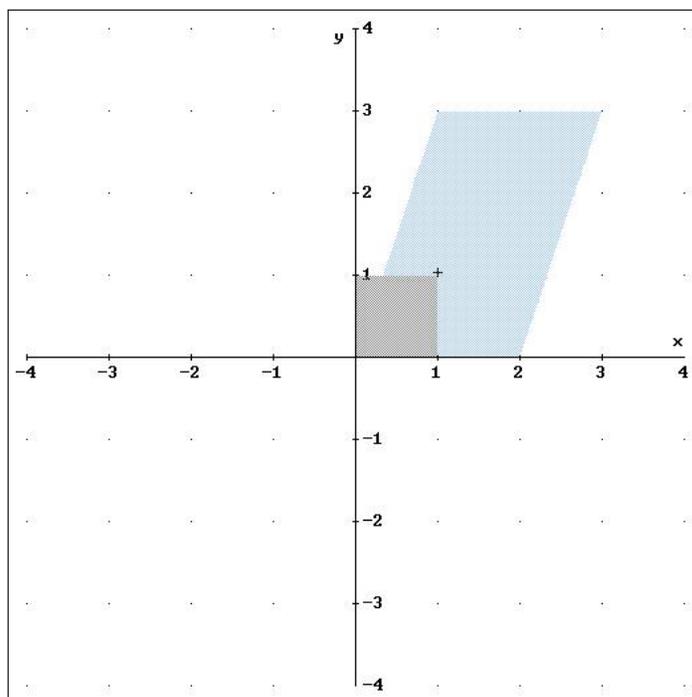


FIGURA 4. Il parallelogramma  $D$  e il quadrato  $Q$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Riesce pertanto

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \iint_Q [(2u+v) + (3v)] \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} dudv = \\ &= 6 \int_0^1 du \int_0^1 (2u+4v) dv = 18 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.3. Cosa si sarebbe potuto dire del valore del precedente integrale doppio pensando di servirsi del Teorema della Media ?

$$\iint_D (x+y) dx dy = (\xi + \eta) \text{Area}(D) = 6(\xi + \eta)$$

e quale punto piú candidabile del centro  $(1.5, 1.5)$  del parallelogramma  $D$  dal momento che la funzione integranda é lineare ?

Infatti

$$\iint_D (x+y) dx dy = 18 = 6(1.5 + 1.5)$$

#### ESEMPIO 3.4. Utilità di un cambio di coordinate affini.

Si debba calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$$

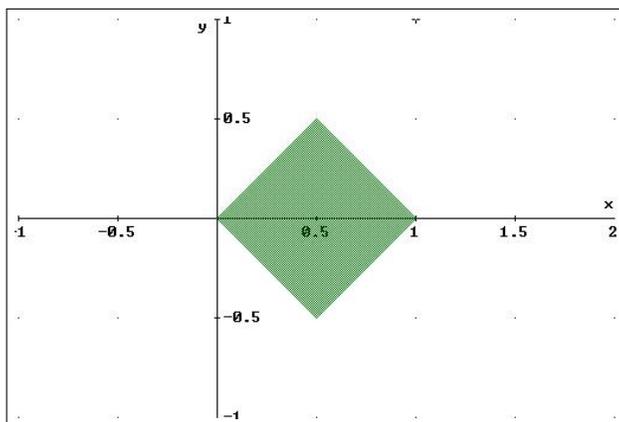


FIGURA 5. Il dominio  $D$

L'integrale richiesto rappresenta il volume del solido

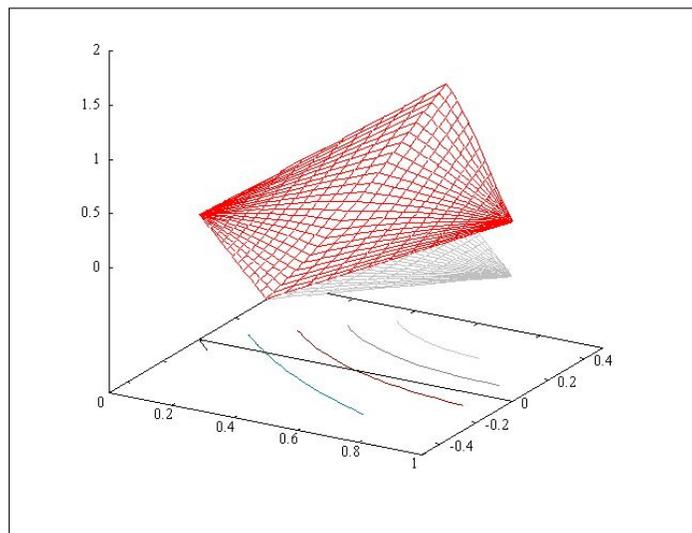


FIGURA 6. Il volume del solido: dal piano grigio,  $z = 0$  alla cupola grafico in rosso, il tutto disegnato in corrispondenza ai punti  $(x, y) \in D$ .

Consideriamo la trasformazione affine

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}, \quad \Phi(D) = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}_{u,v}^2$$

e la sua inversa  $\Psi(u, v)$

$$\Psi(u, v) = \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases} \quad \Psi([0, 1] \times [0, 1]) = D$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Riesce inoltre

$$\det D\Psi(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

La formula del cambiamento di coordinate é la seguente

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2} dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{u}{1+v^2} |D\Psi(u, v)| du dv = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{u}{1+v^2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv \int_0^1 u du = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{\pi}{16}$$

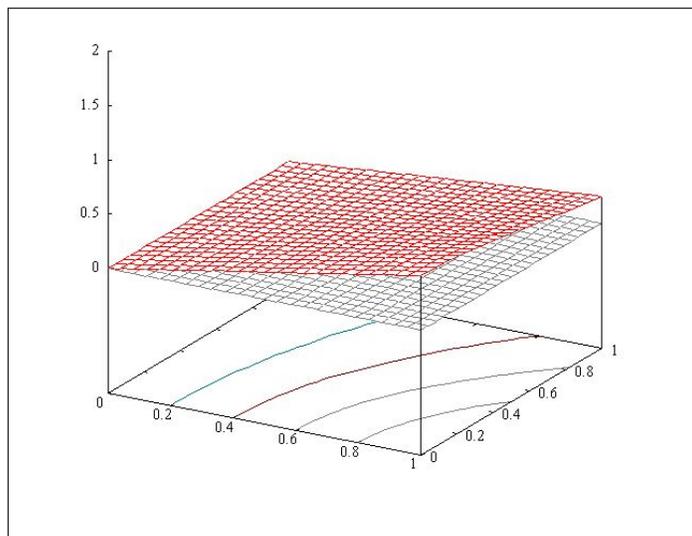


FIGURA 7. Il grafico della  $\frac{1}{2} \frac{u}{1+v^2}$ ,  $u \in [0, 1], v \in [0, 1]$  e il piano  $z = 0$  in grigio.

#### 4. Un caso di trasformazione non affine

Consideriamo un caso in cui la formula di cambiamento delle coordinate si riconosce facilmente sui rettangoli.

Supponiamo che  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sia della forma seguente

$$\Phi(x^1, x^2) = (\phi(x^1), \psi(x^2)).$$

In altre parole

- nella direzione  $x^1$  la deformazione dipende soltanto dalla prima coordinata
- e similmente nella seconda direzione:

Non si incontrano deformazioni, le linee orizzontali vanno in linee orizzontali, quelle verticali in verticali.

I rettangoli (con i lati paralleli agli assi) vengono trasformati in rettangoli (con i lati paralleli agli assi).

La matrice diagonale

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \phi'(x) & 0 \\ 0 & \psi'(y) \end{pmatrix}$$

prende, come nel caso affine, il nome di matrice Jacobiana  $D\Phi(x, y)$  della trasformazione  $\Phi$

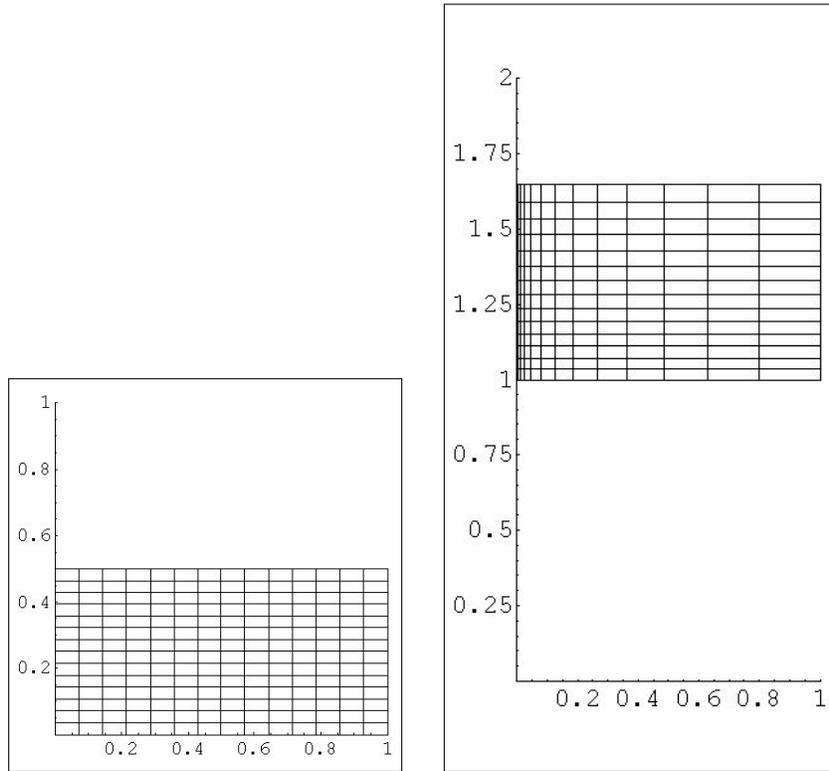


FIGURA 8. La trasformazione  $\Phi : (x, y) \rightarrow (x^3, e^y)$  nel rettangolo  $[0, 1] \times [0, 0.5]$

Valutiamo l'area del trasformato del rettangolo  $R = [0, a] \times [0, b]$  nel caso, vedi Figura 8, ad esempio di

$$\phi(u) = u^3, \quad \psi(v) = e^v$$

Sappiamo dal caso unidimensionale che, se  $\phi$  e  $\psi$  sono entrambe iniettive e regolari i segmenti orizzontali verranno mandati in segmenti orizzontali di lunghezza rispettivamente

$$\int_0^a |\phi'(u)| du = \int_0^a 2u^2 du = a^3, \quad \int_0^b |\psi'(v)| dv = \int_0^b e^v dv = e^b - 1$$

per cui l'immagine è un rettangolo di area

$$\text{Area}(\Phi(R)) = \left( \int_0^a |\phi'(u)| du \right) \left( \int_0^b |\psi'(v)| dv \right) = a^3(e^b - 1).$$

Usando le formule di riduzione otteniamo

$$\text{Area}(\Phi(R)) = \int_0^a \int_0^b |\phi'(u)| |\psi'(v)| dudv = \iint_R |\phi'(u)\psi'(v)| dudv.$$

Osservato che  $|\phi'(u)\psi'(v)|$  é il modulo del determinante della matrice jacobiana (4) otteniamo, anche in questo caso,

$$(5) \quad \text{Area}(\Phi(R)) = \iint_R |\det D\Phi(u, v)| du dv .$$

### 5. Cambi di coordinate generali

La formula precedente (5) si chiama formula dell'area ed è valida in casi molto generali come si riconosce nel seguente

**TEOREMA 5.1.** *Sia  $A$  un sottoinsieme aperto del piano e sia  $C$  un insieme chiuso, limitato e misurabile contenuto in  $A$ .*

*Sia  $\Phi = (\phi, \psi) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$*

$$\Phi(u, v) = (x, y) \quad \begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

*una trasformazione di classe  $C^1$  che abbia inversa di classe  $C^1$ .*

*Valgono i seguenti due risultati:*

$$(6) \quad \text{Area}(\Phi(C)) = \int_{\Phi(C)} dx dy = \int_C |\det D\Phi(u, v)| du dv .$$

*per ogni funzione continua  $F$  su  $A$  riesce*

$$(7) \quad \int_{\Phi(C)} F(x, y) dx dy = \int_C F(\Phi(u, v)) |\det D\Phi(u, v)| du dv .$$

*avendo indicato con  $\det D\Phi(u, v)$  il determinante della matrice jacobiana*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**OSSERVAZIONE 5.2.** *Il precedente risultato, pur essendo molto elegante, ha una notevole limitazione d'uso: non è facile riconoscere se una funzione  $\Phi$  sia o meno invertibile con inversa regolare. In dimensione uno, un criterio molto semplice per l'invertibilità è la monotonia che, per funzioni  $C^1$  è assicurata dal fatto che il segno della derivata non cambi. In dimensione due un criterio altrettanto agile non esiste.*

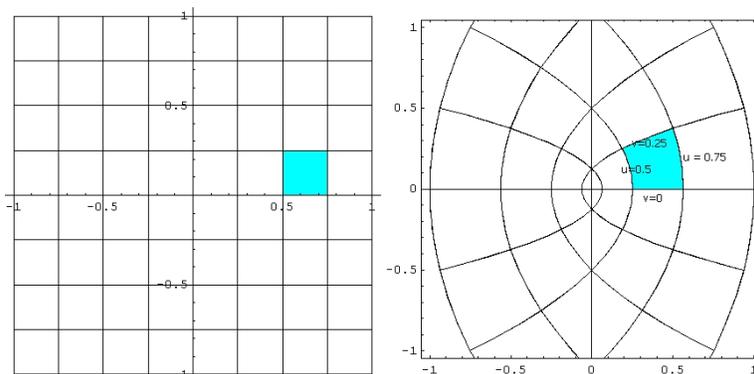


FIGURA 9. Cambiamento di coordinate

### 6. Un cenno di dimostrazione

Consideriamo il cambiamento di coordinate,

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = u^2 - v^2 \\ y = \psi(u, v) = 2uv \end{cases}$$

vedi Figura 9: a sinistra il piano  $(u, v)$  a destra il piano  $(x, y)$ .

Alle linee  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$ , le rette parallele agli assi del piano  $(u, v)$ , corrispondono due famiglie di parabole del piano  $(x, y)$ , di asse l'asse delle  $x$ , la famiglia delle parabole con la concavità positiva e quella con la concavità negativa.

Il quadratino colorato  $E$  del piano  $(u, v) : 0.5 \leq u \leq 0.75, 0 \leq v \leq 0.25$  si trasforma in una regione  $T(E)$ , delimitata da due parabole della prima famiglia e due della seconda, regione vagamente simile ad un parallelogramma nel piano  $(x, y)$ .

Indicato con  $(u_0, v_0)$  uno dei vertici del quadratino  $E$  e con  $h$  e  $k$  i passi con cui è stato quadrettato il piano  $(u, v)$  l'area di  $T(E)$  si calcola, assimilandolo ad un parallelogramma, con il determinante

$$\left| \det \begin{pmatrix} \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0, v_0) & 1 \\ \varphi(u_0 + h, v_0) & \psi(u_0 + h, v_0) & 1 \\ \varphi(u_0, v_0 + k) & \psi(u_0, v_0 + k) & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Ovvie manipolazioni della matrice trasformano

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0, v_0) & 1 \\ \varphi(u_0 + h, v_0) - \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0 + h, v_0) - \psi(u_0, v_0) & 0 \\ \varphi(u_0, v_0 + k) - \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0, v_0 + k) - \psi(u_0, v_0) & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} \varphi(u_0 + h, v_0) - \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0 + h, v_0) - \psi(u_0, v_0) \\ \varphi(u_0, v_0 + k) - \varphi(u_0, v_0) & \psi(u_0, v_0 + k) - \psi(u_0, v_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui servendosi del teorema di Lagrange su ciascuna delle quattro differenze che compongono l'ultima matrice si ha

$$\simeq \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) & \psi_u(u_0, v_0) \\ \varphi_v(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} h k.$$

Formula che corrisponde, tenuto conto che  $h k = \text{Area}(E)$  all'approssimazione

$$\text{Area}(T(E)) \simeq \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) & \psi_u(u_0, v_0) \\ \varphi_v(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} \right| \text{Area}(E)$$

Indicato con  $J(u_0, v_0)$  il precedente determinante si ha la formula di approssimazione delle aree

$$(8) \quad \text{Area}(T(E)) \simeq |J(u_0, v_0)| \text{Area}(E)$$

**6.1. La stima dell'errore.** La regione  $T(E)$  non coincide con il parallelogramma  $P_E$  con un vertice in  $(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))$  e lati i vettori  $\{\varphi_u(u_0, v_0)h, \psi_u(u_0, v_0)k\}$  e  $\{\varphi_v(u_0, v_0)h, \psi_v(u_0, v_0)k\}$ .  
Tuttavia

- i punti di  $T(E)$  distano da quelli di  $P_E$  per non più di  $\varepsilon\sqrt{h^2 + k^2}$
- e viceversa i punti di  $P_E$  distano da quelli di  $T(E)$  per non più di  $\varepsilon\sqrt{h^2 + k^2}$

con  $\varepsilon$  infinitesimo con  $h^2 + k^2$  come si riconosce approssimando  $\varphi(u, v)$  e  $\psi(u, v)$  con la formula di Taylor di ordine 1 intorno al punto  $(u_0, v_0)$ . Ne segue pertanto che la differenza delle aree dei due insiemi  $T(E)$  e  $P_E$  non può superare

$$2\varepsilon\sqrt{h^2 + k^2} h k$$

## 7. La trasformazione degli integrali doppi

Supponiamo di dover calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{T(\Omega)} f(x, y) dx dy$$

e serviamoci delle somme integrali generalizzate relative ad una decomposizione di  $T(\Omega)$  dedotta da una decomposizione

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{Area}[T(E_i)] = \sum_{i=1}^n f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) \text{Area}[T(E_i)]$$

Tenuto conto dell'approssimazione (8) si ha quindi

$$\iint_{T(\Omega)} f(x, y) dx dy \simeq \sum_{i=1}^n f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| \text{Area}(E_i)$$

Tenuto presente del resto che l'ultima sommatoria approssima l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

si conclude che

$$\iint_{T(\Omega)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

### 8. Le coordinate polari

Siano  $0 \leq r < R$  e  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ , sia  $Q$  il rettangolo

$$Q = [r, R] \times [\alpha, \beta]$$

e si indichi con  $(\rho, \theta)$  i punti di  $Q$ .

Si consideri la funzione

$$\Phi : R^2 \rightarrow R^2 : \Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} .$$

L'immagine di  $Q$  tramite  $\Phi$  risulta essere l'intersezione della corona circolare di raggio interno  $r$  e raggio esterno  $R$  con l'angolo di apertura  $\alpha - \beta$ : se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 2\pi$ , l'immagine di  $Q$  è la corona anzidetta, se inoltre  $r = 0$ , l'immagine è il disco di centro l'origine e raggio  $R$ .

Calcoliamo l'area dell'immagine  $\Phi(Q)$  usando la formula (5):

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Phi(Q)) &= \int_{\Phi(Q)} dx dy = \int_Q |\det D\Phi(\rho, \theta)| d\rho d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^R |\det D\Phi(\rho, \theta)| d\rho d\theta . \end{aligned}$$

La matrice jacobiana e il suo determinante sono, nel caso delle coordinate polari,

$$D\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(\rho, \theta) = \rho$$

quindi

$$\text{Area}(\Phi(Q)) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^R \rho d\rho d\theta = \frac{R^2 - r^2}{2} (\beta - \alpha) .$$

Si ritrova, per  $r \rightarrow 0$  l'area del cerchio

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lim_{\beta \rightarrow 2\pi^-} \frac{R^2 - r^2}{2} (\beta - \alpha) = \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2.$$

OSSERVAZIONE 8.1. *I risultati ottenuti sono corretti anche se per giustificare la (9) non basta la nostra formula dell'area perché la funzione  $\Phi$  non soddisfa le ipotesi del teorema per  $\rho = 0$ : si perde l'invertibilità. Infatti il segmento verticale  $\{0\} \times [0, 2\pi]$  ha come immagine un solo punto, l'origine.*

*In altre parole la funzione  $\Phi$  non è iniettiva.*

*Il problema può essere rimosso, contentiamoci di averlo segnalato.*

**8.1. Integrazione in coordinate polari.** Servendosi di una generalizzazione della (7) si ottiene la seguente:

PROPOSIZIONE 8.2. *Sia  $F$  una funzione continua sul disco chiuso di raggio  $R > 0$  centrato in  $(0, 0)$ . Allora*

$$(10) \quad \int_{B(0,R)} F(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \int_0^R F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right].$$

ESEMPIO 8.3. *Calcolare l'integrale doppio seguente:*

$$\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1$$

- *si sostituisce ad  $x$  e ad  $y$  rispettivamente  $\rho \cos(\theta)$  e  $\rho \sin(\theta)$*
- *si sostituisce al blocco  $dx dy$  il blocco  $\rho d\rho d\theta$*
- *si estende l'integrale doppio in  $\rho$  e  $\theta$  alla regione  $Q$  tale che*

$$(\rho, \theta) \in Q \Leftrightarrow (x, y) \in D$$

$$\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} 2\rho d\rho = 2\pi \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

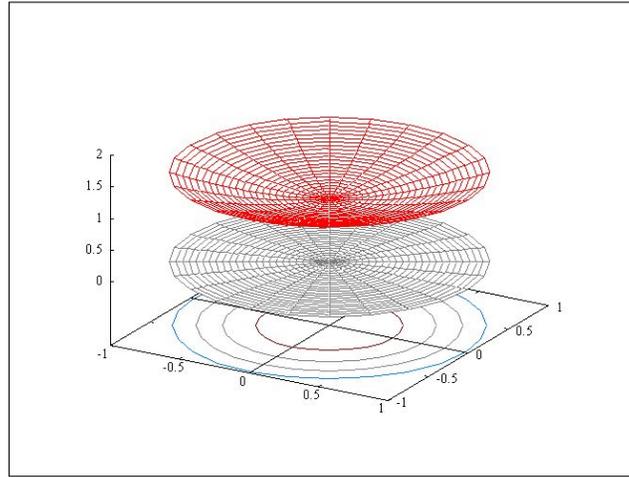


FIGURA 10. L'integrale  $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$  rappresenta il volume tra il piano  $z=0$  in grigio e il grafico di  $\sqrt{1+x^2+y^2}$ ,  $x^2+y^2 \leq 1$  in rosso.

### 9. Cambiamenti di coordinate in integrali tripli

L'algoritmo di sostituzione delle coordinate negli integrali doppi si estende in modo del tutto analogo al caso di integrali tripli.

Siano

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

gli elementi della trasformazione  $\Phi$  che si intende adottare, funzioni regolari e invertibili, l'integrale

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

si trasforma al modo seguente

- si sostituiscono nella funzione integranda  $f$  le  $x$ ,  $y$  e  $z$  con le corrispondenti  $\varphi(u, v, w)$ ,  $\psi(u, v, w)$  e  $\chi(u, v, w)$
- si sostituisce il blocco  $dx dy dz$  con

$$\det |D\Phi(u, v, w)| du dv dw$$

essendo

$$\det D\Phi(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

- Si calcola l'integrale

$$\iiint_Q f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] |\det D\Phi(u, v, w)| du dv dw$$

essendo  $Q$  tale che

$$(u, v, w) \in Q \Leftrightarrow (x, y, z) \in D$$

Tenere sempre presente che lo scopo del cambiamento di coordinate é quello di approdare con esso ad un integrale che presenti minori difficoltá di quello originale.

**9.1. Coordinate sferiche.** In questo caso la trasformazione  $\Phi$  é definita come segue

$$\Phi = \Phi(\rho, \phi, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \phi \sin \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi].$$

La matrice Jacobiana é la seguente:

$$D\Phi(\rho, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana é

$$\rho^2 \sin(\theta).$$

**9.2. La sfera.** Applichiamo le coordinate sferiche per calcolare il volume della sfera  $B(0, R)$  di centro l'origine e raggio  $R$

$$\text{Volume}(B(0, R)) = \iiint_{B(0, R)} dx dy dz = \iiint_Q \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi,$$

dove  $Q = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

$$\text{Volume}(B(0, R)) = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**9.3. L'ellissoide.** Analogamente é possibile calcolare il volume dell'ellissoide

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Convieni modificare le precedenti coordinate sferiche per adattarle meglio agli assi dell'ellissoide

$$\begin{cases} x = a \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = b \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = c \rho \cos \phi. \end{cases}, \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$$

In questo caso il determinante jacobiano è  $abc \rho^2 \sin \theta$  e quindi

$$\text{Volume}(E) = abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^\pi d\phi = \frac{4}{3} \pi abc.$$

ESEMPIO 9.1. *Calcolare l'integrale triplo*

$$I = \iiint_{\Sigma} |xyz| dx dy dz \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

dove  $\Sigma$  è la sfera piena, di centro l'origine e raggio 1.

Per simmetria si riconosce che

$$I = 8 \cdot \iiint_{\Sigma_+} x y z dx dy dz$$

essendo  $\Sigma_+$  la parte di  $\Sigma$  relativa all'ottante positivo. Eseguiamo il cambiamento di coordinate

$$I = 8 \iiint_Q \rho^3 \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\phi d\theta$$

essendo

$$Q : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, \pi/2]$$

Ne segue

$$I = 8 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{\pi/2} \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{1}{6}$$

#### 9.4. Coordinate cilindriche.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases} \quad \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di un misto di coordinate polari sul piano  $xy$  e della coordinata cartesiana  $z$ .

Il determinante jacobiano, uguale a quello delle coordinate polari del piano, è

$$\det DF(r, \theta, \phi) = \rho.$$

ESEMPIO 9.2. *Un integrale triplo*

$$J = \iiint_D |xyz| dx dy dz, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]$$

dove  $D$  è il cilindro di base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 e altezza 2.

Per simmetria si ha

$$J = 4 \iiint_{D_+} |xyz| dx dy dz$$

essendo  $D_+$  la parte di cilindro relativa al quadrante  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Servendosi delle coordinate cilindriche si ha

$$J = \iiint \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^2 z dz \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$J = \frac{1}{4} \int_0^2 z dz \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{8} \int_0^2 z dz = \frac{1}{4}$$

## 10. I solidi di rotazione

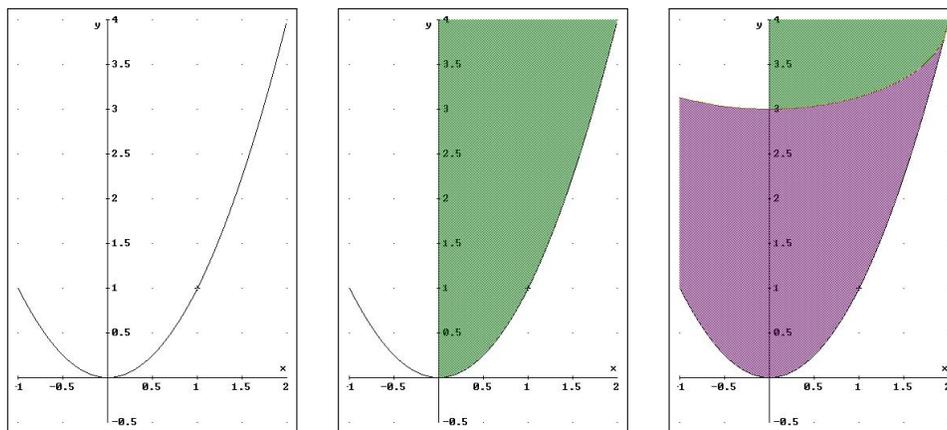


FIGURA 11. Il solido di rotazione ottenuto dalla parabola

- PRIMA FIGURA  $z = x^2, z \in [0, 4]$ , la parabola,
- SECONDA FIGURA  $x^2 \leq z, z \in [0, 4]$ , il dominio del piano  $xz$ ,
- TERZA FIGURA  $x^2 + y^2 \leq z, z \in [0, 4]$ , il solido  $S$  di rotazione.

Si noti che il solido di rotazione equivale a

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{z}, \quad z \in [0, 4]$$

Servendosi delle coordinate cilindriche si ha

$$\text{Volume}(S) = \iiint_S dx dy dz = \iiint_Q \rho d\rho d\theta dz$$

essendo

$$Q : \rho \in [0, \sqrt{z}], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 4]$$

Ne segue

$$\text{Volume}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{z}} \rho d\rho = \pi \int_0^4 z dz = 8\pi$$

Il caso generale di un solido  $\Sigma$  di rotazione é

$$\Sigma = \{0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \phi(z), z \in [a, b]\},$$

dove  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione continua non negativa.

Il volume è

$$\text{Volume}(\Sigma) = \iiint_{\Sigma} dx dy dz.$$

In coordinate cilindriche

$$\text{Volume}(\Sigma) = \iiint_{\Sigma'} \rho d\rho d\theta dz \quad \Sigma' = \{0 \leq \rho \leq \phi(z), z \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Dato che  $\Sigma'$  si può scrivere come

$$\Sigma' = \{(\theta, z) \in D, 0 \leq \rho \leq \phi(z)\} \quad \text{dove } D = [0, 2\pi] \times [a, b],$$

si tratta di un dominio normale rispetto a  $\theta$  e  $z$ , perciò l'integrale si può scrivere come

$$\text{Volume}(\Sigma) = \iint_D \int_0^{\phi(z)} \rho d\rho d\theta dz = \frac{1}{2} \iint_D \phi^2(z) d\theta dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \phi^2(z) dz.$$

Quindi la formula del volume del solido di rotazione è

$$\text{Volume}(\Sigma) = \pi \int_a^b \phi^2(z) dz.$$

### 11. Parallelepipedi in $\mathbb{R}^n$

Siano assegnati  $n + 1$  vettori di  $\mathbb{R}^n$

$$v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$$

indichiamo con  $\Pi$  l'insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^n$  dei punti

$$(11) \quad P = v^{(0)} + \sum_{k=1}^n t_k v^{(k)}, \quad \forall t_k \in [0, 1]$$

Nel caso  $n = 2$ ,  $\Pi$  é un parallelogramma del piano, con un vertice nell'estremo di  $v^{(0)}$  applicato all'origine e i lati paralleli a  $v^{(1)}, v^{(2)}$ .

Nel caso particolare che i vettori  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  siano paralleli agli assi  $\Pi$  é un dominio rettangolare.

Nell'altro caso particolare che i vettori  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  siano a due a due ortogonali fra loro  $\Pi$  é, almeno se la dimensione  $n = 3$  un parallelepipedo dello spazio.

Le equazioni (11) rappresentano, se i vettori  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  sono linearmente indipendenti, una trasformazione biunivoca  $f$  tra il cubo

$$Q : [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$$

e  $\Pi$ .

Amnesso che la regola per il cambio delle coordinate negli integrali multipli, osservata in  $\mathbb{R}^2$ , sia valida in ogni  $\mathbb{R}^n$  riesce

$$(12) \quad \text{mis}(\Pi) = \iint_{\Pi} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iint_Q |J| dt_1 dt_2 \dots dt_n = |J|$$

avendo indicato con  $J$  il determinante jacobiano della trasformazione  $f$

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \det \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \dots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \dots & v_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \dots & v_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

OSSERVAZIONE 11.1. *Nel caso  $n = 2$  la formula (12) equivale alla nota formula per l'area del triangolo determinato da tre punti*

$$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$$

*Posto infatti*

$$v^{(0)} = \{a_1, a_2\}, v^{(1)} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2\}, v^{(2)} = \{c_1 - a_1, c_2 - a_2\}$$

*Il triangolo ABC é metà del parallelogramma  $\Pi$  con un vertice in  $v^{(0)} = A$  e lati  $v^{(1)}, v^{(2)}$ : quindi*

$$\begin{aligned} \text{mis}(ABC) &= \frac{1}{2} \text{mis}(\Pi) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right| \end{aligned}$$

**11.1. Il procedimento di ortogonalizzazione.** Assegnati  $n$  vettori linearmente indipendenti

$$v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$$

é facile costruirne altri  $n$

$$w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$$

che siano

- loro combinazioni lineari,
- ortogonali fra loro.

Una costruzione, detta di Schmidt, é la seguente

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= v^{(1)} \\ w^{(2)} &= v^{(2)} - \frac{(v^{(2)}, w^{(1)})}{\|w^{(1)}\|^2} w^{(1)} \\ w^{(3)} &= v^{(3)} - \frac{(v^{(3)}, w^{(2)})}{\|w^{(2)}\|^2} w^{(2)} - \frac{(v^{(3)}, w^{(1)})}{\|w^{(1)}\|^2} w^{(1)} \\ w^{(4)} &= v^{(4)} - \frac{(v^{(4)}, w^{(3)})}{\|w^{(3)}\|^2} w^{(3)} - \frac{(v^{(4)}, w^{(2)})}{\|w^{(2)}\|^2} w^{(2)} - \frac{(v^{(4)}, w^{(1)})}{\|w^{(1)}\|^2} w^{(1)} \\ &\dots \end{aligned}$$

É chiaro che l'essere i  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  linearmente indipendenti garantisce che

- $v^{(1)} \neq 0 \rightarrow w^{(1)} \neq 0$
- quindi si può eseguire la divisione per  $\|w^{(1)}\|^2$  e costruire  $w^{(2)}$ ,
- $w^{(2)} \neq 0$ , altrimenti  $v^{(1)}$  e  $v^{(2)}$  sarebbero linearmente dipendenti,
- ecc. ecc.

Riesce inoltre

$$\begin{aligned} \|w^{(1)}\|^2 &= \|v^{(1)}\|^2 \\ \|w^{(2)}\|^2 &= \left( v^{(2)} - \frac{(v^{(2)}, w^{(1)})}{\|w^{(1)}\|^2} w^{(1)}, v^{(2)} - \frac{(v^{(2)}, w^{(1)})}{\|w^{(1)}\|^2} w^{(1)} \right) = \|v^{(2)}\|^2 - (v^{(2)}, w^{(1)})^2 \\ \|w^{(3)}\|^2 &\leq \dots \leq \|v^{(3)}\|^2 \\ &\dots\dots\dots \\ \|w^{(n)}\|^2 &\leq \|v^{(n)}\|^2 \end{aligned}$$

I vettori ortogonali tra loro costruiti si possono poi, volendo, normalizzare...

$$w^{(k)} \rightarrow \frac{1}{\|w^{(k)}\|} w^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

**11.2. Due determinanti.** I vettori  $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$  sono legati ai  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  a tal punto che riesce

$$(13) \quad \det \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \dots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \dots & v_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \dots & v_n^{(n)} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} w_1^{(1)} & w_2^{(1)} & \dots & w_n^{(1)} \\ w_1^{(2)} & w_2^{(2)} & \dots & w_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(n)} & w_2^{(n)} & \dots & w_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Infatti la prima riga delle due matrici é la stessa e le righe successive, nella seconda matrice, sono ottenute sottraendo dalle corrispondenti righe della prima matrice combinazioni lineari delle righe precedenti, sottrazione che, com

'e noto non altera il determinante.

Naturalmente gli insiemi  $\Pi_v$  e  $\Pi_w$ , in azzurro e in giallo in Figura 12, generati a partire dalle due coppie di vettori sono insiemi diversi...

... ma hanno la stessa misura !

**11.3. Il teorema di Binet.** Le matrici quadrate

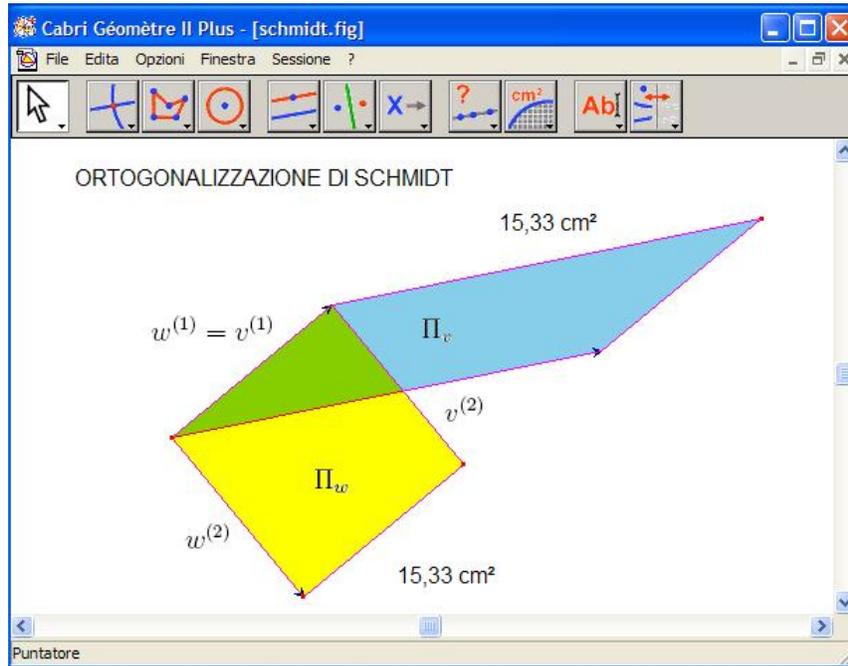
- si moltiplicano,
- se ne esegue la trasposta,
- se ne calcolano i determinanti,
- ecc. ecc.

Il teorema di Binet dice che

$$\det(A * B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

e, naturalmente anche

$$\det(A * B^T) = \det(A) \cdot \det(B)$$

FIGURA 12.  $\Pi_v$  e  $\Pi_w$ 

come pure

$$\det(A * A^T) = \det(A)^2$$

Applicando quest'ultima alla relazione (13) si ha quindi

$$\det \begin{vmatrix} (v^{(1)}, v^{(1)}) & (v^{(1)}, v^{(2)}) & \dots & (v^{(1)}, v^{(n)}) \\ (v^{(2)}, v^{(1)}) & (v^{(2)}, v^{(2)}) & \dots & (v^{(2)}, v^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v^{(n)}, v^{(1)}) & (v^{(n)}, v^{(2)}) & \dots & (v^{(n)}, v^{(n)}) \end{vmatrix} =$$

$$= \det \begin{vmatrix} (w^{(1)}, w^{(1)}) & (w^{(1)}, w^{(2)}) & \dots & (w^{(1)}, w^{(n)}) \\ (w^{(2)}, w^{(1)}) & (w^{(2)}, w^{(2)}) & \dots & (w^{(2)}, w^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (w^{(n)}, w^{(1)}) & (w^{(n)}, w^{(2)}) & \dots & (w^{(n)}, w^{(n)}) \end{vmatrix}$$

L'ortogonalità dei vettori  $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$  rende l'ultima una matrice diagonale,

$$\det \begin{vmatrix} (w^{(1)}, w^{(1)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (w^{(2)}, w^{(2)}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (w^{(n)}, w^{(n)}) \end{vmatrix}$$

Quindi si ha

$$mis^2(\Pi) = \|w^{(1)}\|^2 \|w^{(2)}\|^2 \dots \|w^{(n)}\|^2 \leq \|v^{(1)}\|^2 \|v^{(2)}\|^2 \dots \|v^{(n)}\|^2$$

ovvero

$$mis(\Pi) \leq \|v^{(1)}\| \|v^{(2)}\| \dots \|v^{(n)}\|$$

disuguaglianza che corrisponde ad una proprietà isoperimetrica dei rettangoli:

*tra tutti i parallelepipedi di assegnate dimensioni (lunghezze degli spigoli) il rettangolo é quello di area maggiore.*

**Parte 2**

**Integrali impropri**



## Integrali impropri di funzioni di una variabile

### 1. Introduzione

Il titolo di integrale improprio <sup>1</sup> si riferisce a integrali quali

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$$

riferiti a

- funzioni non continue agli estremi di intervalli,
- funzioni integrande non limitate,
- intervalli di integrazione non chiusi e limitati.

Ricordiamo il seguente risultato fondamentale per l'integrazione di funzioni  $f(x)$  continue su intervalli chiusi e limitati:

**TEOREMA 1.1.** *Sia  $f$  continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni contenute in  $[a, b]$  e convergenti rispettivamente ad  $a$  e  $b$  allora*

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

La proprietà indicata viene assunta come algoritmo di definizione dell'integrale nei casi impropri precedentemente elencati: perché non definire

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

come

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

una volta riconosciuta l'esistenza di tale limite...?

### 2. Integrali su intervalli limitati

#### 2.1. Funzioni continue e limitate.

---

<sup>1</sup>Vol. I, §3.15, pag. 301

TEOREMA 2.1. *Sia  $f(x)$  continua sull'intervallo aperto  $(a, b)$  e sia limitata in modulo: allora comunque si scelgano due successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  contenute in  $(a, b)$  e convergenti rispettivamente ad  $a$  e a  $b$  esiste il*

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

*non dipendente dalle successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ .*

*Il valore di tale limite viene assunto come definizione di*

$$\int_a^b f(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $|f(x)| \leq M$ , posto

$$I_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

verifichiamo l'esistenza del limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$$

tramite il criterio di convergenza di Cauchy, valido per ogni successione numerica.

Riesce

$$|I_n - I_m| \leq M (|a_n - a_m| + |b_n - b_m|)$$

Tenuto conto che  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono successioni convergenti, i due moduli a secondo membro saranno infinitesimi.

Quindi infinitesimo riesce anche  $|I_n - I_m|$  e quindi, verificato il criterio di convergenza, se ne deduce l'esistenza del limite (15).

Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  e  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  due coppie diverse di successioni convergenti ad  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx - \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_{a_n}^{\alpha_n} |f(x)| dx \right| + \left| \int_{b_n}^{\beta_n} |f(x)| dx \right| \leq \\ &\leq M (|a_n - \alpha_n| + |b_n - \beta_n|) \end{aligned}$$

da cui risulta che le due successioni

$$\left\{ \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right\} \quad \left\{ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x) dx \right\}$$

non possono che avere lo stesso limite. □

ESEMPIO 2.2. *Il teorema precedente garantisce l'esistenza dell'integrale improprio di  $\sin(1/x)$  sull'intervallo  $(0, 1)$ .*

Consideriamo, per altra via, l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Tenuto conto che

$$\int_a^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_a^{\pi/2} x^2 \left( \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' dx$$

si ha

$$\int_a^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_a^{\pi/2} - 2 \int_a^{\pi/2} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

I due termini a secondo membro hanno limite per  $a \rightarrow 0$ :

- il primo perché esiste, ovviamente,  $\lim_{a \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- il secondo perché la funzione integranda è prolungabile per continuità in tutto l'intervallo chiuso  $[0, \pi/2]$

È quindi riconosciuta l'esistenza del limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

purtroppo, non è altrettanto semplice conoscerne il valore !

**2.2. Numero finito di discontinuitá.** Il precedente Teorema (2.1) copre anche il caso di alcuni punti di discontinuitá interni all'intervallo di integrazione quali nel caso, vedi Figura 1 ,ad esempio di

$$\int_0^{10} \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) dx$$

**2.3. Funzioni continue in  $(a, b)$  non limitate.** La questione <sup>2</sup> si riferisce al secondo esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

La costruzione degli integrali  $I_n$  è la stessa del caso precedente: non altrettanto la loro convergenza che, dipende dall'ordine di infinito che la funzione  $f$  presenta in uno o in entrambi gli estremi.

---

<sup>2</sup>Dire che  $f(x)$  continua in  $(a, b)$  aperto non è limitata equivale a dire che diverge in modulo in uno o in entrambi gli estremi.

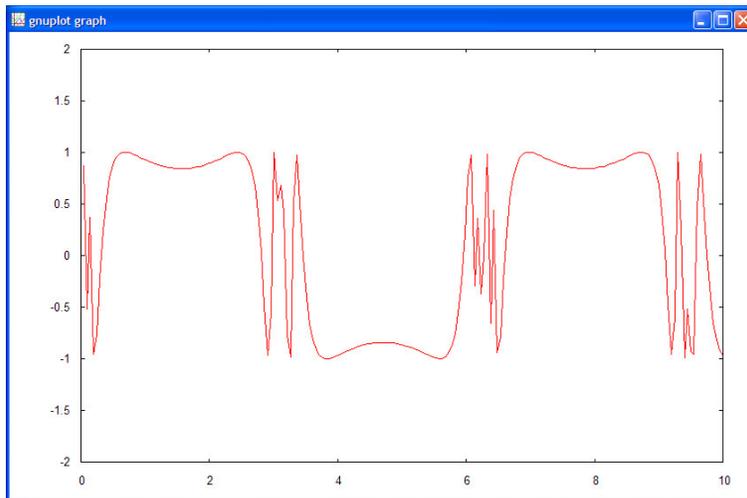


FIGURA 1.  $\int_0^{10} \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) dx$

TEOREMA 2.3. Sia  $f$  continua in  $(a, b]$ ,  $a$  escluso e  $b$  incluso, e riesca

$$|f(x)| \leq M \frac{1}{|x-a|^\alpha}, \quad \alpha < 1$$

allora esiste il limite

$$(16) \quad \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x) dx$$

che può essere quindi preso come valore dell'integrale improprio

$$\int_a^b f(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $t_1, t_2 \in [a, a + \epsilon]$ ,  $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^b f(x) dx - \int_{t_2}^b f(x) dx \right| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx \right| = \\ &= \frac{M}{1-\alpha} \left( (t_2-a)^{1-\alpha} - (t_1-a)^{1-\alpha} \right) \leq \frac{M}{1-\alpha} \epsilon^{1-\alpha} \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 2.4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k^2 < 1$$

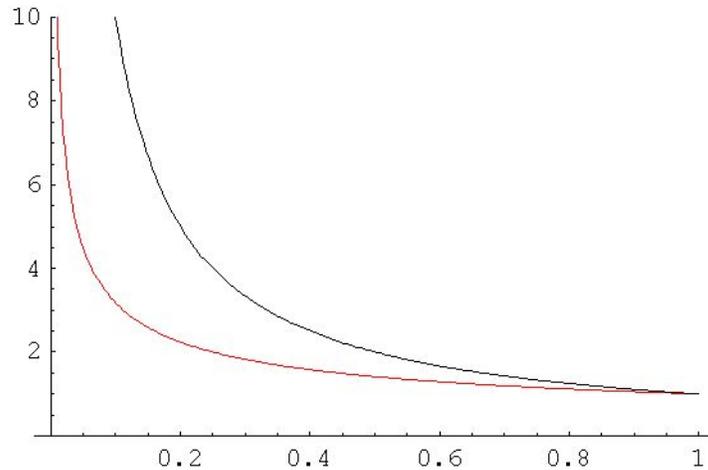


FIGURA 2. Sottografico di  $1/\sqrt{x}$  (rosso) su  $[0, 1]$  : regione illimitata (in alto...) ma area finita. Sottografico di  $1/x$  (nero): area infinita.

La funzione integranda  $f(x)$  é continua in  $[0, 1)$ , diverge in 1, ma

$$|f(x)| \leq \left( \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}$$

quindi presenta in  $x = 1$  un ordine di divergenza con esponente  $\alpha = 1/2$  legittimo...!

L'integrale improprio

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2 \sin^2(\frac{\theta_0}{2}))}}$$

del tutto equivalente a quello considerato sopra, esprime <sup>3</sup> il periodo d'oscillazione del pendolo di lunghezza  $L$  lasciato oscillare a partire dalla posizione iniziale  $\theta_0 > 0$ .

### 3. Intervalli illimitati

Funzioni continue da integrare su intervalli infiniti (semirette o tutto l'asse reale): stesso procedimento basato sui casi precedenti, si integra su una successione di intervalli leciti e si assume come integrale improprio il loro limite.

<sup>3</sup>cfr. Courant-John , Vol. I, pag. 410

**TEOREMA 3.1** (Criterio sufficiente di convergenza). *Sia  $f(x)$  continua nell'intervallo illimitato  $(a, +\infty)$  e infinitesima per  $x \rightarrow \infty$  con un ordine di infinitesimo  $\alpha > 1$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) x^\alpha = 0$$

*allora esiste il limite*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

*e tale valore viene assunto come integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

La dimostrazione é analoga a quella dei casi precedenti.

**ESEMPIO 3.2.** *Il sottografico di*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

*ha area finita,  $\pi$ . Infatti*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} (\arctan(b) - \arctan(a)) = \pi \end{aligned}$$

**ESEMPIO 3.3.** *Il sottografico di*

$$f(x) = e^{-x^2},$$

*la campana di Gauss, ha area finita, valore  $\sqrt{\pi}$ .*

#### 4. L'indipendenza dalla successione

I precedenti integrali impropri sono stati definiti come limiti di altri integrali: é importante riconoscere che i valori cosí assunti non dipendano tuttavia dalla successione scelta nel calcolo.

Supponiamo per esempio che qualcuno parlasse dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$$

dichiarando che esso vale 0 in base al seguente ragionamento:

- la successione di punti  $x_k = 2k\pi$  tende a  $+\infty$
- gli integrali

$$\int_0^{x_k} \sin(x) dx = 0$$

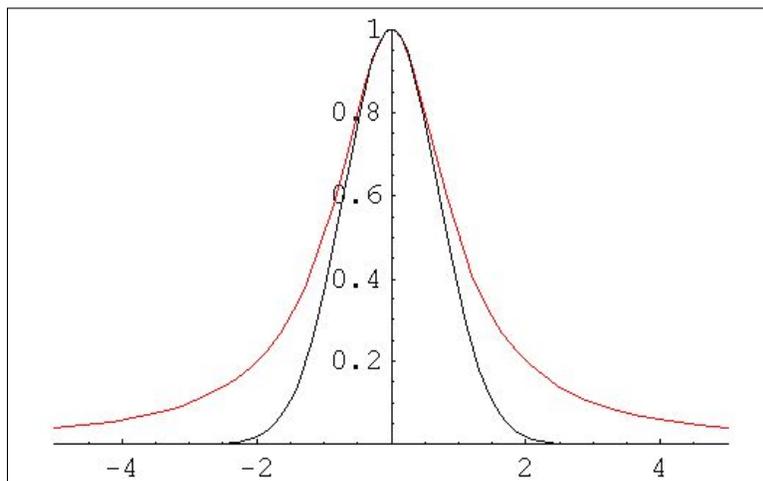


FIGURA 3. In rosso  $1/(1+x^2)$ , in nero, sotto,  $e^{-x^2}$

- quindi

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{x_k} \sin(x) dx = 0$$

L'errore consiste nel fatto che occorre, per parlare di integrale improprio, poter riconoscere che

$$\text{qualsiasi successione } x_k \rightarrow +\infty$$

si prenda esista il limite degli integrali

$$\int_0^{x_k} \sin(x) dx$$

e tale limite sia sempre lo stesso, cioè non cambi cambiando successione. Nel caso precedente se si scegliesse invece  $x_k = (2k+1)\pi$  successione ancora divergente a  $+\infty$  si otterrebbero integrali

$$\int_0^{x_k} \sin(x) dx = 1$$

che porterebbero, con lo stesso diritto alla dichiarazione

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) dx = 1$$

I teoremi dimostrati garantiscono condizioni sufficienti a tale indipendenza del limite dalla successione scelta per eseguire i calcoli.



## Integrali impropri doppi o tripli

### 1. Integrali impropri doppi o tripli

La questione

$$\textit{integrazione impropria} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

si pone in due casi almeno:

- la funzione continua  $f(x, y)$  presenti un punto di singolarità appartenente alla chiusura di  $\Omega$ ,
- $\Omega$  sia illimitato.

**1.1. Primo caso.**  $\Omega$  sia limitato e la funzione diverga nel punto  $P_0 \in \overline{\Omega}$

DEFINIZIONE 1.1. Una successione  $\Delta_n$  di intorni aperti del punto  $P_0$  tale che:

- $P_0 \in \Delta_n$
- $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$
- per ogni successione infinitesima di numeri positivi  $\{\epsilon_n\}$  detto  $B(P_0, \epsilon_n)$  il cerchio di centro  $P_0$  e raggio  $\epsilon_n$   $\exists m_n$  tale che

$$\Delta_m \subseteq B(P_0, \epsilon_n), \quad \forall m \geq m_n$$

si dice convergente a  $P_0$ .

Se esiste il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega - \Delta_n} f(x, y) dx dy$$

e tale limite é indipendente dalla successione  $\{\Delta_n\}$  presa, viene (naturalmente) assunto come valore dell'integrale improprio

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

Una delle difficoltà presenti nella definizione precedente é l'indipendenza del limite dalla successione  $\{\Delta_n\}$  convergente a  $P_0$ : per rispondere a tale richiesta di indipendenza bisognerebbe controllare tutte le diverse possibili successioni  $\{\Delta_n\}$ ....

... cosa da non finire mai !

Il seguente Lemma dà invece una condizione sufficiente estremamente importante:

LEMMA 1.2. *Sia  $f(x, y)$  continua in  $\Omega - P_0$  sia  $\{\Delta_n\}$  una successione convergente a  $P_0$ : se esiste finito il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega - \Delta_n} |f(x, y)| dx dy$$

*allora*

- *esiste, finito il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega - \Delta_n^*} |f(x, y)| dx dy$  relativo a qualunque altra successione  $\{\Delta_n^*\}$  convergente a  $P_0$  ed ha lo stesso valore*
- *esiste finito, e indipendente dalla successione convergente a  $P_0$ , il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega - \Delta_n} f(x, y) dx dy$*

Dimostrazione omessa, anche se non particolarmente difficile.

TEOREMA 1.3 (Una condizione sufficiente). *Sia  $f(x, y)$  continua in  $\Omega - P_0$  e riesca*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{r^\alpha}, \quad \alpha < 2$$

*avendo indicato con  $r$  la distanza del punto  $(x, y)$  da  $P_0$ .*

*Esiste allora il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega - C_n} |f(x, y)| dx dy$$

*essendo  $C_n$  la successione di cerchi di centro  $P_0$  e raggi  $1/n$ , successione convergente a  $P_0$ .*

*Allora (tenuto conto del precedente Lemma) esiste l'integrale improprio*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

OSSERVAZIONE 1.4. *Si noti la somiglianza della condizione sufficiente del precedente teorema con quanto osservato nel caso unidimensionale: l'integrale improprio esiste anche in presenza di un punto di singolarità con divergenza della funzione purché l'ordine di infinito che la funzione presenta in tale punto non sia troppo alto:*

- *basta che sia  $\alpha < 1$  per gli integrali unidimensionali, quelli sulla retta,*
- *basta che sia  $\alpha < 2$  per gli integrali doppi, quelli sul piano*
- *é immaginabile che sia  $\alpha < 3$  per gli integrali tripli, quelli estesi a regioni dello spazio.*

**1.2. Qual'è il segreto.** Come mai in una dimensione sono integrabili le funzioni che presentano una divergenza in un punto con ordine minore di 1, in due dimensioni con ordine minore di 2, in tre dimensioni con ordine minore di 3 ?

Ricorrete per il calcolo dell'integrale doppio o triplo alle coordinate polari e sferiche, cfr. pagine 50 e 52, di centro il punto  $P_0$  in cui la funzione diverge:

- nel caso dell'integrazione doppia  $\int d\theta \int f(x, y) \rho d\rho$
- nel caso dell'integrazione tripla  $\int \sin(\varphi) d\varphi \int d\theta \int f(x, y, z) \rho^2 d\rho$

Sono quei due fattori  $\rho$  e  $\rho^2$  che compensano il grado di infinito di  $f(x, y)$  o di  $f(x, y, z)$  e consentono in dimensione 2 una divergenza della funzione di ordine  $< 2$  e in dimensione 3 una divergenza di ordine  $< 3$ .

**1.3. Qualche esempio.** La funzione  $f(x) = 1/|x|$  diverge avvicinandosi all'origine, ordine di infinito 1: l'area del suo sottografico

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} dx = \infty$$

è infinita.

La funzione  $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$  è analoga alla funzione precedente: diverge avvicinandosi all'origine e l'ordine di infinito è 1.

Il volume del suo sottografico

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho} \rho d\rho = 2\pi$$

è finito.

La funzione  $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$  diverge avvicinandosi all'origine con ordine di infinito 2.

Il volume del sottografico

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho = \infty$$

è infinito.

La funzione  $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$  diverge avvicinandosi all'origine con ordine di infinito 2.

La massa determinata da tale densità

$$\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} \rho^2 d\rho = 4\pi$$

è finita.

## 2. Regioni d'integrazione illimitate

Sia  $f(x, y)$  continua in  $\Omega$  illimitato.

DEFINIZIONE 2.1. *Una successione  $M_n$  tale che*

- $M_n \subseteq B_n$  essendo  $B_n$  il cerchio di centro l'origine e raggio  $n$ ,
- $M_n \subseteq M_{n+1}$
- $\forall P \in \Omega \quad \exists n_P \Rightarrow P \in M_{n_P}$

*si dice invadere  $\Omega$ .*

Si dice che esiste l'integrale improprio

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

se esiste finito e indipendente dalla successione  $\{M_n\}$  il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} f(x, y) dx dy$$

Valgono due teoremi analoghi a quelli precedenti

TEOREMA 2.2. *Se esiste finito il*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} |f(x, y)| dx dy$$

*allora esistono finiti e sono indipendenti dalla successione  $\{M_n\}$  tutti i limiti integrali*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} f(x, y) dx dy$$

TEOREMA 2.3. *Sia  $f(x, y)$  continua e soddisfi la disuguaglianza*

$$(17) \quad |f(x, y)| \leq \frac{M}{r^\alpha}, \quad \alpha > 2$$

*allora esiste finito il*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} |f(x, y)| dx dy$$

É evidente che la condizione (17) é una condizione sufficiente d'esistenza dell'integrale improprio.

**3. Esempi di integrali doppi**

ESEMPIO 3.1.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dx dy$$

*Coordinate polari:*

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho = 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho$$

*L'ordine di smorzamento é*

$$2\alpha - 1$$

*L'integrale é finito se  $2\alpha - 1 > 1$ :  $\alpha > 1$*



## Integrali impropri dipendenti da parametri

### 1. Il caso in dimensione 1

#### 2. Integrali impropri come funzioni di un parametro

Si conserva (o meno ?) negli integrali impropri <sup>1</sup> il seguente

TEOREMA 2.1. *Sia  $f(x, y)$  continua per  $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ , la funzione*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

*é continua per  $x \in [a, b]$*

In altri termini quando un integrale improprio dipendente da un parametro si comporta come funzione continua di tale parametro ?

ESEMPIO 2.2. *Si consideri il seguente integrale improprio*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2 y} dy$$

*integrale improprio esistente certamente per  $x = 0$  e, in base alla ben nota rapida decrescenza dell'esponenziale, anche per ogni  $x \neq 0$ .*

*É evidente che  $F(0) = 0$ , mentre cambiando variabile  $t = x^2 y$  riesce per ogni  $x \neq 0$ ,*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

*Quindi la funzione continua  $x^2 e^{-x^2 y}$  integrata rispetto ad  $y$  su  $\mathbb{R}_+$  produce come risultato una funzione  $F(x)$  discontinua nell'origine.*

L'esempio precedente mette in serio dubbio la validità generale del Teorema (2.1) nel caso di integrali impropri.

### 3. Convergenza uniforme di un integrale improprio

Gli integrali impropri

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

---

<sup>1</sup>Vol. II, §4.12, pag. 462

sono definiti come limiti di integrali estesi ad intervalli limitati.

Essi si calcolano (teoricamente é ovvio...) a meno di  $\epsilon$  con integrali su intervalli limitati  $[0, B_\epsilon]$  :

$$\left| \int_0^\infty f(x, y)dy - \int_0^{B_\epsilon} f(x, y)dy \right| \leq \epsilon$$

- Naturalmente nel caso che la funzione integranda dipenda dal parametro  $x$  anche l'intervallo  $[0, B_{\epsilon, x}]$  dipenderá da  $x$  : potrebbe capitare, ad esempio, che piú  $x$  si avvicina ad un certo  $x_0$  piú gli intervalli corrispondenti  $[0, B_{\epsilon, x}]$  debbano essere presi ampi.
- Oppure (ipotesi ottimistica) potrebbe capitare che uno stesso intervallo  $[0, B_\epsilon]$  sia adatto per approssimare a meno di  $\epsilon$  l'integrale improprio  $\int_0^\infty f(x, y)dy$  qualunque sia il valore del parametro  $x$ .
- In altri termini indicate con

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy$$

$$F_B(x) = \int_0^B f(x, y)dy$$

riesce:

- le funzioni  $F_B(x)$  sono continue
- $F(x) = \lim_{B \rightarrow +\infty} F_B(x)$
- $F(x)$  come limite di funzioni continue sará...?
- se la convergenza delle  $F_B(x)$  alla  $F(x)$  fosse uniforme<sup>2</sup>.... allora certamente  $F(x)$  sarebbe continua.

**DEFINIZIONE 3.1** (La convergenza uniforme). *Si dice che gli integrali impropri*

$$(18) \quad \int_0^\infty f(x, y)dy$$

*sono uniformemente convergenti se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste uno stesso  $B_\epsilon$  tale che*

$$\left| \int_{B_\epsilon}^\infty f(x, y)dy \right| < \epsilon, \quad \forall x$$

<sup>2</sup>cfr. Il Teorema di continuitá del limite, pagina 137

#### 4. Continuitá rispetto a un parametro

TEOREMA 4.1 (Una condizione sufficiente). *L'integrale (18) é uniformemente convergente se vale la maggiorazione*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{1 + y^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

con  $M$  indipendente da  $x$ .

DIMOSTRAZIONE. Evidente. □

TEOREMA 4.2 (La convergenza dominata). *L'integrale improprio (18) é uniformemente convergente se*

$$|f(x, y)| \leq \varphi(y)$$

essendo  $\varphi(y)$  una funzione positiva dotata di integrale improprio limitato su  $[0, +\infty]$ .

DIMOSTRAZIONE. Questo stesso risultato sufficiente era stato incontrato, in precedenza, eseguendo la maggiorazione con una funzione

$$\frac{M}{|y|^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

In realtà non serve che la maggiorazione sia fatta da tali funzioni, quello che serve é che la maggiorazione sia fatta da una funzione che abbia integrale improprio finito. □

L'ipotesi del precedente Teorema 4.2 si chiama

#### CONVERGENZA DOMINATA

ricordando con tale termine che le tante diverse funzioni di  $y$

$$f(x_0, y)$$

relative ai tanti diversi possibili  $x_0$  sono tutte maggiorate in modulo - DOMINATE - da una stessa funzione di  $y$ , la  $\varphi(y)$ , che può essere il piú delle volte la stessa

$$\frac{M}{1 + y^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

dotata di integrale improprio su  $[0, \infty]$ .

TEOREMA 4.3. *Sia  $f(x, y)$  continua e l'integrale improprio*

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$$

*sia uniformemente convergente, allora  $F(x)$  é continua.*

DIMOSTRAZIONE.

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \left| \int_0^{B_\epsilon} f(x_1, y) dy - \int_0^{B_\epsilon} f(x_2, y) dy \right| + 2\epsilon$$

Il risultato segue ricordando che i due integrali a secondo membro non sono piú impropri e quindi per essi vale il teorema (2.1).  $\square$

TEOREMA 4.4 (Sintesi dei due precedenti). *La funzione continua  $f(x, y)$  verifichi la disuguaglianza*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{1 + y^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

*allora l'integrale improprio  $F(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$  é funzione continua di  $x$ .*

ESEMPIO 4.5. *Consideriamo l'integrale improprio*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{1 + y^2} dy$$

- *L'integrale é convergente perché*

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\sin(xy)}{1 + y^2} \right| \leq \frac{1}{1 + y^2}$$

- 

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1 + y^2}$$

*convergenza dominata quindi convergenza uniforme*

- *la continuitá di  $F(x)$  segue dal precedente Teorema (4.4).*

## 5. Integrali impropri su un intervallo limitato

Analoghi risultati si hanno in riferimento agli integrali impropri di una funzione  $f(x, y)$  divergente quando  $y$  tende ad uno degli estremi.

Sussiste il seguente

TEOREMA 5.1. *Sia  $f(x, y)$  continua per  $(x, y) \in [a, b] \times [c, d)$  e inoltre riesca*

$$|f(x, y)| \leq M \left( \frac{1}{|y - d|^\alpha} + \frac{1}{|y - c|^\alpha} \right), \quad \alpha < 1$$

*allora l'integrale improprio converge uniformemente e quindi*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

*é funzione continua di  $x$ .*

## 6. Integrazione rispetto a un parametro

TEOREMA 6.1. *L'integrale improprio*

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy$$

*converga uniformemente  $\forall x \in [a, b]$  allora*

$$\int_a^b F(x) dx = \int_0^{\infty} dy \int_a^b f(x, y) dx$$

OSSERVAZIONE 6.2. *Il precedente Teorema 6.1 fornisce di fatto una condizione sufficiente affinché*

$$\int_a^b dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} dy \int_a^b f(x, y) dx$$

*cioè fornisce una condizione di permutabilità di due integrazioni delle quali una impropria.*

**6.1. Un contreesempio.** [cfr. Esempio 4. di Vol.II pag. 473]

- (1) Sia  $f(x, y) = (2 - xy)e^{-xy}$  per  $x \in [0, 1]$  e per  $y > 0$
- (2) Esiste l'integrale improprio  $\int_0^{\infty} f(x, y) dy$
- (3) Tenuto conto che  $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy})$  si riconosce che  $\int_0^{\infty} f(x, y) dy = 0$
- (4) Allora  $\int_0^1 dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 0$
- (5) Tenuto conto che  $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy})$  si riconosce che  $\int_0^1 f(x, y) dx = ye^{-y}$
- (6) Allora  $\int_0^{\infty} dy \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^{\infty} ye^{-y} dy = 1$
- (7) Risulta, confrontando il punto 3 e il punto 6 che  $\int_0^1 dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy \neq \int_0^{\infty} dy \int_0^1 f(x, y) dx$

## 7. Derivazione rispetto a un parametro

TEOREMA 7.1. *La funzione  $f(x, y)$  abbia la derivata parziale  $f_x$  e i due integrali impropri*

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dy, \quad \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy$$

*converghino entrambi uniformemente, allora*

$$F'(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con

$$G(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy$$

In base al precedente teorema (6.1) riesce

$$\int_a^{\xi} G(x) dx = \int_0^{\infty} dy \int_a^{\xi} f_x(x, y) dx = F(\xi) - F(a)$$

da cui

$$F(\xi) = F(a) + \int_a^{\xi} G(x) dx \quad \Rightarrow \quad F'(\xi) = G(\xi) = \int_0^{\infty} f_x(\xi, y) dy$$

□

### 8. Condizioni di sicurezza

TEOREMA 8.1 (Criterio sufficiente).  $f(x, y)$  sia

- continua in  $(x, y)$
- sia derivabile rispetto ad  $x$  con  $f_x(x, y)$  continua
- sia  $|f(x, y)|$  che  $|f_x(x, y)|$  siano dominate, cioè siano maggiorate da  $\frac{M}{1+y^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$

allora

- esiste l'integrale improprio  $F(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy$
- $F(x)$  é continua e derivabile.
- $F'(x) = \int_0^{\infty} f_x(x, y) dy$

**Parte 3**

**Campi vettoriali**



## CAPITOLO 8

### Integrali curvilinei

#### 1. Integrali curvilinei

Ci occupiamo per la terza volta di

*integrali*

Se ne é parlato

- una prima volta per definire gli integrali  $\int_a^b f(x)dx$ ,
- una seconda per definire gli integrali doppi o tripli,
- una terza, fra poco, per definire integrali estesi a curve.

Cosa hanno in comune tali definizioni ?

Si tratta sempre di algoritmi che producono un risultato numerico e che usano:

- una funzione, la funzione integranda  $f$ ,
- un insieme, il dominio di integrazione  $[a, b]$ ,  $D$ ,
- decomposizioni di tale dominio di integrazione,
- misura (lunghezza) delle porzioni in cui il dominio é stato suddiviso.

Si tratta, in tutti gli integrali, sia i primi due che il terzo che stiamo definendo, di somme di

*prodotti di valori della funzione integranda per le misure delle porzioni in cui é stato suddiviso il dominio di integrazione :*

intervallini della retta o rettangoli del piano nei primi due casi, lunghezze di archetti curvilinei nel terzo che vedremo...

Si tratta di somme di tali addendi e, principalmente del limite che tali somme risultano possedere al tendere a zero delle dimensioni delle porzioni della suddivisione.

Sia  $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq R^3$  una curva regolare di estremi  $A$  e  $B$  e sia  $f(x, y, z)$  una funzione definita in  $\Omega$  : decomposta  $\Gamma$  in archetti

$$\widehat{AP_1}, \widehat{P_1P_2}, \dots, \widehat{P_{n-2}P_{n-1}}, \widehat{P_nB}$$

consideriamo le somme

$$\sum_{k=1}^n f(Q_k) \ell(P_{k-1}P_k)$$

essendo  $Q_k \in \widehat{P_{k-1}P_k}$

Cosa si può prevedere dei loro valori ?

Se, ad esempio, fosse  $f(x, y, z) \equiv 1$  allora tutte le somme considerate coinciderebbero con la lunghezza  $\ell(\Gamma)$ , analogamente se fosse  $f(x, y, z) = 17$  tutte le somme coinciderebbero con la stessa lunghezza moltiplicata per 17.

Se ancora sapessimo che

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

potremmo riconoscere che tutte le somme appartengono all'intervallo

$$[m \ell(\Gamma), \quad M \ell(\Gamma)]$$

## 2. Integrale curvilineo di una funzione

- Sia  $\Gamma \subseteq \Omega$  una curva regolare di  $\mathbb{R}^3$  o di  $R^2$ , e sia

$$\varphi(t) : \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}, \quad t \in [a, b]$$

una rappresentazione parametrica iniettiva di  $\Gamma$ ,

- sia  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione, definita in  $\Omega$

Per ogni partizione dell'intervallo  $I$  in  $n$  sottointervalli

$$[t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n$$

poniamo  $P_i = \varphi(t_i)$  : i punti  $P_i$  dividono  $\Gamma$  in  $n$  archi

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n.$$

Consideriamo le somme

$$(19) \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \ell(\Gamma_i)$$

costruite prendendo i punti  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  negli archi  $\Gamma_i$ .

**TEOREMA 2.1.** *Sia  $\Gamma$  una curva regolare e sia  $f$  lipschitziana in  $\Omega$  allora esiste il limite*

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sigma_n$$

essendo  $\delta_n$  il massimo della lunghezza degli intervallini  $[t_{i-1}, t_i]$  della decomposizione.

Dimostrazione omessa.

Si osservi che la richiesta  $\delta_n \rightarrow 0$  corrisponde a scegliere decomposizioni di  $[a, b]$  sempre piú sottili, ad esempio, dividendo in un sempre maggior numero di parti uguali.

Il limite di tali somme (19), garantito dal precedente Teorema 2.1 prende il nome di

$$\int_{\Gamma} f ds$$

integrale curvilineo della funzione  $f$  esteso alla curva  $\Gamma$ .

### 2.1. L'algoritmo di calcolo:

TEOREMA 2.2. Sia  $\Gamma \subseteq \Omega$  una curva regolare dello spazio, di equazioni parametriche

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t) \quad t \in I$$

e sia  $f(x, y, z)$  lipschitziana in  $\Omega$ : riesce

$$(20) \quad \int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

ovvero

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)} dt$$

Dimostrazione omessa.

### 2.2. Primi esempi:

ESEMPIO 2.3. L'integrale curvilineo della funzione  $f \equiv 1$  esteso a  $\Gamma$  rappresenta la lunghezza di  $\Gamma$ .

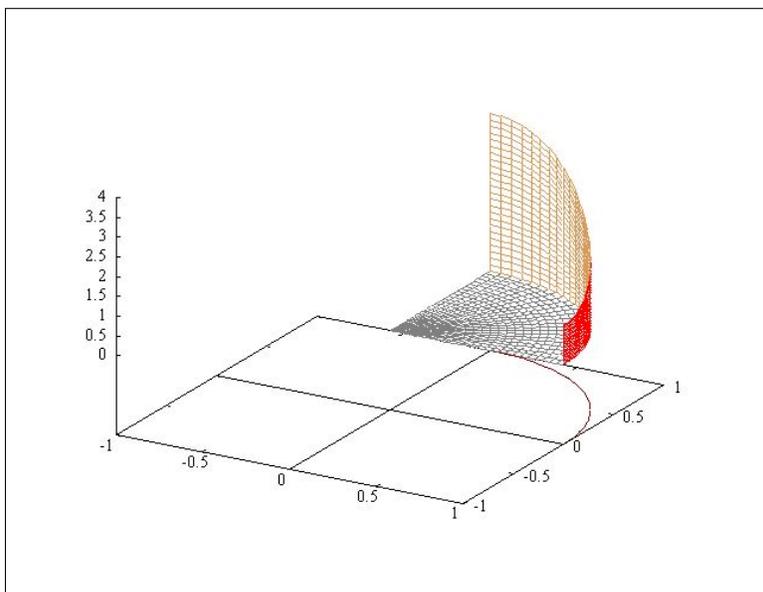
L'integrale curvilineo della funzione  $f \equiv k$  esteso a  $\Gamma$  rappresenta invece la lunghezza di  $\Gamma$  moltiplicata per  $k$ .

ESEMPIO 2.4. Sia  $\Gamma$  l'arco di circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , curva regolare rappresentata parametricamente come

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

e sia  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Riesce

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)) \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)) dt = \frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

FIGURA 1.  $x^2 + 4y^2$  lungo  $\Gamma$ 

Il valore  $5\pi/4$  trovato per l'integrale curvilineo rappresenta l'area del muro disegnato in Figura 1 sul tracciato di  $\Gamma$  e di altezza data in ogni punto  $(x, y) \in \Gamma$  dal valore  $x^2 + 4y^2$  della funzione integranda.

ESEMPIO 2.5. Se  $\Gamma$  è un filo materiale di densità lineare di massa  $\delta(x, y, z)$ , l'integrale

$$\int_{\Gamma} \delta(x, y, z) ds$$

rappresenta la *massa* del filo.

### 3. Proprietá degli integrali curvilinei

$f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  siano funzioni lipschitziane,  $\Gamma \subset S$ , allora

- LINEARITÁ

$$\int_{\Gamma} (af + bg) ds = a \int_{\Gamma} f ds + b \int_{\Gamma} g ds \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

- MONOTONIA

se  $f \leq g$  su  $\Gamma$  allora  $\int_{\Gamma} f ds \leq \int_{\Gamma} g ds$ ;

- MAGGIORAZIONE DEL MODULO

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f| ds \leq \max_{\Gamma} |f| \ell(\Gamma).$$

ESEMPIO 3.1. Calcolare

$$\int_{\Gamma} y \sin z ds$$

dove  $\Gamma$  è l'elica circolare di equazioni

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, \pi].$$

$$\int_0^{\pi} \sin(t) \sin(t) \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

#### 4. Baricentro di una curva $\Gamma$

Data una curva regolare  $\Gamma$ , si definisce il baricentro della curva  $\Gamma$  il punto  $(x_B, y_B, z_B)$  così definito

$$x_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} x ds; \quad y_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} y ds; \quad z_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} z ds.$$

ESEMPIO 4.1. Calcolare le coordinate del baricentro della curva del piano di equazioni

$$x = \cos^3(t), \quad y = \sin^3(t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Vedi figura 2.

ESEMPIO 4.2. Calcolare le coordinate del baricentro della curva dello spazio di equazioni

$$x = 1 + t, \quad y = 4t, \quad z = 3t, \quad t \in [0, 1].$$

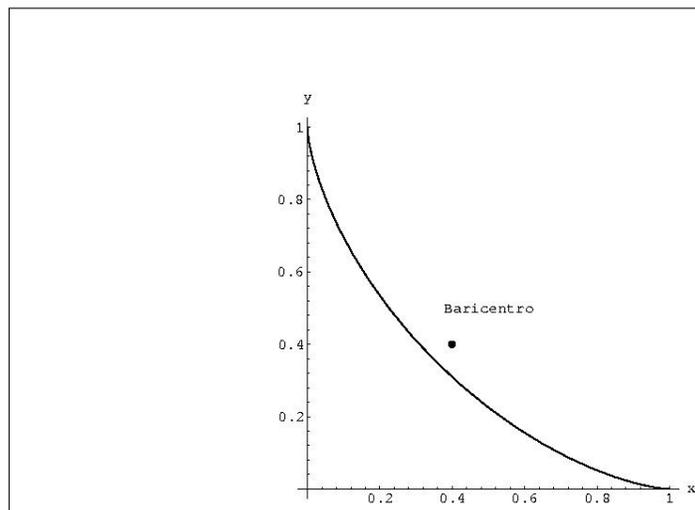


FIGURA 2.  $x = \cos^3(t)$ ,  $y = \sin^3(t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

## CAPITOLO 9

# Campi vettoriali

### 1. Introduzione

*Anything that assigns a magnitude and direction at each point gives a vector field.*

*Examples include the electromagnetic field and the velocity field of a fluid.*

*Any ordinary differential equation can be used to define a vector field.*

*These vector fields can be visualized by drawing arrows representing the vectors.*

*The direction of the arrow is equal to the direction of the vector field at its base point.*

*The magnitude of the arrow is proportional to the magnitude of the vector field.*

(Help di Mathematica)

**DEFINIZIONE 1.1.** *Dato un insieme  $S \subset \mathbb{R}^3$ , un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  su  $S$  è una legge che associa ad ogni punto di  $S$  un vettore  $\mathbf{F}(x, y, z)$  di componenti  $(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ .*

*In altri termini un campo vettoriale  $F$  è una funzione*

$$F : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

**ESEMPIO 1.2.** *Il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y, z) = \{0, 0, z\}$  è definito in tutto lo spazio e associa ad ogni punto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  il vettore verticale*

$$\{0, 0, z\}$$

**OSSERVAZIONE 1.3.** *Se  $F_3(x, y, z) \equiv 0$  e le funzioni  $F_1$  e  $F_2$  sono indipendenti da  $z$ , allora  $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  è un campo vettoriale del piano.*

**1.1. Il metodo delle freccette.** Un modo di rappresentare un campo vettoriale é quello di rappresentare i vettori  $\vec{F}(x, y, z)$  in corrispondenza di una griglia di punti  $(x_k, y_k, z_k)$  dello spazio, rappresentazione fatta naturalmente disegnando a partire da ciascuno dei punti  $(x_k, y_k, z_k)$  la freccetta  $\vec{F}(x_k, y_k, z_k)$  che rappresenta il vettore. Alcuni vettori del campo vettoriale piano  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$  sono rappresentati in figura 1.

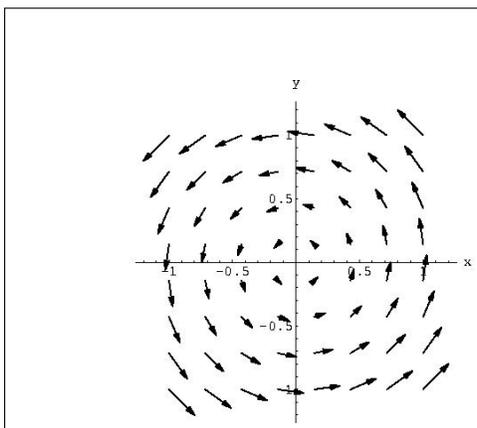


FIGURA 1. Campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ .

Oltre al verso si noti che le freccette in Figura hanno anche lunghezze variabili da punto a punto: la loro lunghezza infatti rappresenta il modulo  $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{y^2 + x^2}$ .

**ESEMPIO 1.4.** *La forza che una massa  $M$  posta nel punto  $(0, 0, 0)$  esercita su una seconda massa  $m$  che si trova nella posizione  $(x, y, z)$  è rappresentata da*

$$\vec{F}(x, y, z) = GMm \left\{ -\frac{1}{r^3}x, -\frac{1}{r^3}y, -\frac{1}{r^3}z \right\},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

*La costante  $G$  è una costante che non dipende né da  $m$  e  $M$  né dalla loro posizione.*

*Il campo gravitazionale  $\vec{F}(x, y, z)$  è diretto verso l'origine e il suo modulo  $|\vec{F}|$  è  $\frac{GMm}{r^2}$ .*

**ESEMPIO 1.5.** *Il campo elettrico.* La forza elettrica  $\vec{F}(x, y, z)$  esercitata da una carica elettrica  $Q$  posta nell'origine  $(0, 0, 0)$  su una carica

$q$  posta nel punto  $P = (x, y, z)$  è data da

$$\vec{F}(x, y, z) = \left\{ \frac{\varepsilon Q q}{r^3} x, \frac{\varepsilon Q q}{r^3} y, \frac{\varepsilon Q q}{r^3} z \right\}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dove  $\varepsilon$  è una costante che dipende dall'unità di misura utilizzata.

## 2. Il campo del gradiente

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f \in C^1$ ,

$$\nabla f(x, y, z) = \{f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\}$$

è un campo vettoriale detto *campo del gradiente* di  $f$ .

Se  $f = f(x, y)$  è una funzione di due variabili, allora  $\nabla f(x, y)$  è un campo vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .

ESEMPIO 2.1. Il campo del gradiente di  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  è  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$  (vedi figura 2).

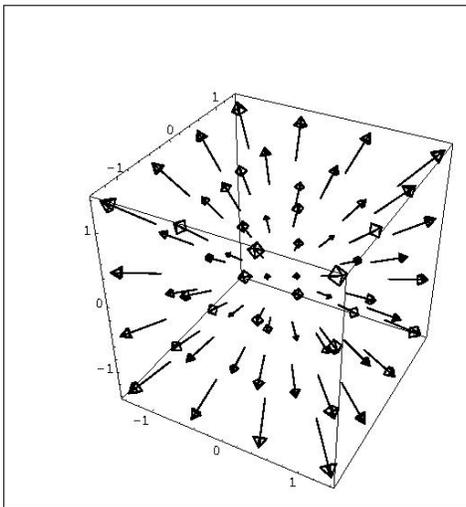


FIGURA 2. Il campo del gradiente di  $x^2 + y^2 + z^2$

**2.1. Un fenomeno di ortogonalità.** I vettori  $\nabla f(x, y)$  sono perpendicolari alle linee di livello  $f(x, y) = k$ .

Infatti, sia  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$  una rappresentazione parametrica della curva di livello  $\Gamma : f(x, y) = k$ . Si ha, quindi,

$$(21) \quad f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = k, \quad \forall t \in I.$$

Derivando la (21) rispetto a  $t$  secondo la regola di derivazione delle funzioni composte si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x} \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_2'(t) = 0$$

ovvero

$$\vec{\nabla} f(\varphi(t)) \cdot \overrightarrow{\varphi'(t)} = 0$$

cioè  $\nabla f(x, y)$  è perpendicolare al vettore tangente a  $\Gamma$  nel punto  $P = (x, y)$ .

ESEMPIO 2.2. Il campo del gradiente di  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  è

$$\vec{F}(x, y) = (2x, 6y)$$

In figura 3 sono rappresentate le linee di livello di  $f$  e alcuni vettori del campo  $\vec{F}$ .

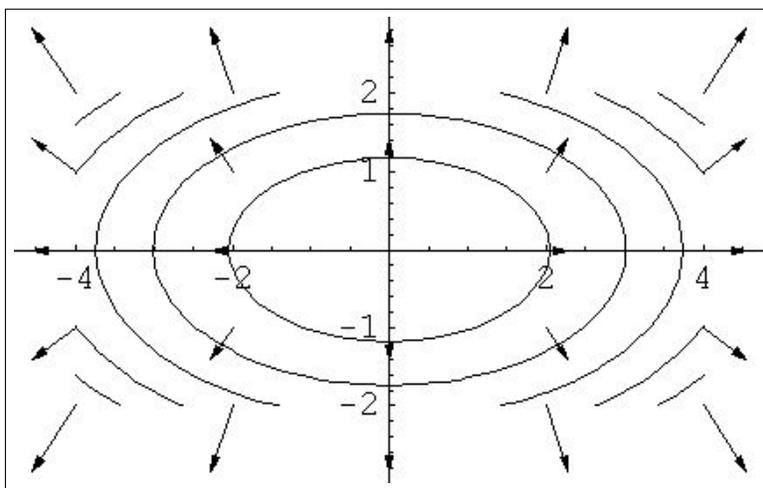


FIGURA 3. Linee di livello e gradiente di  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ .

### 3. Integrali curvilinei di campi vettoriali

Assegnati:

- un campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\},$$

- una curva  $\Gamma$ , di rappresentazione parametrica

$$\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}, \quad t \in [a, b]$$

- il versore tangente

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \{\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\} \quad t \in [a, b]$$

alla  $\Gamma$ , versore che pertanto definisce uno dei due orientamenti possibili di  $\Gamma$ ,

si può considerare l'integrale curvilineo

$$(22) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

il cui valore rappresenta il

*lavoro  $W$  del campo  $F$  lungo  $\Gamma$ .*

**3.1. Algoritmo di calcolo.** Tenuta presente la definizione di integrale curvilineo lungo una curva di rappresentazione parametrica  $\varphi(t)$ ,

$$ds = |\varphi'(t)| \, dt = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)} \, dt$$

si ha

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) |\varphi'(t)| \, dt$$

Tenuto conto che il versore tangente é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

riesce

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} |\varphi'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

Scrivendo esplicitamente il prodotto scalare, si ottiene quindi per il lavoro l'espressione seguente

$$W = \int_a^b (F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\varphi(t))\varphi_2'(t) + F_3(\varphi(t))\varphi_3'(t)) \, dt.$$

Il caso di una curva piana, contenuta ad esempio nel piano  $z = 0$ , può essere considerato come un caso particolare in cui  $F_3 = 0$  e  $F_1$  e  $F_2$  dipendono solo da  $x$  e  $y$ : la formula di calcolo si riduce pertanto a

$$W = \int_a^b (F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\varphi(t))\varphi_2'(t)) \, dt.$$

OSSERVAZIONE 3.1. Se  $\Gamma$  è una curva chiusa, l'integrale (22) è anche detto circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo  $\Gamma$  e si indica con il simbolo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

ESEMPIO 3.2. Sia  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  e sia  $\Gamma$  il segmento dall'origine al punto  $(1, 2, 3)$ . Una rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  è

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 3t, \quad t \in [0, 1]$$

$\varphi'(t) = \{1, 2, 3\}$ , pertanto il lavoro

$$W = \int_0^1 (\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) + 3\varphi_3(t)) dt = 14 \int_0^1 t dt = 7.$$

ESEMPIO 3.3. Sia  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 3x)$  e sia  $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ . Si ha

$$W = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 3 \cos^2 t) dt = 4\pi.$$

**3.2. Alcune maggiorazioni importanti.** Il valore di un integrale curvilineo si maggiora al modo seguente

$$\left| \int_C f(x, y, z) ds \right| \leq M_{|f|, C} \text{lung}(C)$$

avendo indicato con  $M_{|f|, C}$  il massimo del modulo di  $f$  sui punti della curva  $C$ .

Analogamente il modulo del lavoro di un campo vettoriale  $F$  lungo una curva  $C$  si maggiora al modo seguente

$$\left| \int_C F \times T ds \right| \leq M_{|F|, C} \text{lung}(C)$$

avendo tenuto conto che

$$|F \times T| \leq |F||T| = |F|$$

e avendo indicato con  $M_{|F|,C}$  il massimo del modulo di  $F$  sulla curva  $C$ .

**ESEMPIO 3.4.** Sia  $F = \{y, x\}$  ed  $S$  il segmento da  $(1, 1)$  a  $(4, 5)$ : il lavoro

$$\int_S F \times T ds = \int_0^1 \{(1+4t)3 + (1+3t)4\} dt = 19$$

Riesce, sicuramente,

$$\left| \int_S F \times T ds \right| \leq \sqrt{41} \ell(S) = 5 \cdot \sqrt{41} \simeq 32.01$$

avendo tenuto conto che  $\ell(S) = 5$  e che il punto in cui il modulo  $|F| = \sqrt{y^2 + x^2}$  è maggiore è sicuramente l'estremo  $(4, 5)$  che è il punto del segmento più lontano dall'origine, punto in cui  $|F| = \sqrt{41}$ .

**3.3. Il lavoro lungo poligoni coordinate.** Il lavoro lungo una curva  $C$  costituita da una poligonale coordinata  $\Pi$ , cioè formata da un numero finito di segmenti consecutivi paralleli agli assi,

$$\int_{\Pi} \vec{F} \times \vec{T} ds$$

si calcola agevolmente:

- si tiene conto che si dovrà calcolare la somma dei lavori lungo ciascun segmento della poligonale,
- essendo tali segmenti paralleli a uno degli assi il prodotto scalare  $F \times T$  su ciascuno di essi si riduce alla sola componente  $F_1$  o alla sola  $F_2$  o alla sola  $F_3$
- il  $ds$  su ciascun segmento si riduce, di fatto, a  $dx$  oppure a  $dy$  oppure a  $dz$

**3.4. La notazione delle forme differenziali.** Il lavoro del campo  $F = \{F_1, F_2, F_3\}$  lungo la curva  $\Gamma$  si calcola, servendosi di una rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  sull'intervallo  $[a, b]$  con

$$\int_{\Gamma} F \cdot T ds = \int_a^b [F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)] dt$$

L'espressione a secondo membro si rappresenta spesso con la grafia alternativa seguente

$$\int_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

avendo espresso i termini

$$x'(t) dt, y'(t) dt, z'(t) dt,$$

che vi compaiono con le analoghe, ragionevoli espressioni

$$dx, dy, dz$$

L'ortografia proposta prende il nome di *notazione delle forme differenziali* e suggerisce modalità di conto particolarmente semplici.

**ESEMPIO 3.5.** *Calcoliamo il lavoro del campo  $F = \{F_1, F_2, F_3\}$  lungo la poligonale coordinata*

$$\Pi : (0, 0, 0) - (1, 0, 0) - (1, 2, 0) - (1, 2, 3)$$

*Si tratta avendo tenuto conto dell'espressione del versore  $T$  su ciascuno dei tre segmenti di*

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} F \cdot T ds &= \int_{(0,0,0) (1,0,0)} F_1(x, 0, 0) ds + \\ + & \int_{(1,0,0) (1,2,0)} F_2(1, y, 0) ds + \int_{(1,2,0) (1,2,3)} F_3(1, 2, z) ds \end{aligned}$$

*Esaminiamo i tre segmenti:*

- *sul primo varia solo la  $x \in [0, 1], y = 0, z = 0$*
- *sul secondo,  $x = 1, y \in [0, 2], z = 0$*
- *sul terzo,  $x = 1, y = 2, z \in [0, 3]$*

*La notazione delle forme differenziali sintetizza l'espressione precedente in*

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} F \cdot T ds &= \int_{\Pi} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \\ &= \int_0^1 F_1(x, 0, 0) dx + \int_0^2 F_2(1, y, 0) dy + \int_0^3 F_3(1, 2, z) dz \end{aligned}$$

#### 4. Il lavoro dei campi gradiente

**TEOREMA 4.1** (Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei). *Siano*

- (1)  $\vec{F} = \vec{\nabla}U(x, y, z)$  *un campo gradiente definito su  $S$ , insieme aperto di  $\mathbb{R}^3$ ,*
- (2)  $\Gamma \subset S$  *una curva orientata, da  $A$  a  $B$ .*

*Allora*

$$(23) \quad W = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}U(x, y, z) \cdot \vec{T} ds = U(B) - U(A)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\varphi(t)$  la rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  si ha, tenuto conto della regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\nabla U(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} \varphi'_1(t) + \frac{\partial U}{\partial y} \varphi'_2(t) + \frac{\partial U}{\partial z} \varphi'_3(t) = \frac{d}{dt} U(\varphi(t))$$

Ne segue quindi

$$W = \int_{\Gamma} \vec{\nabla} U(x, y, z) \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\varphi(t)) dt = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a))$$

cioè la differenza di  $U$  tra i due estremi. □

PROPOSIZIONE 4.2. *Il precedente teorema (4.1) implica che il lavoro di un campo gradiente lungo una curva chiusa, estremi  $A$  e  $B$  coincidenti, è zero.*

DIMOSTRAZIONE. Risultato ovvio tenuto conto della (23) con  $A = B$ . □

PROPOSIZIONE 4.3. *Se esiste una curva chiusa  $\Gamma$  tale che il lavoro*

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \times \vec{T} ds \neq 0$$

*vuol dire che  $\vec{F}$  non è un campo gradiente ovvero che non è conservativo.*

DIMOSTRAZIONE. Si tratta semplicemente del risultato della proposizione precedente: se  $\vec{F}$  fosse un gradiente il lavoro lungo le curve chiuse dovrebbe essere nullo... □

PROPOSIZIONE 4.4. *Il precedente teorema (4.1) implica che il lavoro di un campo gradiente lungo una curva non dipende dalla curva stessa ma solo dai suoi estremi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  due curve entrambe da  $A$  a  $B$  allora, se  $F = \nabla U$  riesce

$$\int_{\Gamma_1} F \times T ds = U(B) - U(A), \quad \int_{\Gamma_2} F \times T ds = U(B) - U(A)$$

ovvero

$$\int_{\Gamma_1} F \times T ds = \int_{\Gamma_2} F \times T ds$$

□

La precedente proposizione contiene un suggerimento importante: nel calcolo del lavoro di un campo gradiente  $F = \nabla U$  lungo una curva  $\Gamma$  di estremi  $A$  e  $B$  si può

- se si conosce il potenziale  $U$  assumere come valore del lavoro direttamente la differenza  $U(B) - U(A)$
- se non si conosce il potenziale si può comunque sostituire la curva  $\Gamma$  da  $A$  a  $B$  con una qualsiasi altra ancora da  $A$  a  $B$  sulla quale l'integrazione richiesta sia piú facile.

....per esempio una poligonale coordinata !

ESEMPIO 4.5. Consideriamo il campo vettoriale  $F = \{y, x\}$  considerato nel precedente Esempio 3.4: si tratta evidentemente del campo gradiente della funzione  $U(x, y) = xy$ . Calcoliamo ora il lavoro sulla poligonale coordinata

$$\Pi : (1, 1) - (4, 1), (4, 1) - (4, 5)$$

Calcoliamo il lavoro servendoci delle naturali semplificazioni relative al caso delle poligonali coordinate,

$$\int_{\Pi} F \times T ds = \int_1^4 1 dx + \int_1^5 4 dy = 3 + 16 = 19$$

Il valore ottenuto é lo stesso di quello ottenuto precedentemente andando da  $(1, 1)$  a  $(4, 5)$  lungo il segmento diretto.

## Campi conservativi

Consideriamo in questo capitolo alcune condizioni sufficienti a riconoscere che un campo vettoriale sia

- un campo gradiente,
- ovvero conservativo,
- ovvero produca lavoro nullo lungo qualsiasi curva chiusa.

### 1. La condizione necessaria

La proprietà, Proposizione (4.2) dei campi gradiente di compiere lavoro nullo lungo le curve chiuse giustifica il nome dato loro di

*campi conservativi*

Se

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$$

la funzione  $U(x, y, z)$  si dice

*potenziale di  $\vec{F}$*

Ovviamente se  $U(x, y, z)$  é potenziale di  $F$  anche ogni altra funzione  $U(x, y, z) + k$  con  $k$  costante é potenziale di  $F$ : in altri termini esistono infiniti potenziali, come, nel caso unidimensionale, esistevano infinite primitive.

**ESEMPIO 1.1.** *Le funzioni  $U(x, y) = xy + k$  sono tutte potenziali del campo  $F = \{y, x\}$ .*

Non tutti i campi vettoriali sono campi gradiente, cioè non tutti i campi vettoriali sono conservativi.

Il motivo risiede nel seguente

**TEOREMA 1.2.** *Sia  $S$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale conservativo*

$$\vec{F}(x, y, z) = \{F_1, F_2, F_3\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

a componenti  $F_1, F_2, F_3 \in C^2(S)$ , allora si ha, necessariamente,

$$(1) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione (Teorema di Schwarz) risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

□

## 2. Il rotore

DEFINIZIONE 2.1. *Il rotore di un campo vettoriale*

$$\vec{F}(x, y, z) = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\}$$

é un nuovo campo vettoriale  $\text{rot } \vec{F}(x, y, z)$  definito simbolicamente dal determinante della seguente matrice

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A(x, y, z) & B(x, y, z) & C(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{rot } F = \{C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y\}$$

Le formule indicate includono anche il caso di campi vettoriali piani, basta in essi leggere  $C = 0$  e regolarsi di conseguenza.

DEFINIZIONE 2.2. *I campi vettoriali  $\mathbf{F}$  tali che  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  si dicono campi irrotazionali.*

OSSERVAZIONE 2.3. *Se  $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un campo vettoriale del piano, di classe  $C^1(S)$ , si ha*

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

Pertanto  $\mathbf{F}$  è irrotazionale su  $S$  se

$$(3) \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{in } S.$$

ESEMPIO 2.4. Il campo vettoriale  $\mathbf{F} = (x^2y, y)$  non è irrotazionale. Infatti si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \neq x^2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Inoltre, per il teorema 1.2,  $\mathbf{F}$  non può essere conservativo.

OSSERVAZIONE 2.5. Sia  $D\mathbf{F}$  la matrice jacobiana in  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = D\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

o, in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} = D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il campo vettoriale  $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è irrotazionale se la matrice jacobiana  $D\mathbf{F}$  è simmetrica cioè  $D\mathbf{F} = (D\mathbf{F})^t$ .

OSSERVAZIONE 2.6. Le condizioni (1) del precedente Teorema 1.2 equivalgono all'unica condizione vettoriale

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

ESEMPIO 2.7. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, 2 - z, z^2)$$

è conservativo.

Si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \neq 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

$\mathbf{F}$  non soddisfa le condizioni necessarie del Teorema 1.2, quindi non può essere conservativo.

### 2.1. Rotore... ruotare.

La parola rotore

$$\text{rot } \vec{F}$$

usata per definire il vettore (2) associato al campo vettoriale  $\vec{F}$  non é casuale. Un campo vettoriale che abbia rotore non nullo indica con

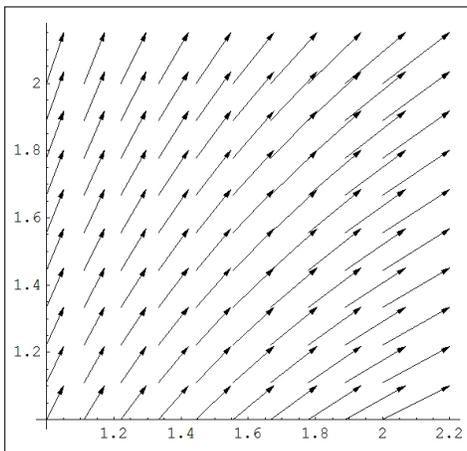


FIGURA 1. Le linee di flusso di  $F = \{x^2, 1 + y\}$  nel quadrato di estremi  $(1, 1)$   $(2, 2)$

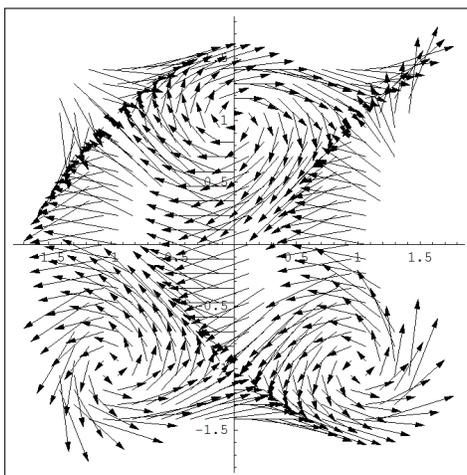


FIGURA 2. Le linee di flusso di  $G = \{-1 + y^2, \frac{3x(-1+x^2)}{1+x^2+y^2}\}$  nel quadrato di estremi  $(-2, -2)$ ,  $(2, 2)$ .

le sue linee di flusso, quelle indicate dalle freccette del campo, delle effettive rotazioni.

Nelle figure 1 e 2 sono disegnati i due campi vettoriali

$$F = \{x^2, 1 + y\}, \quad G = \{-1 + y^2, \frac{3x(-1 + x^2)}{1 + x^2 + y^2}\}$$

Il primo,  $F$  ha rotore nullo, il secondo  $G$  no.

Si riconosce nel disegno di  $G$  linee di flusso che ruotano più o meno intorno ai tre punti

$$A = \{1, -1\}, \quad B = \{-1, -1\}, \quad C = \{0, 1\}$$

Non solo ma, almeno guardando le frecce si riconosce il verso di rotazione: antiorario intorno a  $A$  e  $B$ , orario intorno a  $C$ .

Ebbene il rotore di  $G$  prende nei tre punti i seguenti valori

$$\text{rot}(G)(A) = \{0, 0, 4\} \quad \text{rot}(G)(B) = \{0, 0, 4\}$$

$$\text{rot}(G)(C) = \{0, 0, -7/2\}$$

sembra tener conto anche del verso di rotazione...

**2.2. La ricerca del potenziale.** Consideriamo il problema nel piano. Sia  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  per determinare, se esiste, un potenziale per  $\mathbf{F}$  si procede così.

- Si verifica se vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Se non è verificata si conclude che il campo  $\mathbf{F}$  non è conservativo cioè non ha potenziale.

- Se l'uguaglianza è verificata si cerca un potenziale  $U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2.$$

Integrando la prima delle due equazioni rispetto a  $x$  si trova  $U$ , determinato a meno di una costante di integrazione, costante rispetto a  $x$ , ma dipendente da  $y$ :

$$U(x, y) = \int F_1(x, y) dx + c(y).$$

- Si deriva l'espressione di  $U(x, y)$  così trovata rispetto a  $y$  e si impone la seconda delle condizioni.
- In questo modo *se si riesce* a determinare  $c(y)$  si è trovato il potenziale  $U(x, y)$ .

ESEMPIO 2.8. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy - 3y^2),$$

cercarne un potenziale.

Dato che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2x + 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

il campo è irrotazionale: non è quindi escluso che esista il potenziale.

Per cercarlo, integro la componente  $F_1$  rispetto ad  $x$

$$U(x, y) = \int (3x^2 - 2xy + y^2) dx = x^3 - x^2y + y^2x + c(y).$$

Derivando rispetto ad  $y$  e imponendo la seconda uguaglianza

$$-x^2 + 2xy + c'(y) = -x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\implies c'(y) = -3y^2 \implies c(y) = -y^3$$

Un potenziale è  $U(x, y) = x^3 - x^2y + y^2x - y^3$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

### 2.3. Un contreesempio.

Il Teorema 1.2 afferma

*i campi conservativi sono irrotazionali*

È naturale chiedersi se sia vero anche il viceversa, se cioè

*ogni campo irrotazionale sia conservativo (???)*

La risposta a tale congettura è NO !

L'esempio del campo magnetico generato da un filo percorso da corrente fornisce il più importante contreesempio.

Consideriamo il campo vettoriale nel piano, vedi Figura 3,

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

cioè il campo è irrotazionale.

Tuttavia il campo non è conservativo come si riconosce calcolando il lavoro da esso compiuto lungo la circonferenza  $\Gamma$  di centro l'origine e raggio 1, una curva chiusa.

Si ha

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Dato che il lavoro lungo una curva chiusa non è nullo il campo non è conservativo, vedi Proposizione 4.3.

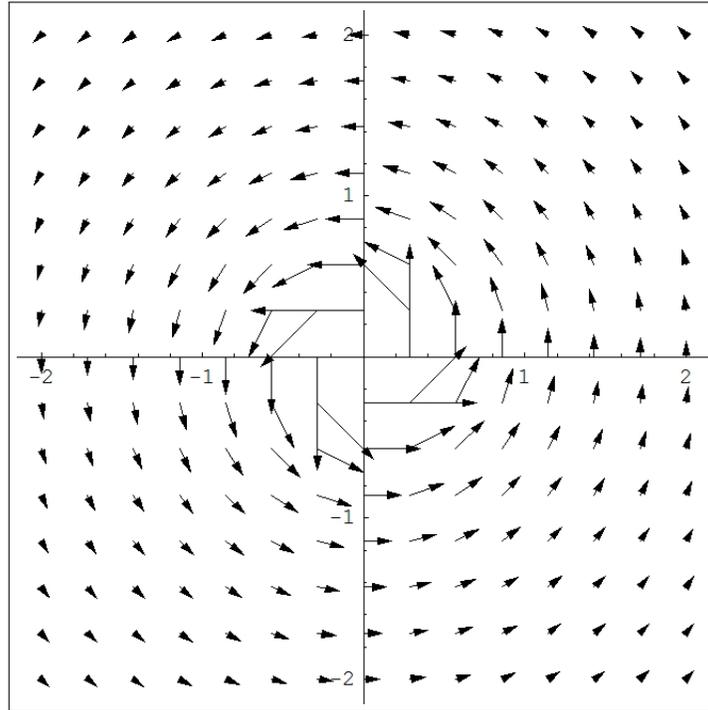


FIGURA 3.  $\mathbf{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Che il lavoro venisse positivo é chiaramente riconoscibile in Figura 3: infatti il prodotto scalare

$$\vec{G} \cdot \vec{T}$$

tra il campo  $\vec{G}$  e  $\vec{T}$ , vettore tangente alla circonferenza, é ovunque positivo!

### 3. Condizioni sufficienti

I campi vettoriali  $\vec{F}$  irrotazionali,  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , sono anche conservativi se sono definiti in insiemi convessi<sup>1</sup>.

Non a caso il contreesempio precedentemente illustrato del campo magnetico

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

risulta definito nel piano bucato, cioè privato di un punto, l'origine nel quale il campo non é definito.

<sup>1</sup>Un insieme é convesso se contiene tutti i segmenti di cui contenga gli estremi: di fatto la cosa somiglia a riconoscere che l'insieme non sia bucato. I cerchi sono convessi, le corone circolari no.

Il piano bucato non é, infatti un insieme convesso<sup>2</sup>.

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $\vec{F}(x, y, z) = \{F_1, F_2, F_3\}$  definito in un dominio rettangolare  $R : a < x < b, c < y < d, e < z < f$  con  $F_1, F_2, F_3 \in C^1(R)$ .*

*Se  $\text{rot } \vec{F} = 0$  esiste  $U(x, y, z) \in C^2(R)$  tale che*

$$F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in R$$

In altri termini il Teorema afferma che ogni campo vettoriale irrotazionale in un aperto rettangolare

- é un campo gradiente
- é dotato di potenziale
- é conservativo.

Nel paragrafo seguente viene dimostrato, col nome di *Lemma di Poincaré*<sup>3</sup> un risultato anche piú ampio.

### 3.1. Il lemma di Poincaré.

**DEFINIZIONE 3.2.** *Un insieme aperto  $S \subset \mathbb{R}^n$  si dice stellato se esiste un punto  $P_0 \in S$ , un centro della stella, tale che i segmenti  $PP_0$  che congiungono  $P_0$  con ogni altro punto  $P \in S$  siano interamente contenuti in  $S$ .*

Gli aperti circolari o rettangolari, sono stellati.

Un ferro di cavallo non è un aperto stellato. Un aperto convesso è stellato rispetto ad ogni suo punto, ma un aperto stellato non è necessariamente convesso.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è stellato.

**TEOREMA 3.3.** (*Lemma di Poincaré*). *Sia  $S$  un aperto stellato di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale irrotazionale di classe*

---

<sup>2</sup>Esistono condizioni piú sofisticate della convessità sotto le quali riconoscere che un campo irrotazionale é anche conservativo, ma esulano, per ora, dalle nostre competenze.

<sup>3</sup>Jules Henri Poincaré, matematico francese, 1854-1912, tra i piú grandi dell'età contemporanea: da non confondere con suo cugino Raymond Poincaré Presidente della Repubblica durante la Grande Guerra

$C^1(S)$ . Allora  $\mathbf{F}$  è un campo gradiente, cioè esiste  $U(x, y, z) \in C^2(A)$  tale che

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z).$$

DIMOSTRAZIONE.

*La dimostrazione di questo interessante risultato sarà fatta in modo costruttivo: costruiremo cioè tramite integrazioni una funzione  $U(x, y, z)$  definita in tutto  $S$  che risulterà un potenziale di  $F$*

Supponiamo per semplicità che un centro  $P_0$  di  $S$  sia l'origine  $O = (0, 0, 0)$  cioè  $OP \in S$  per ogni  $P \in S$ .

Consideriamo per ogni punto fissato  $P = (x, y, z) \in S$  il valore

$$U(x, y, z) = \int_{\Gamma_{OP}} \vec{F} \times \vec{T} ds, \quad \Gamma_{OP} = \overline{(0, 0, 0) - (x, y, z)}$$

del lavoro del campo  $F$  dal centro  $O$  della stella  $S$  al punto  $P = (x, y, z)$  lungo il segmento.

Verificheremo direttamente che la funzione  $U(x, y, z)$  così costruita ha i requisiti di potenziale del campo  $F$ .

Il segmento  $\Gamma_{OP}$  dall'origine al punto  $P = (x, y, z)$  si parametrizza nel seguente modo

$$\varphi_1(t) = tx, \quad \varphi_2(t) = ty, \quad \varphi_3(t) = tz \quad t \in [0, 1].$$

si ha quindi

$$U(x, y, z) = \int_0^1 [xF_1(tx, ty, tz) + yF_2(tx, ty, tz) + zF_3(tx, ty, tz)] dt.$$

Calcoliamo  $\frac{\partial U}{\partial x}$  usando la regola di derivazione degli integrali dipendenti da parametri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) &= \\ \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xF_1(tx, ty, tz) + yF_2(tx, ty, tz) + zF_3(tx, ty, tz)) \right] dt &= \\ \int_0^1 \left[ F_1(tx, ty, tz) + tx \frac{\partial}{\partial x} F_1(tx, ty, tz) + \right. & \\ \left. ty \frac{\partial}{\partial x} F_2(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial}{\partial x} F_3(tx, ty, tz) \right] dt. & \end{aligned}$$

Poichè  $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 0)$  e quindi  $\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial y} F_1$  e  $\frac{\partial}{\partial x} F_3 = \frac{\partial}{\partial z} F_1$ , si ha sostituendo

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = \int_0^1 \left[ F_1(tx, ty, tz) + tx \frac{\partial}{\partial x} F_1(tx, ty, tz) + \right. \\ \left. ty \frac{\partial}{\partial y} F_1(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial}{\partial z} F_1(tx, ty, tz) \right] dt.$$

I quattro addendi che compongono la funzione integranda rappresentano

$$\frac{d}{dt} (tF_1(tx, ty, tz)),$$

Quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_1(tx, ty, tz)) dt = tF_1(tx, ty, tz) \Big|_{t=0}^{t=1} = F_1(x, y, z)$$

Un discorso analogo vale per la derivazione rispetto a  $y$  e rispetto a  $z$  :

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

Quindi  $\mathbf{F} = \nabla U$ . □

**COROLLARIO 3.4.** *Sia  $S$  un aperto stellato di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale del piano con  $\mathbf{F} \in C^1(S)$ . Se*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{in } A$$

*allora  $\mathbf{F}$  è un campo conservativo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti in questo caso si ha

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 0) \iff \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

□

**OSSERVAZIONE 3.5.** Se  $\mathbf{F}$  è un campo irrotazionale su  $S$ ,  $S$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  o di  $\mathbb{R}^3$ , allora localmente è sempre conservativo cioè  $\forall P_0 \in S$  esiste un intorno  $I$  di  $P_0$ , interamente contenuto in  $S$ , tale che  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $I$ .

**Parte 4**

**Serie**



## CAPITOLO 11

### Alcuni richiami sulle serie numeriche

#### 1. Introduzione

Una serie<sup>1</sup> é una somma di infiniti addendi... sempre piú piccoli:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Il significato esatto di *somma di infiniti addendi* é quello di limite delle somme parziali

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ESEMPIO 1.1.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots$$

é convergente a 2.

Infatti

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} (S_n - \frac{1}{2^n}) \end{aligned}$$

da cui

$$\left( 1 - \frac{1}{2} \right) S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

ovvero

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 2$$

OSSERVAZIONE 1.2. Il conto fatto riferendosi alle potenze di  $\frac{1}{2}$  può ripetersi rispetto ad ogni numero  $-1 < \rho < 1$ : la serie

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots$$

si dice serie geometrica e la sua somma vale, sempre che  $-1 < \rho < 1$

$$\frac{1}{1 - \rho}$$

---

<sup>1</sup>Volume 1, Cap. 7, pag 511

ESEMPIO 1.3.  $\pi = 3.1415\dots$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

*I numeri decimali finiti si esprimono con una somma finita, gli altri...*

Se la successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

converge allora si dice che

- la serie converge,
- il limite delle somme parziali é assunto come somma della serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$$

ESEMPIO 1.4. *Sia*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

*riesce*

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

*da cui*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

OSSERVAZIONE 1.5. *Il valore iniziale dell'indice di somma puó essere sia 0 che 1 come pure qualsiasi altro numero: in molti casi l'espressione stessa dei termini da sommare  $a_i$  richiede che  $i$  sia, ad esempio diverso da zero.*

*Cambiare il valore iniziale cambia naturalmente il valore delle somme parziali e quindi della somma  $S$ .*

Se una serie converge allora convergono anche tutte quelle che da essa differiscono solo per un numero finito di addendi: naturalmente cambiare qualche addendo cambierà la somma !

ESEMPIO 1.6. *La serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  nella quale*

$$a_i = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^i & \text{se } i \neq 3 \\ 1 & \text{se } i = 3 \end{cases}$$

é convergente ma non ha la stessa somma della serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3$$

La sua somma  $S$  si ricava facilmente

$$S = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 1 = \frac{100}{27}$$

**1.1. Serie convergenti.** Si conoscono varie condizioni sufficienti a riconoscere che una serie é convergente, sono tutte condizioni che richiedono che i termini della serie  $a_i$  siano infinitesimi di ordine sufficientemente elevato, in genere superiore ad  $1/i$ .

**1.2. Serie a termini positivi.** La successione delle ridotte di una serie a termini positivi é una successione monotona crescente: quindi o diverge a  $+\infty$  o converge.

In altri termini le serie a termini positivi possono essere

- o convergenti,
- o divergenti a  $+\infty$ ,
- mai indeterminate...!

Per le serie a termini positivi la convergenza (o la divergenza) é quasi sempre stabilita tramite confronto con una altra serie, a termini positivi anch'essa, della quale sia nota la convergenza (o la divergenza)

$$\left\{ a_k \leq b_k, \quad \sum b_k < +\infty \right\} \Rightarrow \sum a_k < +\infty.$$

$$\left\{ a_k \leq b_k, \quad \sum a_k = +\infty \right\} \Rightarrow \sum b_k = +\infty.$$

**1.3. Esempi.** Tutte le serie seguenti sono convergenti,

(1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

(2)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

(3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$$

(4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$$

(5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

essendo

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^k & \text{se } k \text{ pari} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^k & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Per le prime quattro é facile conoscere anche la somma, meno facile (ma non troppo difficile) conoscerla anche per l'ultima.

OSSERVAZIONE 1.7. *Il confronto*

$$a_n \leq b_n, \quad \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

si riferisce solo a serie a termini positivi.

Infatti nel caso

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

riesce

$$a_n \leq b_n, \quad \sum b_n \text{ converge}$$

e, tuttavia  $\sum a_n$  non converge !

## 2. La convergenza assoluta

DEFINIZIONE 2.1 (Convergenza assoluta). *Una serie  $\sum a_k$  per la quale  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_k|$  converga si dice assolutamente convergente.*

TEOREMA 2.2. *Se converge la serie (a termini positivi)*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_k|$$

*allora converge anche la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} a_k$ .*

OSSERVAZIONE 2.3. *La serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_k|$  é una serie a termini positivi: quindi la sua convergenza (o meno) puó essere stabilita per confronto.*

### 2.1. Il criterio del rapporto.

Il criterio del rapporto per serie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell < 1$$

é una condizione sufficiente di convergenza assoluta: scelto  $\ell < \lambda < 1$  il precedente limite implica che da un certo indice in poi i termini della serie verifichino la maggiorazione

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \lambda, \quad \rightarrow |a_k| \leq M\lambda^k$$

che realizza il confronto della serie dei moduli  $\sum |a_k|$ , con la serie geometrica CONVERGENTE

$$M \sum_k \lambda^k$$

ESEMPIO 2.4. Calcolare la somma  $S$  di

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k)}{2^k}$$

con la precisione di  $1/100$ .

$$|S - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^n}$$

### 2.2. Test di convergenza assoluta.

- maggiorazione di  $|a_k|$  con termini  $b_k$  di una serie nota per la convergenza, quasi sempre una serie geometrica relativa a  $\rho \in [0, 1)$ ,
- test criterio del rapporto,

ESEMPIO 2.5. La serie

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{2^k}$$

é convergente perché

i:

$$\left| \frac{\sin(k)}{2^k} \right| \leq \left| \frac{1}{2^k} \right|$$

ii: la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

é convergente.

NOTA: dire che la (4) é convergente non equivale a dire che  
...ne conosco la somma !

### 3. Le serie a segni alterni

Consideriamo le somme parziali della serie

$$(5) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Le somme parziali di posto dispari sono

$$S_1 = 1$$

$$S_3 = \frac{5}{6} \simeq 0.8333$$

$$S_5 = \frac{47}{60} \simeq 0.7833$$

$$S_7 = \frac{319}{420} \simeq 0.75952$$

$$S_9 = \frac{1879}{2520} \simeq 0.74563$$

quelle di posto pari sono

$$S_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_4 = \frac{7}{12} \simeq 0.58333$$

$$S_6 = \frac{37}{60} \simeq 0.61666$$

$$S_8 = \frac{533}{840} \simeq 0.63452$$

$$S_{10} = \frac{1627}{2520} \simeq 0.64563$$

Sia la successione delle dispari  $\{S_{2n+1}\}$  che quella  $\{S_{2n}\}$  delle pari sono monotone,

- decrescenti le prime,  $\{S_{2n+1}\} \downarrow$
- crescenti le seconde,  $\{S_{2n}\} \uparrow$ .

Tenuto conto che le due successioni sono anche evidentemente limitate, si riconosce che sono entrambe convergenti.

La differenza

$$|S_{2n} - S_{2n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

é infinitesima: quindi la successione delle dispari e la successione delle pari hanno lo stesso limite.

Detto  $S$  il comune limite riesce

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$$

É noto (ma non é banale provarlo) che  $S = \ln(2) \simeq 0.69314$ .

**TEOREMA 3.1** (Criterio di Leibnitz<sup>2</sup>). *Se i termini di una serie  $\sum_k a_k$  sono di segno alterno e, presi in modulo, sono decrescenti e infinitesimi, la serie converge: detta  $S$  la somma ed  $S_n$  una somma parziale riesce  $|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$*

**OSSERVAZIONE 3.2.** *Le serie che soddisfano le ipotesi del Teorema 3.1 hanno il notevole pregio numerico di consentire la conoscenza della loro somma con la precisione voluta: infatti la condizione*

$$|S - S_{2n}| \leq |a_{2n+1}|$$

*consente di decidere quanti termini aggiungere per conoscere  $S$  a meno di un  $\varepsilon$  assegnato: basta scegliere  $n$  tale che*

$$|a_{2n+1}| \leq \varepsilon$$

*e assumere, come stima di  $S$  la somma parziale  $S_{2n}$ .*

#### 4. La convergenza semplice

Esistono serie  $\sum a_k$  convergenti ma non assolutamente convergenti. La serie

$$(6) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

é convergente, come discende dal Teorema 3.1, ma é anche noto<sup>3</sup> che la corrispondente serie dei valori assoluti

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

detta *serie armonica*, non é convergente.

**DEFINIZIONE 4.1.** *Le serie  $\sum a_k$  convergenti per le quali la serie dei valori assoluti  $\sum |a_k|$  sia divergente si dicono*

*semplicemente convergenti.*

<sup>2</sup>Vol. I pag. 514

<sup>3</sup>cfr: Courant, Vol. I pag 513

## 5. Il teorema di Abel

### 5.1. L'esempio fondamentale.

Consideriamo le serie a termini complessi

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\theta}, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

riferite a coefficienti reali  $\{a_k\}$

- decrescenti  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$
- infinitesimi  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Tra le (7) figurano, separando la parte reale da quella immaginaria, le serie trigonometriche

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\theta), \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\theta),$$

che si incontrano quasi sempre come *Serie di Fourier* di funzioni periodiche assegnate.

Posto

$$E_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$$

riesce<sup>4</sup>, per  $\theta \neq 2m\pi$ ,

$$E_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

e quindi

$$|E_n| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

Tenuto conto che

$$1 = E_0, \quad e^{ik\theta} = E_k - E_{k-1}$$

gli addendi della (7)

$$a_0 + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + a_3 e^{3i\theta} + \dots$$

possono essere riscritti come

$$a_0 E_0 + a_1 (E_1 - E_0) + a_2 (E_2 - E_1) + a_3 (E_3 - E_2) + \dots$$

ovvero

$$(8) \quad (a_0 - a_1)E_0 + (a_1 - a_2)E_1 + (a_2 - a_3)E_2 + \dots$$

<sup>4</sup>per il noto algoritmo di calcolo delle ridotte della serie geometrica...

Le (7) e (8) rappresentano la stessa serie, la cui convergenza può quindi essere studiata servendosi dell'una o dell'altra equivalente espressione.

Occupiamoci della convergenza assoluta della (8)

$$|(a_0 - a_1)E_0| + |(a_1 - a_2)E_1| + |(a_2 - a_3)E_2| + \dots$$

Tenuto conto che la successione dei coefficienti è decrescente,  $a_k \geq a_{k+1}$ , per ipotesi, la precedente serie dei moduli si riduce a

$$(a_0 - a_1)|E_0| + (a_1 - a_2)|E_1| + (a_2 - a_3)|E_2| + \dots$$

serie quest'ultima a termini positivi, maggiorata da

$$\leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \{(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots\}.$$

La serie a termini positivi

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots$$

è ovviamente convergente

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \rightarrow a_0$$

e pertanto risulta assolutamente convergente, per confronto, la (8).

La convergenza della (8) implica quindi anche la convergenza della (7).

**OSSERVAZIONE 5.1.** *La (8) è assolutamente convergente: la (7) è invece solo convergente, cioè può essere anche*

*non assolutamente convergente*

*Basta riferirsi all'esempio di*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{ik\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

*Infatti la serie dei moduli della (8) e quella dei moduli della (7) non sono le stesse.*

*Quella della (8) è, tenuto conto che  $B_{2n} = 1$ ,  $B_{2n+1} = 0$*

$$\left(1 - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+3}\right) + \left(\frac{1}{1+4} - \frac{1}{1+5}\right) \dots$$

*ovvero*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots$$

*con addendi della forma*

$$\frac{1}{1+2k} - \frac{1}{1+2k+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

mentre la serie dei moduli della (7) é la serie armonica.

ESEMPIO 5.2. *Le serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \cos(k), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \sin(k), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos(3k)$$

sono convergenti, si tratta infatti di serie trigonometriche con coefficienti decrescenti e infinitesimi.

- La prima é ovvio perché i suoi termini si maggiorano con

$$\left| \frac{1}{1+k^2} \cos(k) \right| \leq \frac{1}{1+k^2}$$

termini che formano una serie convergente, é quindi anche assolutamente convergente.

- La seconda rientra nello schema osservato sopra con

$$a_k = \frac{1}{1+k}, \quad \theta = 1$$

- La terza rientra nello schema osservato sopra con

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \theta = 3$$

Le osservazioni fatte in relazione alle fondamentali serie (7) si possono generalizzare sostituendo negli addendi il fattore  $e^{ik\theta}$  con generici  $b_k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

che abbiano tuttavia proprietá equivalenti

$$b_0 = 1, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad \rightarrow \quad |B_n| \leq M$$

TEOREMA 5.3 (Criterio di Abel<sup>5</sup>).

La serie  $\sum_k b_k$  abbia le somme parziali

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

---

<sup>5</sup>Vol.I pag. 515

limitate in modulo  $|B_n| \leq M$  e sia  $\{a_k\}$  una successione decrescente infinitesima: allora la serie

$$\sum_k a_k b_k$$

é convergente.

DIMOSTRAZIONE. Si tratta, posto  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ , della stessa manipolazione usata nel fondamentale esempio precedente

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

da cui

$$\sum_{k=0}^n |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq M \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) \leq a_0 - a_{n+1}$$

da cui l'assoluta convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) B_k$$

e quindi la convergenza della

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

□

OSSERVAZIONE 5.4. Le serie a termini di segno alterno, quali la

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k$$

costituiscono l'esempio piú semplice tra quelle coperte dal criterio di Abel: infatti

$$b_k = (-1)^k \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$$

implicano la convergenza

ESEMPIO 5.5. il criterio di Abel permette di riconoscere che la serie

$$\sum \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{1+k}$$

é convergente: infatti

- la serie  $\sum \sin(k\frac{\pi}{4})$  ha le somme parziali tutte limitate da 4, infatti gli addendi  $\sin(k\frac{\pi}{4})$  si semplificano stante la loro evidente alternanza di segni,<sup>6</sup>
- la successione  $\frac{1}{1+k}$  é decrescente e infinitesima.
- ... naturalmente sapere che la serie considerata é convergente non significa affatto conoscerne la somma !

### 5.2. La convergenza condizionata.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & \dots & & = & \ln(2) \\
 & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & \dots & = & \frac{1}{2} \ln(2)
 \end{array}$$

Sommando (primo termine con primo termine, secondo con secondo, terzo con terzo,...)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \dots = \frac{3}{2} \ln(2)$$

Ma l'ultima serie contiene tutti e soli i termini della prima, tutte le frazioni dispari positive, tutte quelle pari negative, solo un po' cambiati di ordine: ci aspetteremmo quindi che continuasse ad avere somma  $\ln(2)$ ...!

Siamo pervenuti ad un fenomeno sorprendente: alterare l'ordine<sup>7</sup> dei termini di una serie ne può modificare la somma !

Il fenomeno sorprendente osservato sulla serie (6) si riscontra su tutte e sole le serie convergenti semplicemente: il risultato ha il nome di

#### TEOREMA DI RIEMANN-DINI,

...uno dei piú bei teoremi<sup>8</sup> della matematica!

**DEFINIZIONE 5.6** (Convergenza condizionata<sup>9</sup>). *Una serie che converga senza convergere assolutamente si dice convergente condizionatamente*

Il teorema di Riemann-Dini stabilisce che tutte le serie *semplicemente convergenti* sono *condizionatamente convergenti*: mutano somma alterando l'ordine dei termini e, anzi, fissato comunque un numero reale  $\sigma$  si può mutare l'ordine in modo di produrre una serie convergente a tale  $\sigma$ .

Risultato, quest'ultimo, assolutamente incredibile !

Potreste indagare, forse impegnandovi fortemente, per scoprire quale

<sup>6</sup>La successione di numeri  $\{\sin(k\pi/4)\}$  potrebbe essere detta periodica a somma nulla, infatti ogni termine si ripete e la somma di 8 termini consecutivi vale 0.

<sup>7</sup>naturalmente modificando la posizione di infiniti termini nella fila (modificazioni nell'ordinamento di un numero finito di termini non provoca nessun cambiamento nella somma).

<sup>8</sup>Vedi Courant, Vol. I, pag. 517

<sup>9</sup>Vol.1, pag. 513-520

ordinamento sia opportuno dare alla precedente serie a segni alterni per produrre una serie che converga a... 17



## CAPITOLO 12

### Serie e/o successioni di funzioni

#### 1. Introduzione

In luogo di considerare somme di infiniti addendi numerici

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots$$

possiamo considerare somme<sup>1</sup> di... infinite funzioni:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

Non cambia molto.

La convergenza si esplora punto per punto: per ogni  $x_0$  si calcolano le funzioni in tale punto e si perviene quindi a una serie numerica

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots$$

che può essere convergente o meno.

*ESEMPIO 1.1. Consideriamo la serie di funzioni*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

*Scelto  $x_0 = 1$  si approda alla serie*

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

*certamente divergente.*

*Scelto  $x_0 = \frac{1}{2}$  si approda alla serie*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

*certamente convergente.*

*L'esplorazione fa riconoscere facilmente che l'insieme di convergenza di tale serie è l'intervallo aperto  $(-1 < x < 1)$*

*La risposta riguardo alla convergenza di una serie di funzioni deve indicare, sempre, l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti in cui essa converga.*

---

<sup>1</sup>Volume 1, Cap. 7, § 7.4, pag. 529

DEFINIZIONE 1.2 (Successioni convergenti). *La successione  $\{f_n(x)\}$  converge per  $x \in E$  alla funzione  $f(x)$  se  $\forall x_0 \in E$  la successione numerica  $\{f_n(x_0)\}$  converge ad  $f(x_0)$*

OSSERVAZIONE 1.3. *Le somme parziali di una serie di funzioni sono una successione di funzioni, come pure ogni successione di funzioni  $\{f_n(x)\}$  può essere pensata come somma della serie associata*

$$f_0(x) + \{f_1(x) - f_0(x)\} + \{f_2(x) - f_1(x)\} + \dots$$

*É questo il motivo della assoluta intercambiabilità di ogni problema relativo ad una successione con uno relativo a una serie e viceversa.*

**1.1. La rapidità di convergenza.** Le diverse successioni numeriche  $\{f_n(x_0)\}$  possono presentare rapidità di convergenza diverse: in altri termini scelti  $\varepsilon > 0$  ed  $x_0 \in E$  certamente riuscirá

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

per  $n > n_{\varepsilon, x_0}$ , soglie  $n_{\varepsilon, x_0}$  diverse per diversi  $x_0$ .

A paritá di  $\varepsilon$  per certi  $x_0$  basterá prendere  $n > 10$ , per altri punti  $x_0$  occorrerá invece prendere  $n > 100$  per altri punti  $x_0$  ancora potrebbe essere necessario prendere  $n > 1000$ .

ESEMPIO 1.4. *Consideriamo nell'intervallo  $|x| \leq 0.9$  la successione  $f_n(x) = x^n$ .*

*Si tratta di una successione ovviamente convergente a  $f(x) \equiv 0$ : preso un  $x_0 \in I$  e scelto  $\varepsilon = 1/1000$  calcoliamo quanto grande occorra prendere  $n$  affinché riesca*

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |x_0^n| \leq \frac{1}{1000}$$

*é evidente che se  $x_0 = 0$  allora la disequaglianza é soddisfatta da qualunque  $n$ , mentre se  $x_0 \neq 0$  allora*

$$|x_0^n| \leq \frac{1}{1000}$$

*equivale a*

$$n \ln(|x_0|) \leq \ln\left(\frac{1}{1000}\right) \Leftrightarrow n \geq \left| \frac{\ln(1000)}{\ln(|x_0|)} \right|$$

Basta tabulare i valori a secondo membro in corrispondenza, ad esempio ai valori  $x_0 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  per riconoscere il fenomeno

$x_0$	$n_{x_0}$
0.1	3
0.2	4
0.3	5
0.4	7
0.5	9
0.6	13
0.7	19
0.8	30
0.9	65

Un piccolo (ma non piccolissimo) problema : se avessimo considerato la stessa successione nell'intervallo (altrettanto legittimo)  $|x| \leq 1$  che valori  $n_{x_0}$  avremmo incontrati ?

Naturalmente il problema sarebbe apparso nella sua difficoltà riferendosi a punti  $x_0$  via via piú vicini a 1 o a  $-1$ .

ESEMPIO 1.5. Si pensi alla successione  $f_n(x) = x/n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  convergente a  $f(x) = 0$  : scelto  $\varepsilon = 1/10$

$$|f_n(x_0) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} x_0 \right| < \frac{1}{10}$$

richiede, evidentemente che  $n > 10|x_0|$  e quindi potendo pensare scelte di  $x_0$  comunque grandi si riconosce che non c'è una soglia valida per qualsiasi  $x_0$ .

Puó capitare quindi, come questo esempio ha mostrato, che non ci sia alcuna scelta della soglia per  $n$  da cui partire valida per tutti i punti  $x_0$ . Si rifletta sul problema piccolo ma non piccolissimo indicato nell'esempio (1.4) precedente.

## 2. Il tubo

Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione convergente a  $f(x)$  per  $x \in E$ :

- disegniamo il grafico della funzione limite  $f(x)$ <sup>2</sup>
- assegnato  $\varepsilon > 0$  disegniamo la striscia - il tubo<sup>3</sup> - intorno al grafico di  $f(x)$  di diametro  $\varepsilon$

<sup>2</sup>vedi anche Courant Figura 7.4 di pag. 529

<sup>3</sup>Abbiamo considerato questo termine già nel precedente Capitolo sullo spazio  $C^0(K)$ , vedi pagina 393

- la convergenza é uniforme se da un certo indice  $n_\varepsilon$  in poi i grafici delle  $f_n(x)$  sono interamente contenuti nel tubo<sup>4</sup>.
- ... e questo avviene comunque si scelga l'  $\varepsilon > 0$ .

ESEMPIO 2.1. Consideriamo, nell'intervallo  $x \in [0, 2\pi]$  la successione

$$f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n} \sin(nx),$$

successione certamente convergente a  $f(x) = \sin(x)$ . La Figura (1) contiene

- il grafico della funzione limite  $\sin(x)$
- il tubo intorno a tale grafico con  $\varepsilon = 0.3$
- i grafici delle tre  $f_n(x)$ ,  $n = 4, 5, 6$

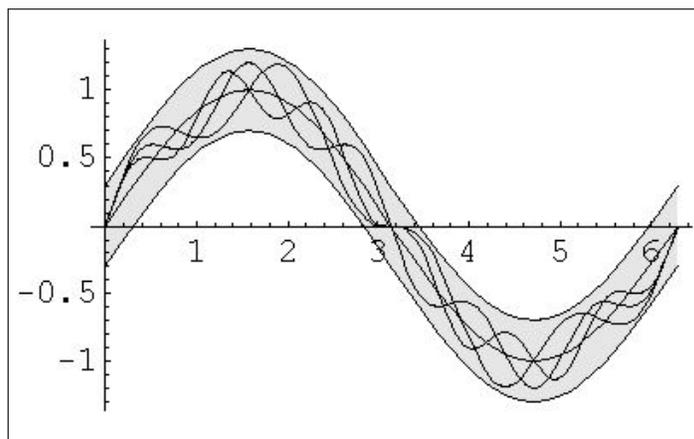


FIGURA 1. Il tubo

Si vede come i grafici delle  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$ ,  $f_6(x)$  siano ben contenuti dentro il tubo.

Naturalmente se avessimo scelto un tubo piú sottile, un tubetto..., avremmo forse dovuto attendere un po' di piú per riconoscere che i grafici delle  $f_n(x)$  finissero interamente dentro tale tubetto !

ESEMPIO 2.2. Consideriamo nell'intervallo  $|x| < 1$  la successione

$$f_n(x) = x^n$$

successione convergente a  $f(x) = 0$ , naturalmente questo non accade nei due estremi.

La Figura (2) seguente mostra il tubo realizzato intorno alla funzione limite e di spessore  $\varepsilon = 0.1$  : sono anche riportati i grafici delle

<sup>4</sup>Vedi anche paragrafo 3.1

funzioni della successione  $x^4, x^7, x^{12}, x^{15}$  che, visibilmente non sono interamente contenute nel tubo....

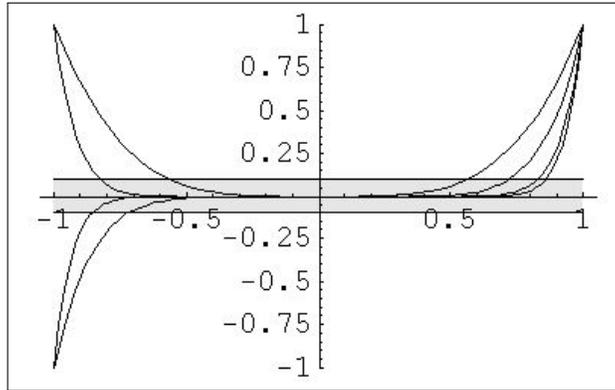


FIGURA 2. I grafici non finiscono interamente nel tubo...!

Il motivo é evidente: i grafici delle  $x^n$  per  $x = 1$  devono prendere il valore 1, quindi i loro grafici devono avere un tratto in salita che li porti a raggiungere tale quota, tratto in salita che fuoriesce, naturalmente, dal tubo disegnato.

DEFINIZIONE 2.3 (Convergenza uniforme). La successione  $\{f_n(x)\}$  converge per  $x \in E$  uniformemente alla funzione  $f(x)$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una stessa unica soglia  $n_\varepsilon$  valida per tutti i punti  $x_0 \in E$ : cioè tale che

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x_0 \in E, \quad \forall n > n_\varepsilon$$

ovvero

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

OSSERVAZIONE 2.4. La convergenza uniforme di una successione  $\{f_n(x)\}$ ,  $x \in I$  é la convergenza della successione nella metrica di  $C^0(I)$  introdotta nella Definizione 2.3 di pagina 390.

ESEMPIO 2.5. Nel caso di Figura (3) si vede che i grafici delle funzioni

$$\frac{1}{n}x(1-x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad x \in [0, 1]$$

si stringono intorno a quello della funzione 0, loro limite.

Nel caso di Figura 4 invece i grafici di

$$e^{-n^3(x-1/n)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots e^{-n^3(x-1/n)^2}, \quad n =$$

sono delle campane di Gauss centrate su  $\frac{1}{n}$  e via via piú magre: esse costituiscono una successione con limite 0 ma evidentemente i loro grafici

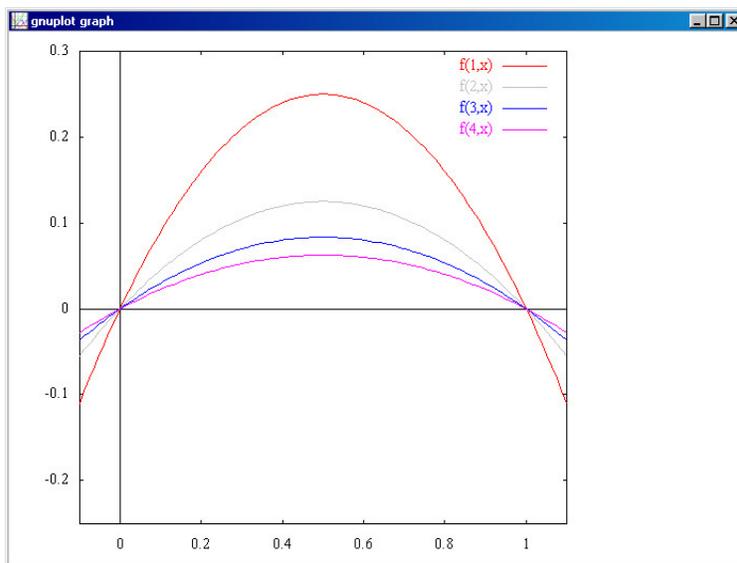


FIGURA 3.  $x(1-x)/n$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $x \in [0, 1]$

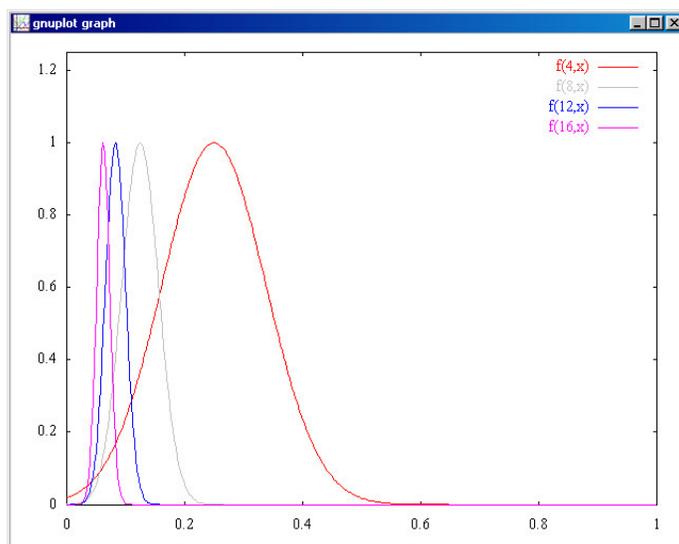


FIGURA 4.  $e^{-n^3(x-1/n)^2}$ ,  $n = 4, 8, 12, 16$   $x \in [0, 1]$

non sono mai completamente contenuti in un tubo intorno all'asse  $x$  :  
più guardiamo ad un  $x_0 \simeq 0$  più per avere  $f_n(x_0)$  piccolo occorre riferirsi  
a  $n$  alto.

- Il caso di Figura 3 rappresenta un caso di convergenza uniforme,

- quello di Figura 4 un caso di convergenza non uniforme.

OSSERVAZIONE 2.6. Ogni dichiarazione di convergenza o di uniforme convergenza di una successione di funzioni deve essere fatta precisando dove si consente di variare la  $x$ .

La successione di Figura 4 possiede il requisito di convergenza uniforme se invece di considerare le funzioni  $e^{-n^3(x-1/n)^2}$  su tutto  $[0, 1]$  le si considera in un intervallo  $[0.5, 1]$ .

### 3. Test di convergenza uniforme per le serie

DEFINIZIONE 3.1. Una serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

si dice uniformemente convergente per  $x \in E$  se è tale la successione delle sue somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

TEOREMA 3.2 (Condizione sufficiente). La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$  è uniformemente convergente per  $x \in E$  se è possibile maggiorare  $|g_k(x)| \leq c_k$ ,  $\forall x \in E$ ,  $\forall k$  essendo  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  convergente.

La condizione sufficiente del teorema si chiama *condizione di Weierstrass* o *condizione di convergenza totale*.

**3.1. Il test per le successioni.** Per decidere se la successione  $\{f_n(x)\}$  converga o meno uniformemente basta esaminare se converge o meno uniformemente la serie associata

$$f_0 + \{f_1(x) - f_0(x)\} + \{f_2(x) - f_1(x)\} + \dots$$

Pertanto, servendosi del criterio precedente,

TEOREMA 3.3. La successione  $\{f_n(x)\}$  converge uniformemente se

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq c_n$$

essendo convergente la serie  $\sum c_n$ .

ESEMPIO 3.4. Sperimentiamo il teorema precedente sulla successione  $x^n$  per  $0 \leq x < 1$ : la serie associata ha, tenuto conto del modulo, i seguenti termini

$$|x^{n+1} - x^n| = x^n(1 - x)$$

I termini da maggiorare hanno i seguenti grafici, Figura (5), in corrispondenza ad  $n = 4, \dots, 8$

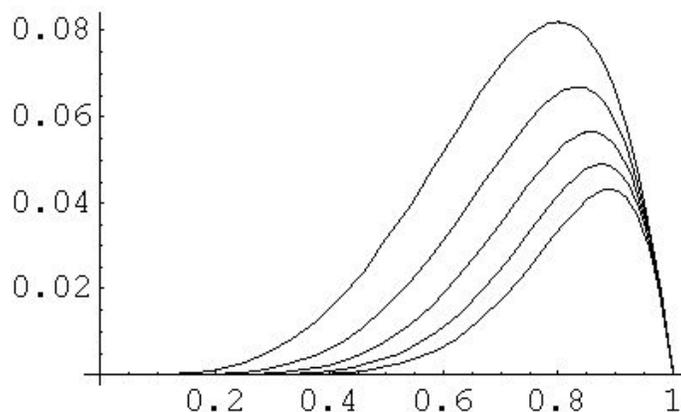


FIGURA 5. I termini della serie associata

*I massimi raggiunti in Figura (5) si possono anche calcolare facilmente*

$$(x^{n+1} - x^n)' = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{n}{n+1}$$

*massimi che pertanto valgono*

$$\frac{1}{n+1} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \simeq \frac{1}{e} \frac{1}{n+1}$$

*Gli ultimi termini costituiscono una maggiorazione non ulteriormente scontabile dei termini della serie associata, e si tratta di maggiorazioni che non corrispondono ad una serie convergente (somigliano molto alla serie armonica...)*

*Non c'è da stupirsi che la successione  $x^n$  per  $0 \leq x < 1$  non sia uniformemente convergente...!*

### 3.2. Un teorema di Dini.

Il nome di Ulisse Dini, vedi Figura di pagina 240, è legato, oltre che ai risultati relativi al problema delle funzioni implicite, ad una importante condizione di convergenza uniforme

**TEOREMA 3.5.** *Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$  tali che*

- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall x \in I$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in I$  con  $f(x)$  continua in  $I$ ,

*allora  $\{f_n(x)\}$  converge uniformemente ad  $f(x)$  in  $I$ .*

Il risultato, pur apparendo quasi evidente, è, invece nella sua generalità assai profondo: la sua dimostrazione non è opportuna in un corso iniziale.

In altri termini il teorema di Dini permette di riconoscere che l'esempio delle funzioni

$$f_n(x) = e^{-n^3(x-1/n)^2}$$

illustrate in Figura 4, successione di funzioni convergente alla funzione continua  $f(x) = 0$  su  $I = [0, 1]$  non uniformemente é un esempio base. La convergenza di successioni  $\{f_n(x)\}$  di funzioni continue ad una funzione  $f(x)$  continua, convergenza non uniforme in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  si incontra solo in presenza di successioni di tipo non monotono.



## L'importanza di essere uniformemente convergenti

### 1. Continuità del limite

La successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

continue in tutto  $\mathbb{R}$  é convergente in tutto  $\mathbb{R}$ , ma ha uno strano limite: la funzione, vedi Figura 1, discontinua

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Un altro esempio sorprendente si trova nella Figura 7.7 di pag. 533: una successione di funzioni continue, quelle tratteggiate, che ha un limite discontinuo (in tutti i punti diversi dall'origine il limite sta sul grafico a parabola sopra 1, ma nel punto 0 il limite resta 0).

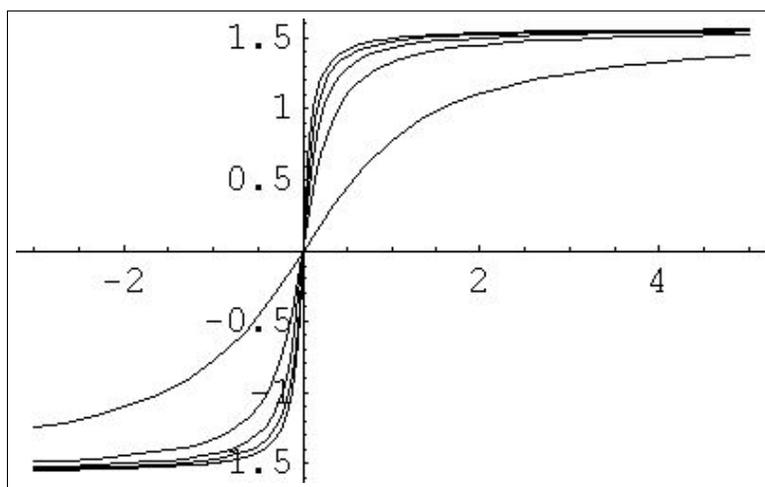


FIGURA 1. I grafici delle funzioni  $\arctan(nx)$ .

Tutto ciò non sarebbe accaduto se avessimo lavorato con successioni uniformemente convergenti: vale infatti il seguente

**TEOREMA 1.1 (CONTINUITÁ DEL LIMITE).** *Il limite  $f(x)$  di una successione  $\{f_n(x)\}$  di funzioni continue uniformemente convergente in un intervallo  $I$  é una funzione continua<sup>1</sup> in  $I$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Riconoscere che  $f(x)$  é continua vuol dire riconoscere che

$$x_1 \simeq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \simeq f(x_2)$$

L'ipotesi di uniforme convergenza ci dice del resto che qualunque sia  $x \in I$  riesce

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

non appena  $n$  superi una certa soglia dipendente solo da  $\varepsilon$ . Allora, lavorando giudiziosamente con la proprietá triangolare si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|$$

da cui tenuto presente che il primo e il terzo modulo a secondo membro sono minori di  $\varepsilon$  si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

In altri termini la variazione  $|f(x_1) - f(x_2)|$  non é molto piú grande della variazione  $|f_n(x_1) - f_n(x_2)|$  riferita alla funzione continua  $f_n(x)$ . Quindi anche la funzione limite  $f(x)$  possiede il requisito tipico delle funzioni continue di prendere

*valori vicini su punti vicini !*

□

**ESEMPIO 1.2.** *La precedente successione  $\arctan(nx)$ , vedi Figura 1, ha come limite una funzione discontinua nell'origine.*

*Se ne deduce che la successione di funzioni  $\arctan(nx)$  non é uniformemente convergente in alcun intorno dell'origine<sup>2</sup>.*

**ESEMPIO 1.3.** *La successione*

$$\frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

<sup>1</sup>Vedi Teorema 3.3, pagina 391

<sup>2</sup> altrimenti il limite avrebbe dovuto, in base al Teorema (1.1) essere una funzione continua !

formata da onestissime funzioni razionali, ha come limite

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } |x| = 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

funzione evidentemente discontinua.

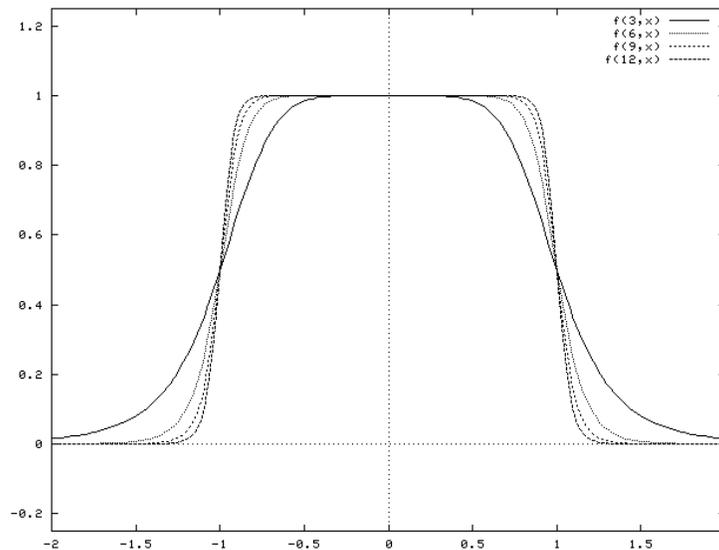


FIGURA 2.  $\frac{1}{1+x^{2n}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Si noti come

- tutte le funzioni della successione valgono  $1/2$  nei due punti  $x = 1$  e  $x = -1$
- passino in corrispondenza a tali punti con pendenza

$$f'_n(x) = -\frac{2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2}, \quad |f'_n(\pm 1)| = \frac{n}{2}$$

via via maggiore al crescere di  $n$  da quote prossime ad 1 a quote prossime a 0.

Certamente quella successione non è uniformemente convergente (altrimenti il limite avrebbe dovuto, in base al Teorema (1.1) essere una funzione continua!).

ESEMPIO 1.4. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

é convergente per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ma non é uniformemente convergente in tutto  $\mathbb{R}$ : infatti

- per  $x_0 = 0$  si tratta di una serie tutta di 0, quindi converge e ha somma 0,
- per  $x \neq 0$  riesce  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$ , serie geometrica in  $\rho = \frac{x^2}{(1+x^2)} < 1$
- quindi per  $x_0 \neq 0$  riesce  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2} = 1$

La somma pertanto vale 0 per  $x_0 = 0$  e vale 1 in tutti gli altri  $x_0$ .

Si tratta di una somma discontinua: mentre se la serie di funzioni continue assegnata fosse stata uniformemente convergente la somma avrebbe dovuto risultare continua...

## 2. Integrale del limite

**TEOREMA 2.1 (INTEGRALE DEL LIMITE).** Sia  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  una successione di funzioni continue, uniformemente convergente in  $[a, b]$  alla funzione  $f(x)$ : allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

**DIMOSTRAZIONE.**

- Per il teorema precedente la funzione limite é continua, quindi ha senso parlare del suo integrale

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon |b - a|$$

□

**ESEMPIO 2.2.** Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x$$

convergente uniformemente a 0 per  $x \in [a, b]$

$$\int_a^b f_n(x) dx = \frac{1}{2n} (b^2 - a^2) \rightarrow 0$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b 0 dx$$

ESEMPIO 2.3. Consideriamo nell'intervallo  $I = [0, 1]$  la successione

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

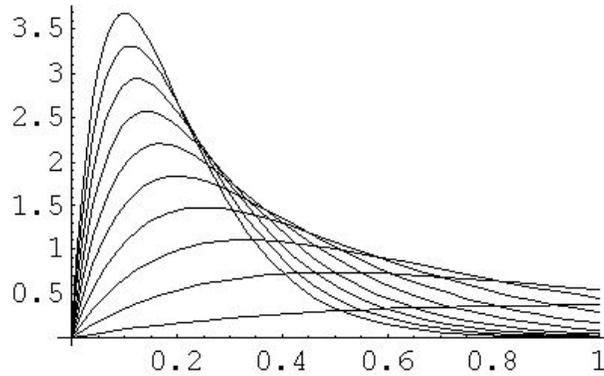


FIGURA 3. Le funzioni  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

Si tratta di una successione che ha limite 0 in ogni punto dell'intervallo. Tuttavia gli integrali

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = 1 - (1+n)e^{-n}$$

non hanno affatto limite 0, come si legge dalla seguente tabella

$n$	Integrale
1	$1 - 2e^{-1}$
2	$1 - 3e^{-2}$
3	$1 - 4e^{-3}$
4	$1 - 5e^{-4}$
5	$1 - 6e^{-5}$
6	$1 - 7e^{-6}$
7	$1 - 8e^{-7}$
8	$1 - 9e^{-8}$
9	$1 - 10e^{-9}$
10	$1 - 11e^{-10}$

In base al precedente teorema (2.1) tale successione non era certamente convergente uniformemente.

OSSERVAZIONE 2.4. *La successione*

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

*non é uniformemente convergente in  $I = [0, 1]$  : si tratta, vedi Figura 3, di una successione non monotona...*

*...nessuna contraddizione quindi col Teorema 3.5 di Dini!*

OSSERVAZIONE 2.5. *Consideriamo lo spazio vettoriale normato  $C^0(I)$  delle funzioni continue per  $x \in I$ , introdotto a pagina 390: il precedente Teorema 2.1 può essere enunciato anche al modo seguente*

*Per ogni  $[a, b] \subseteq I$  l'integrazione su  $[a, b]$  definisce una trasformazione  $T$  continua di  $C^0(I)$  in  $\mathbb{R}$ .*

*Infatti se  $f_n$  é una successione di funzioni appartenenti a  $C^0(I)$  convergenti ad  $f \in C^0(I)$  nella metrica di  $C^0(I)$  allora*

$$T f_n = \int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt = T f$$

### 3. Derivata del limite

TEOREMA 3.1 (DERIVATA DEL LIMITE). *Sia  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  una successione di funzioni continue e derivabili convergente a  $f(x)$  in  $[a, b]$ : se la successione delle derivate  $f'_1(x), f'_2(x), f'_3(x), \dots$  converge uniformemente in  $[a, b]$  il limite di tali derivate é la derivata del limite  $f(x)$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x) = f'(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Chiamiamo  $g(x)$  il limite della successione  $\{f'_k(x)\}$ , riesce in base al Teorema di Torricelli e al precedente teorema (2.1)

$$\begin{aligned} f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt &\Rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = g(x) \end{aligned}$$

...avete capito l'ultima implicazione ?

É ancora il teorema di Torricel-li!

□

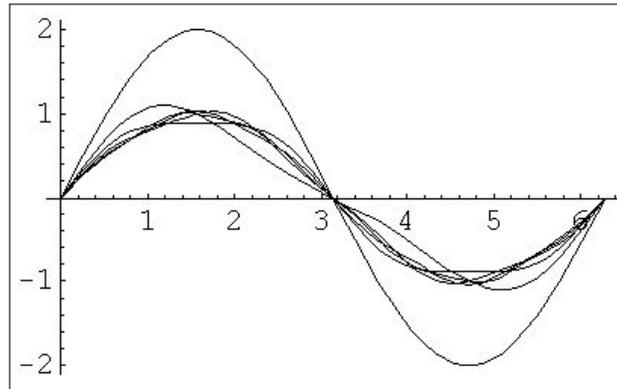


FIGURA 4. I grafici delle  $\sin(x) + \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ ,  $n = 1, \dots, 6$

ESEMPIO 3.2. Consideriamo la successione:

$$f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n^2} \sin(nx)$$

convergente a  $f(x) = \sin(x)$ .

La successione delle derivate

$$f'_n(x) = \cos(x) + \frac{1}{n} \cos(nx)$$

è una successione uniformemente convergente a  $\cos(x)$

Infatti

$$(\sin(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

ESEMPIO 3.3. Un contresempio Consideriamo la successione (2.1),

$$f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n} \sin(nx)$$

successione convergente (convergenza evidentemente uniforme, pensate al tubo...) a  $\sin(x)$ . La successione delle derivate

$$f'_n(x) = \cos(x) + \cos(nx)$$

tuttavia è tutt'altro che convergente, basta guardare il grafico di alcune di esse nella seguente Figura (5)

**3.1. Le cose possono andare male...** Una serie uniformemente convergente di funzioni regolarissime può offrire tuttavia una serie derivata non convergente o, perlomeno, non in tutti gli stessi punti

$$\sum_k \frac{\sin k^2 x}{1+k^2}, \quad \sum_k k^2 \frac{\cos k^2 x}{1+k^2}$$

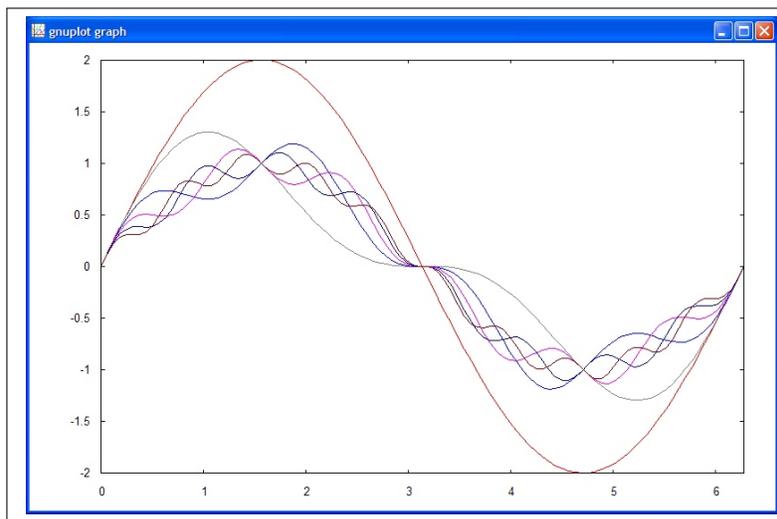


FIGURA 5. Le prime 6 derivate delle  $f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n} \sin(nx)$

La serie di partenza converge in tutto  $R$ , la serie derivata non converge più in 0.

### 3.2. Funzione piccola, derivata piccola ? :

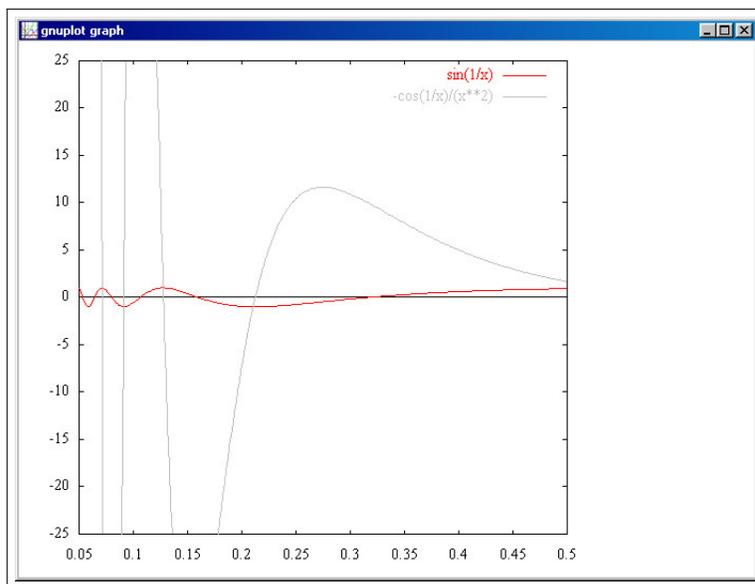


FIGURA 6.  $\sin(1/x)$ ,  $-\cos(1/x)/x^2$

Non é vero: una funzione può essere molto piccola ma avere un grafico con pendenze brevi ma molto ripide: quindi avere grande derivata

(come farebbe  $\sin(1/x)$  ad oscillare tante volte da -1 a +1 se non avesse tratti molto ripidi)



## Le serie di potenze

### 1. Introduzione

Le piú comuni serie di funzioni sono

- I polinomi  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
- Le serie di potenze  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

OSSERVAZIONE 1.1. *Ovviamente tutte le serie di potenze convergono per  $x = 0$  : non é ovvio se debbano, o possano, convergere anche in altri punti.*

La serie

$$1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$$

*non converge in nessun altro punto. Se infatti convergesse in un punto  $x_0 \neq 0$  allora gli addendi  $k! x_0^k$  dovrebbero mantenersi almeno limitati  $|k! x_0^k| \leq M$  mentre é noto che per qualunque  $A$  riesce*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{k!} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k! \left( \frac{1}{A} \right)^k = \infty$$

*ovvero che il fattoriale  $k!$  cresce piú di qualsiasi potenza  $A^k$ .*

### 2. Tante nuove serie

Dalla nota formula

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

seguono numerose altre

- per derivazione:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

- per una seconda derivazione

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) x^{k-2}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

- per integrazione

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

### 2.1. Da una serie di potenze ad altre. Se

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in R$$

allora, naturalmente

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in R$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad \forall x \in R$$

Si incontrano serie di potenze nella formula di Taylor: conosciamo tramite essa numerose serie di potenze associate a note funzioni elementari.

Ad esempio:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{1-x} & 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \sin(x) & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \cos(x) & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ e^x & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \ln(1+x) & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \end{array}$$

## 3. L'intervallo di convergenza

DEFINIZIONE 3.1.

*L'estremo superiore dei moduli dei punti  $x_0$  nei quali la serie di potenze converge si dice Raggio di convergenza della serie.*

TEOREMA 3.2 (Il risultato fondamentale). *Se una serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

*converge per un valore  $x_0 \neq 0$  allora*

- *converge assolutamente e uniformemente in ogni intervallo  $[-r, r]$  con  $r < |x_0|$*

- anche le serie derivate da essa convergono assolutamente e uniformemente negli stessi intervalli

DIMOSTRAZIONE.

- Se la serie converge in  $x_0$  allora i suoi termini, in tale punto, sono infinitesimi: in particolare sono certamente tutti limitati in modulo da una stessa opportuna costante positiva  $M$

$$|a_k x_0^k| \leq M \quad \Rightarrow \quad |a_k| \leq \frac{M}{|x_0|^k}$$

Se ora consideriamo un qualsiasi altro  $x$  con  $|x| < |x_0|$  riesce

$$|a_k x^k| \leq M \left( \frac{|x|}{|x_0|} \right)^k$$

I termini a maggiorare sono quelli di una serie geometrica,

$$\rho = \frac{|x|}{|x_0|} < 1,$$

convergente: quindi la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  é assolutamente convergente in ogni punto  $|x| < |x_0|$

La convergenza osservata é addirittura uniforme in ogni intervallo  $[-r, r]$  con  $r < |x_0|$ : infatti detta  $f(x)$  la somma riesce se  $x \in [-r, r]$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

la soglia  $n_\varepsilon$  adatta al secondo membro della disuguaglianza precedente é quindi buona per tutti gli  $x \in [-r, r]$ .

- Se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge in  $x_0$  allora in tale punto converge anche la serie derivata  $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ .

Infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} k |a_k x^{k-1}| \leq \frac{M}{|x_0|} \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \frac{|x|}{|x_0|} \right)^{k-1}$$

La convergenza della serie a destra si riconosce ad esempio col criterio del rapporto.

□

NOTA: Il risultato precedente, teorema (3.2), é interessante se  $x_0 \neq 0$  e stabilisce che le serie di potenze possono

- convergere nel solo punto  $x = 0$

- oppure convergere in tutto un intervallo  $(-r, r)$
- oppure possono convergere in tutto l'asse reale.

**Riassumendo** nel teorema (3.2) é stato riconosciuto che:

- una serie di potenze e tutte le sue serie derivate (prima, seconda, ...) hanno lo stesso raggio di convergenza  $R$
- all'interno dell'intervallo  $(-R, R)$  la serie di potenze e tutte le sue serie derivate convergono assolutamente
- in ogni intervallo chiuso  $[-r, r] \subseteq (-R, R)$  la serie di potenze e tutte le sue serie derivate convergono uniformemente.

**3.1. Il criterio del rapporto.** Applicato alla serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$  conduce a considerare il

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |x| < 1$$

quindi detto

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

il raggio di convergenza risulta

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

con le prevedibili estensioni nei casi  $\lambda = 0$  oppure  $\lambda = \infty$ .

## Parte 5

# Il teorema della divergenza



## Il teorema di Torricelli in due dimensioni

### 1. Introduzione

Il teorema fondamentale del calcolo afferma che

$$(9) \quad \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

Il significato, evidente, della formula é il legame tra

- l'integrale di una derivata  $f'(x)$  su un intervallo
- i valori della primitiva  $f(x)$  agli estremi dell'intervallo
- valori moltiplicati
  - per  $+1$  nell'estremo destro,
  - per  $-1$  nell'estremo sinistro.

OSSERVAZIONE 1.1. *Gli argomenti di questo capitolo sono contenuti nel §5.1 del Vol. II, pag. 543.*

*Il linguaggio usato nel libro é, tuttavia, non comune in questo corso: si chiama linguaggio delle forme differenziali, e sará considerato in seguito, a pagina 223, solo a titolo informativo.*

Sia  $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  un rettangolo, l'integrale

$$\iint_R f_x(x, y) dx dy$$

si calcola, come tutti gli integrali doppi estesi a rettangoli con l'espressione

$$\int_c^d dy \int_a^b f_x(x, y) dx$$

sulla quale, applicando la (9), si ottiene

$$(10) \quad \iint_R f_x(x, y) dx dy = \int_c^d (f(b, y) - f(a, y)) dy$$

## 2. Il flusso traverso il bordo

Indichiamo con  $\partial R$  la frontiera di  $R$  e con  $\vec{\nu}$  il versore normale a tale frontiera, diretto verso l'esterno di  $R$

$$\vec{\nu} = \begin{cases} (1, 0) & x = b, c \leq y \leq d \\ (0, 1) & a \leq x \leq b, y = d \\ (-1, 0) & x = a, c \leq y \leq d \\ (0, -1) & y = c, a \leq x \leq b \end{cases}$$

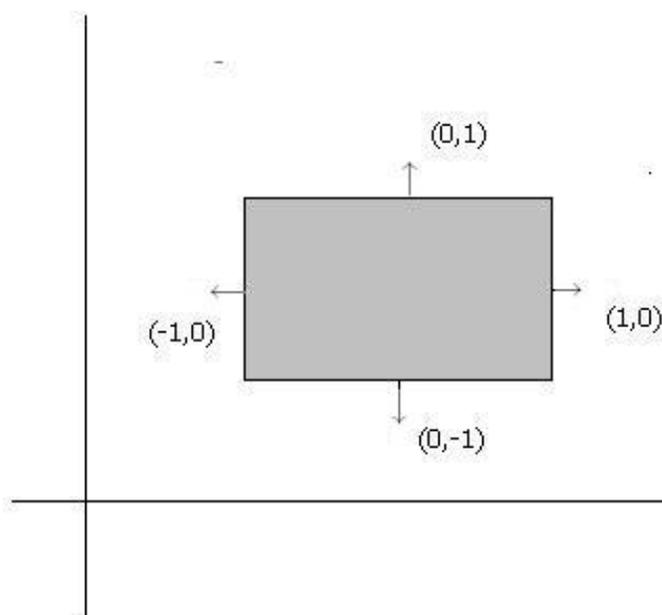


FIGURA 1. Il versore normale esterno ad un rettangolo

La (10) si può scrivere servendosi di un integrale curvilineo su  $\partial R$

$$(11) \quad \iint_R f_x(x, y) dx dy = \int_{\partial R} f(x, y) \cdot \nu_x ds$$

Un discorso analogo conduce alla formula

$$(12) \quad \iint_R g_y(x, y) dx dy = \int_a^b (g(x, d) - g(x, c)) dx$$

e quindi alla

$$(13) \quad \iint_R g_y(x, y) dx dy = \int_{\partial R} g(x, y) \cdot \nu_y ds$$

Le due formule (11) e (13) sono riassunte nell'interpretazione vettoriale seguente:

TEOREMA 2.1 (Teorema della divergenza). *Sia  $R$  un rettangolo*

$$\vec{F}(x, y) = \{f(x, y), g(x, y)\}$$

*riesce*

$$(14) \quad \iint_R \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial R} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

L'integrale a secondo membro della (14)

$$\int_{\partial R} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

si chiama

*flusso del vettore  $F$  uscente da  $\partial R$*

Il risultato (14) evidenzia il legame tra il flusso del vettore  $F$  e il valore, scalare, della divergenza di  $\vec{F}$  dentro il rettangolo.

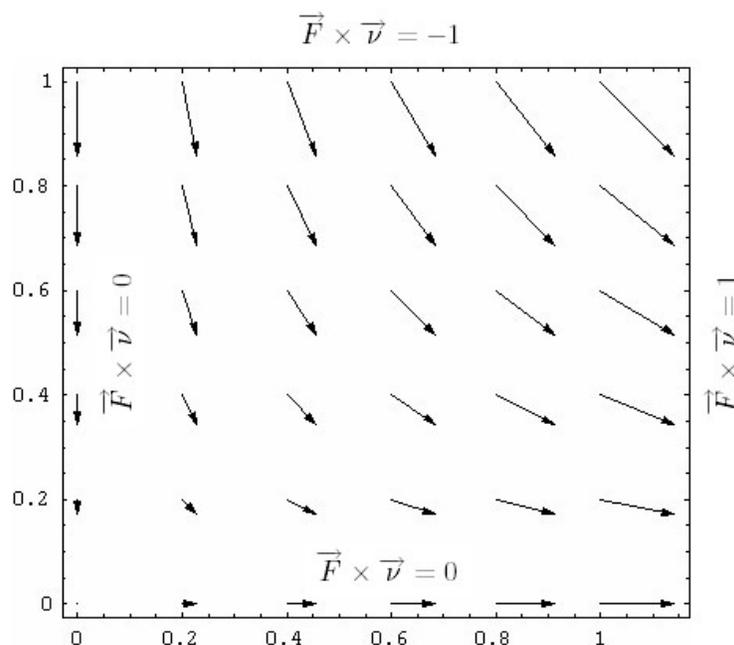


FIGURA 2. Flusso uscente di  $F = \{x, -y\}$  attraverso il quadrato  $(0, 0) - (1, 1)$

Ad esempio i vettori che hanno divergenza nulla hanno un flusso altrettanto nullo.

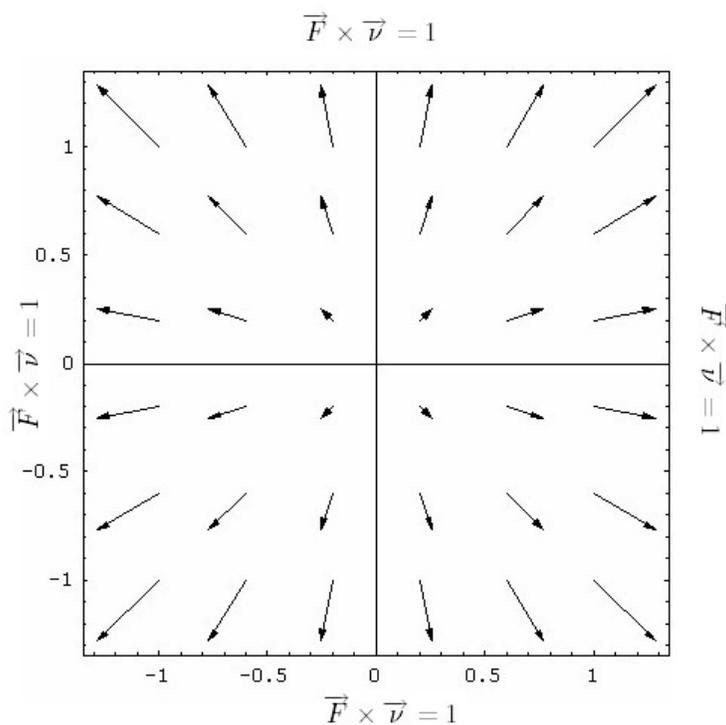


FIGURA 3. Il flusso uscente di  $G = \{x, y\}$  attraverso il quadrato  $Q = [-1, 1] \times [1, 1]$

### 2.1. $F = \{x, -y\}$ .

Qual'è il flusso del vettore  $F = \{x, -y\}$  uscente dalla frontiera del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , vedi Figura 2 ?

Risposta: zero ! Infatti la divergenza di  $F$  vale 0.

Verrebbe da dire che...

*tanto ne entra quanto ne esce..!*

### 2.2. $G = \{x, y\}$ .

Consideriamo invece il caso del vettore  $G = \{x, y\}$  e stimiamone il flusso uscente dal quadrato  $Q = [-1, 1] \times [1, 1]$ , vedi Figura 3. Verrebbe da dire che

*... il campo  $G$  diverge dall'origine !*

La divergenza di  $G$  vale 2: il flusso uscente dal quadrato  $Q$  assegnato vale 8 (capite perché ? ).

**2.3. Qualche conto.** Consideriamo il rettangolo (quadrato)  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , il versore normale esterno sui quattro lati di  $Q$ , numerati da quello in basso a proseguire in senso antiorario, é

$$\nu_1 = \{0, -1\}, \quad \nu_2 = \{1, 0\}, \quad \nu_3 = \{0, 1\}, \quad \nu_4 = \{-1, 0\},$$

Sia  $G = \{x, y\}$  é facile calcolare il prodotto scalare

$$G \times \nu$$

esso vale 1, fate i 4 conti, su tutti e 4 i lati, quindi

$$\int_{\partial Q} G \times \nu \, ds = \int_{\partial Q} ds = 8$$

Del resto si ha

$$\operatorname{div}G = 2$$

e, quindi

$$\iint_Q \operatorname{div}G \, dxdy = 2 \iint_Q dxdy = 8$$

Consideriamo ora il flusso dell'altro vettore  $F = \{x, -y\}$  sempre uscente dallo stesso  $Q$ : questa volta il prodotto scalare

$$F \times \nu$$

vale 1 su due dei 4 lati e -1 sugli altri due. É evidente che

$$\int_{\partial Q} F \times \nu \, ds = 0$$

Infatti  $\operatorname{div}F = 0$

**ESEMPIO 2.2.** *Il campo*

$$\vec{F} = \{1 + x^2, 1 - y^2\}$$

*é disegnato in Figura 4, limitatamente al quadrato  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ : si vede bene che il attraverso le due basi  $y = -1$  e  $y = 1$  non c'è flusso, né entrante né uscente perché  $F$  é parallelo alle basi stesse, ovvero su tali basi il prodotto scalare*

$$F \times \nu = 0$$

*Sui due lati verticali invece c'è flusso: ma la simmetria evidente mostra che, in definitiva*

tanto ne entra quanto ne esce...

In Figura 4 a destra si vede il grafico della divergenza

$$\operatorname{div}F = 2x - 2y$$

si tratta di un piano obliquo sul quadrato  $Q$ , simmetrico rispetto alla diagonale: é evidente che

$$\iint_Q (2x - 2y) dx dy = 0$$

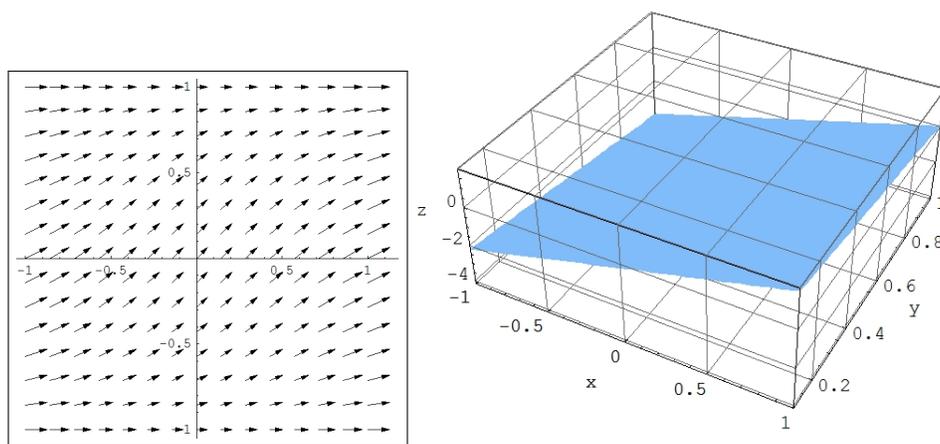


FIGURA 4.  $F = \{1 + x^2, 1 - y^2\}$  e  $\operatorname{div}F = 2x - 2y$

### 3. Il caso di un triangolo

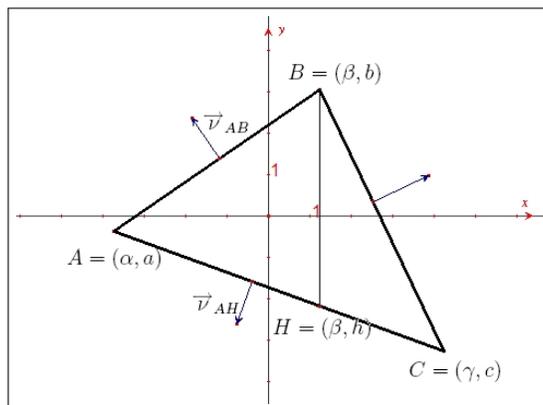
Sia  $T \subseteq \Omega$  il triangolo  $\triangle_{ABC}$  di Figura 5 : detta  $H$  l'intersezione della verticale per  $B$  con  $AC$  indichiamo con  $T_1 = \triangle_{ABH}$  e  $T_2 = \triangle_{CHB}$

$$\begin{cases} A = (\alpha, a) \\ B = (\beta, b) \\ C = (\gamma, c) \end{cases} \rightarrow H = (\beta, h)$$

Sia  $f(x, y)$  una funzione di classe  $C^1(\Omega)$  riesce

$$\iint_T f_y(x, y) dx dy = \iint_{T_1} f_y(x, y) dx dy + \iint_{T_2} f_y(x, y) dx dy$$

Ciascuno dei due integrali a secondo membro si calcola agevolmente, con la formula di riduzione degli integrali doppi, tenuto conto che  $T_1$  e  $T_2$  sono domini normali rispetto all'asse  $x$ .

FIGURA 5.  $\triangle ABC$ 

Parametrizzazioni dei segmenti  $AB$  e  $AH$  sono:

$$\begin{aligned}
 AB : \quad & \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha) \end{cases} & t \in [\alpha, \beta] \\
 AH : \quad & \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = a + \frac{h-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi

(15)

$$\begin{aligned}
 & \iint_{T_1} f_y(x, y) \, dx \, dy = \\
 & \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ f \left( t, a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha) \right) - f \left( t, a + \frac{h-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha) \right) \right\} dt
 \end{aligned}$$

L'integrale semplice a secondo membro, o meglio i due integrali semplici ai quali si riduce per linearità, si prestano ad una interessante interpretazione in termini di integrali curvilinei.

Indichiamo con

$$\vec{v}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{b-a}{\beta-\alpha} \right)^2}} \left\{ -\frac{b-a}{\beta-\alpha}, 1 \right\}$$

il versore normale ad  $AB$  diretto verso l'esterno di  $T_1$ , vedi Figura 5, e con

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{b-a}{\beta-\alpha}\right)^2} dt$$

l'elemento curvilineo sempre su  $AB$ , riesce

$$(16) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f\left(t, a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha)\right) dt = \int_{AB} f(x, y) \nu_y ds$$

avendo indicato con  $\nu_y$  la seconda componente del versore  $\vec{\nu}_{AB}$ .  
Indicato analogamente con

$$\vec{\nu}_{AH} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h-a}{\beta-\alpha}\right)^2}} \left\{ \frac{h-a}{\beta-\alpha}, -1 \right\}$$

il versore normale ad  $AH$  diretto verso l'esterno di  $T_1$ , e con

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{h-a}{\beta-\alpha}\right)^2} dt$$

l'elemento curvilineo su  $AH$ , riesce

$$(17) \quad - \int_{\alpha}^{\beta} f\left(t, a + \frac{h-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha)\right) dt = \int_{AH} f(x, y) \nu_y ds$$

avendo indicato con  $\nu_y$  la seconda componente<sup>1</sup> del versore  $\vec{\nu}_{AH}$ .  
Tenuto inoltre conto che il versore normale a  $BH$  è diretto verso l'esterno di  $T_1$  é

$$\nu_{BH} = \{1, 0\}$$

si ha, ovviamente,

$$(18) \quad \int_{BH} f(x, y) \nu_y ds = 0$$

La (15), tenuto conto delle (16), (17) e (18), si riscrive come

$$\iint_{T_1} f_y(x, y) dx dy = \int_{\partial T_1} f(x, y) \nu_y ds$$

avendo indicato con  $\nu_y$  la seconda componente del versore normale esterno a  $\partial T_1$

Lo stesso conto fatto sull'altro triangolo  $T_2$  porta naturalmente alla analoga

<sup>1</sup>Si noti l'uso, corretto, dei segni.

$$\iint_{T_2} f_y(x, y) dx dy = \int_{\partial T_2} f(x, y) \nu_y ds$$

e quindi, per somma,

$$\iint_T f_y(x, y) dx dy = \int_{\partial T_1} f(x, y) \nu_y ds + \int_{\partial T_2} f(x, y) \nu_y ds$$

Tenuto conto che  $\partial T_1$  e  $\partial T_2$  hanno in comune il segmento  $BH$  sul quale le due normali, esterna a  $T_1$  e esterna a  $T_2$ , sono opposte si riconosce che

$$\int_{\partial T_1} f(x, y) \nu_y ds + \int_{\partial T_2} f(x, y) \nu_y ds = \int_{\partial T} f(x, y) \nu_y ds$$

e quindi

$$\iint_T f_y(x, y) dx dy = \int_{\partial T} f(x, y) \nu_y ds$$

Un conto analogo, riferito all'integrale su  $T$  della derivata  $g_x(x, y)$  di una funzione  $g \in C^1(\Omega)$ , conduce a

$$\iint_T g_x(x, y) dx dy = \int_{\partial T} g(x, y) \nu_x ds$$

#### 4. Il teorema della divergenza

Indichiamo con

$$\vec{F}(x, y) = \{g(x, y), f(x, y)\}$$

un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega)$ : le precedenti relazioni implicano

$$\iint_T (g_x(x, y) + f_y(x, y)) dx dy = \int_{\partial T} (g(x, y) \nu_x + f(x, y) \nu_y) ds$$

formula che indicato con

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = g_x(x, y) + f_y(x, y)$$

si scrive nella forma vettoriale seguente

$$\iint_T \operatorname{div} \vec{F}(x, y) dx dy = \int_{\partial T} \vec{F}(x, y) \cdot \vec{\nu}(x, y) ds$$

detta appunto

*teorema della divergenza.*

Per ora la relazione é stata stabilita in due casi

- $T$  sia un rettangolo,
- $T$  sia un triangolo.



## La prima generalizzazione

### 1. Il caso dei plurirettangoli

Abbiamo riconosciuto il *Teorema della divergenza* (2.1) sui rettangoli: consideriamo ora il caso, piú generale, dei plurirettangoli. Consideriamo un insieme  $E$  del piano ottenuto dall'unione di due rettangoli  $R_1 = [A, B, CD]$ ,  $R_2 = [P, Q, R, S]$  adiacenti.

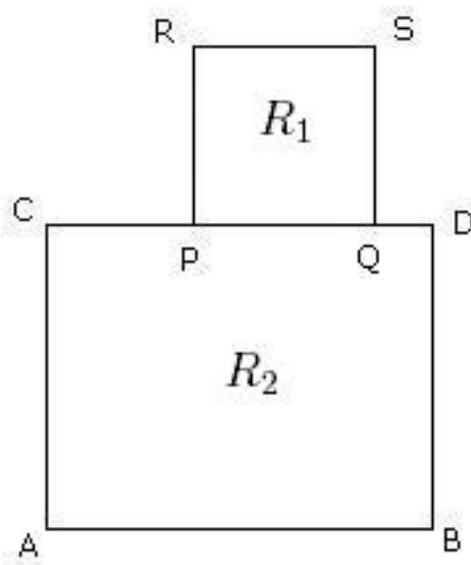


FIGURA 1.  $E$  unione di due rettangoli

Su ciascuno dei due rettangoli possiamo applicare la formula (24):

$$\begin{aligned} \iint_{R_1} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy &= \int_{\partial R_1} \vec{F} \times \vec{\nu}_1 \, ds \\ \iint_{R_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy &= \int_{\partial R_2} \vec{F} \times \vec{\nu}_2 \, ds \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\iint_{R_1 \cup R_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial R_1} \vec{F} \times \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\partial R_2} \vec{F} \times \vec{\nu}_2 \, ds$$

avendo tenuto conto, a primo membro, della nota additivá degli integrali estesi a domini quali  $R_1$  ed  $R_2$ .

Per quanto concerne il secondo membro il discorso é piú delicato: tuttavia é evidente che il flusso lungo il tratto  $PQ$ , comune alle due frontiere di  $R_1$  e di  $R_2$ , viene considerato due volte:

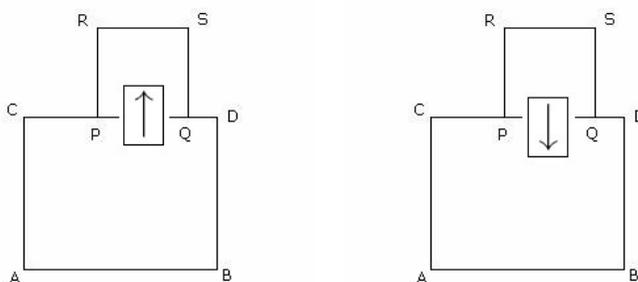


FIGURA 2. I due flussi sul segmento  $PQ$ .

- una prima volta (normale orientata dal basso verso l'alto) quando  $PQ$  é parte della frontiera di  $R_1$
- una seconda volta (normale orientata dall'alto verso il basso) quando  $PQ$  é uno dei 4 lati frontiera di  $R_2$
- i due flussi evidentemente si compensano !

A conti fatti si riconosce che i due integrali a secondo membro rappresentano il flusso di  $F$  uscente dalla frontiera  $\partial(R_1 \cup R_2)$ .

La formula é pertanto

$$\iint_{R_1 \cup R_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial R_1 \cup R_2} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

avendo indicato con  $\vec{\nu}$  il versore normale esterno alla frontiera di  $R_1 \cup R_2$

OSSERVAZIONE 1.1. *É naturale che la normale manca negli spigoli: ma questo non cambia il risultato.*

É evidente che quanto riconosciuto per insiemi unione di due rettangoli puó essere riproposto per le unioni di tre, di quattro, ecc..

Vale pertanto il seguente:

TEOREMA 1.2 (Prima generalizzazione). *Sia  $F(x, y)$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ , sia  $P$  un plurirettangolo, riesce*

$$\iint_P \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial P} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

essendo  $\nu$  il versore normale esterno alla frontiera  $\partial P$  del plurirettangolo  $P$ .

## 2. Il caso dei poligoni

Abbiamo riconosciuto il *Teorema della divergenza* (2.1) sui triangoli: consideriamo ora il caso, piú generale, dei poligoni.

Consideriamo un quadrilatero  $E = ABCD$  del piano, unione di due triangoli  $T_1 = [A, B, D]$ ,  $T_2 = [B, D, C]$ .

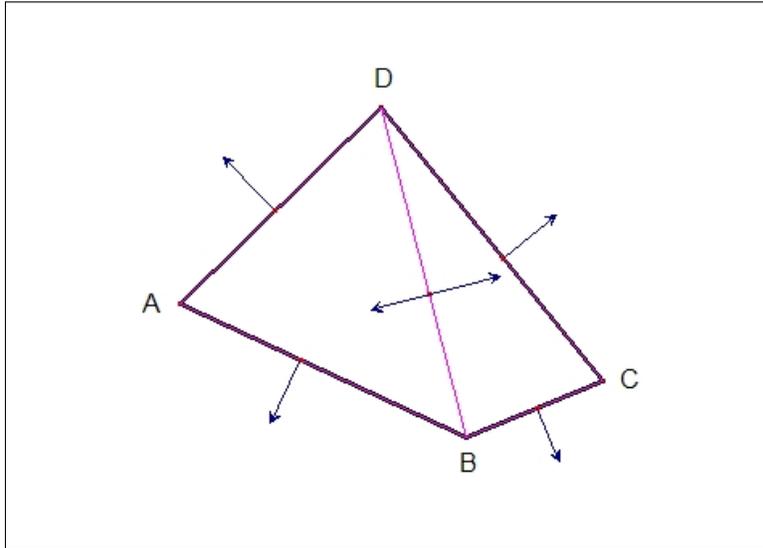


FIGURA 3.  $E$  unione di due rettangoli

Su ciascuno dei due triangoli possiamo applicare la formula (14):

$$\begin{aligned} \iint_{T_1} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy &= \int_{\partial T_1} \vec{F} \times \vec{\nu}_1 \, ds \\ \iint_{T_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy &= \int_{\partial T_2} \vec{F} \times \vec{\nu}_2 \, ds \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\iint_{T_1 \cup T_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial T_1} \vec{F} \times \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\partial T_2} \vec{F} \times \vec{\nu}_2 \, ds$$

avendo tenuto conto, a primo membro, della nota additività degli integrali estesi a domini quali  $T_1 \cup T_2$ .

Per quanto concerne il secondo membro il discorso é piú delicato: tuttavia é evidente che il flusso lungo il tratto  $BD$ , comune alle due frontiere di  $T_1$  e di  $T_2$ , viene considerato due volte:

- una prima volta con la normale orientata esternamente a  $T_1$
- una seconda volta con la normale orientata esternamente a  $T_2$
- i due flussi evidentemente si compensano !

A conti fatti si riconosce che i due integrali a secondo membro rappresentano il flusso di  $F$  uscente dalla frontiera  $\partial(T_1 \cup T_2)$ .

La formula é pertanto

$$\iint_{T_1 \cup T_2} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial T_1 \cup T_2} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

avendo indicato con  $\vec{\nu}$  il versore normale esterno alla frontiera di  $R_1 \cup R_2$

*OSSERVAZIONE 2.1. É naturale che la normale manchi negli spigoli: ma questo non cambia il risultato.*

É evidente che quanto riconosciuto per i quadrilateri, unione di due triangoli puó essere riproposto per le unioni di tre, di quattro, ecc..

Vale pertanto, dopo il caso dei plurirettangoli anche il seguente:

**TEOREMA 2.2** (Seconda generalizzazione). *Sia  $F(x, y)$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ , sia  $P$  un poligono (non intrecciato), riesce*

$$\iint_P \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial P} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

*essendo  $\nu$  il versore normale esterno alla frontiera  $\partial P$  del plurirettangolo  $P$ .*

### 3. Il teorema della divergenza

Un cerchio, un'ellisse, come pure moltissimi altri insiemi del piano molto comuni e molto regolari non sono plurirettangoli.

E allora ?

Il teorema della divergenza non si applica ad essi direttamente ma si riconosce la sua validitá piú generale (e quindi anche relativamente a cerchi, ellissi, ecc.) con un discorso di approssimazione.

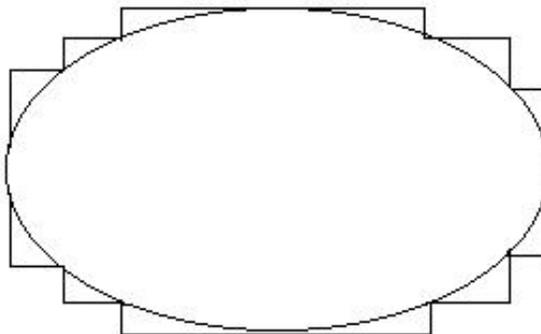


FIGURA 4. Approssimiamo un'ellisse con un plurirettangolo.

Riferiamoci, ad esempio, al caso di un'ellisse  $E$ :

- possiamo inscrivere nell'ellisse  $E$  plurirettangoli  $P$  molto vicini all'ellisse stessa nel senso che
  - hanno quasi la stessa area:

$$\iint_P \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy \cong \iint_E \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy$$

- la frontiera  $\partial P$  dei plurirettangoli e la frontiera  $\partial E$  dell'ellisse sono molto vicine:

$$\int_{\partial P} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds \cong \int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

- allora...

$$\iint_E \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds$$

**OSSERVAZIONE 3.1** (La dimostrazione delle approssimazioni). *Delle due approssimazioni sulle quali si è basata la generalizzazione da plurirettangoli a domini approssimabili con essi la prima è quasi ovvia: la seconda molto meno.*

*Spendiamo nel seguito qualche parola per rendere anche tale seconda approssimazione accettabile.*

Detto

$$F = \{X(x, y), Y(x, y)\}$$

studiamo a tale scopo la differenza che intercorre tra

$$(19) \quad \int_{\mathcal{P}} F \times \nu ds \quad \int_{\mathcal{C}} F \times \nu ds$$

essendo  $\mathcal{P}$  i lati rettilinei e  $\mathcal{C}$  la porzione curva del dominio di Figura 5

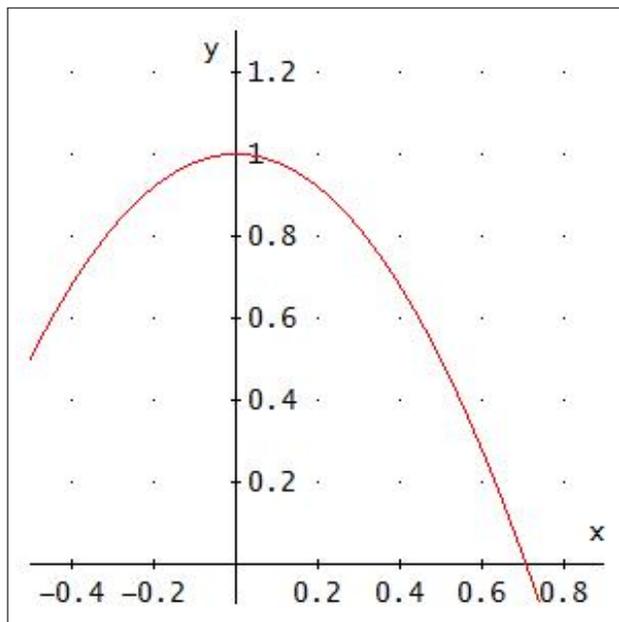


FIGURA 5. poligonale  $\mathcal{P}$  e tratto curvilineo  $\mathcal{C}$

Riesce

$$\int_{\mathcal{P}} F \times \nu ds = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} X(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} Y(x, y_0) dx$$

Detta  $y = g(x)$  l'espressione cartesiana del lato curvo si ha del resto, con il cambio di variabile  $y = g(x)$ ,

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} X(x_0, y) dy = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} X(x_0, g(x))(-g'(x)) dx$$

Il versore normale alla parte curva é

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2(x)}} \{-g'(x), 1\}$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} F \times \nu ds = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [-X(x, g(x))g'(x) + Y(x, g(x))] dx$$

La differenza  $\Delta$  dei due integrali di cui in (5), pertanto é

$$\Delta = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [X(x_0, g(x)) - X(x, g(x))] g'(x) dx + \\ + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [Y(x, y_0) - Y(x, g(x))] dx$$

Indicata con  $M$  una costante che maggiori  $|g'(x)|$  e le costanti di Lipschitz sia della  $X(x, y)$  che della  $Y(x, y)$  riesce

$$|\Delta| \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M^2 |\Delta x| dx + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M^2 |\Delta x| dx \leq 2M^2 |\Delta x|^2$$

L'esponente 2 con il quale interviene nella maggiorazione il termine  $|\Delta x|$  é quello che rende la approssimazione cercata vera:

supponiamo infatti che nell'approssimazione del dominio (potete pensare ad un'ellisse) con un plurirettangolo si siano usati  $n$  trattini orizzontali: se il dominio si proiettava, ad esempio, sul segmento

$$0 \leq x \leq 1$$

- i trattini  $\Delta x$  sono  $1/n$ ,
- di differenze come quelle esemplificate in figura ce ne saranno quindi in equal numero  $n$ ,
- ciascuna di esse si magiora con un  $2M^2/n^2$

la somma di  $n$  di essi si magiora con

$$\frac{2M^2}{n}$$

Ovvero all'aumentare di  $n$  l'approssimazione migliora....

#### 4. I gradienti delle funzioni armoniche

Sia  $f(x, y)$  una funzione armonica,  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ , il campo  $\vec{F}$  costituito dal suo gradiente

$$\nabla f = \{f_x(x, y), f_y(x, y)\}$$

é, ovviamente, a divergenza nulla: infatti

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Quindi riesce

$$\Delta f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial E} \nabla f(x, y) \times \vec{\nu} ds = 0$$

Le due figure seguenti illustrano il campo gradiente di due funzioni armoniche,  $x^3 - 3xy^2$  e  $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$  lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

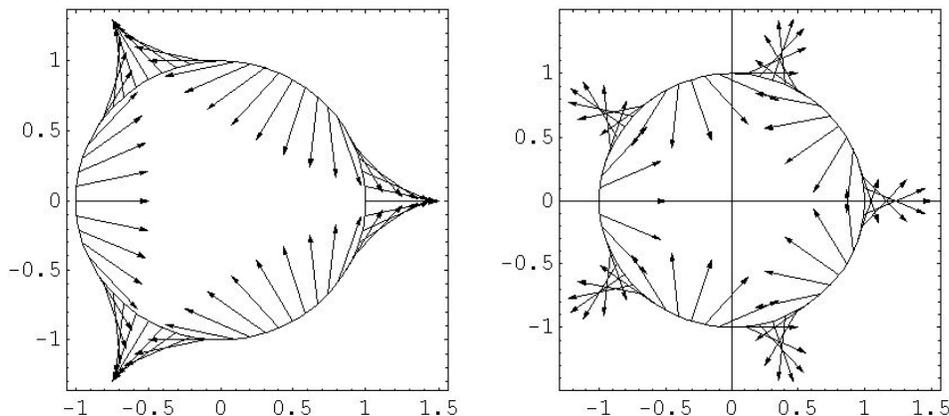


FIGURA 6. I gradienti delle due funzioni armoniche  $x^3 - 3xy^2$  e  $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$  lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1

Si riconoscono, nella prima figura a sinistra, tre archi lungo i quali  $\vec{F} = \nabla f$  punta dentro e tre archi lungo i quali punta fuori, lasciando presagire la nullità del flusso traverso l'intera circonferenza.

Nella seconda figura, a destra, che riguarda il gradiente della seconda funzione  $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ , si riconosce un fatto analogo ma più complesso: cinque archi lungo i quali il gradiente punta dentro e cinque, equivalenti, lungo i quali punta fuori.

OSSERVAZIONE 4.1. Ricordato il significato di derivata direzionale si ha

$$\nabla f \times \nu = \frac{df}{d\nu}$$

e quindi il precedente teorema della divergenza applicato a campi gradiente produce la formula

$$\int_{\partial E} \frac{df}{d\nu} ds = \iint_E \Delta f dx dy$$

dalla quale segue, nel caso di una  $f(x, y)$  armonica

$$\int_{\partial E} \frac{df}{d\nu} ds = 0$$

OSSERVAZIONE 4.2. *Una domanda (collegata all'Osservazione precedente):*

*la cupola di S. Pietro può essere il grafico di una funzione armonica ?*

## 5. Alcune applicazioni

Le formule matematiche sono, sempre, l'uguaglianza di due espressioni. L'uso che si fa di una formula é quello di calcolare uno dei due membri e, tramite esso, conoscere il valore dell'altro.

- Si vuole conoscere il flusso di un vettore traverso la frontiera di un certo insieme  $E$  : si calcola la divergenza del vettore e se ne calcola l'integrale doppio su  $E$
- Si vuole conoscere l'integrale doppio di una certa funzione su  $E$ : si vede se tale funzione coincide con la divergenza di qualche vettore, in caso affermativo si calcola il flusso di tale vettore attraverso la frontiera di  $E$

Il primo dei due usi appare piú naturale del secondo: tuttavia il secondo ha un'applicazione interessante molto semplice. Il caso della funzione

$$f(x, y) = 1$$

che coincide con la divergenza del vettore

$$\frac{1}{2}\{x, y\}$$

Si ha infatti

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 \, dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial E} \{x, y\} \times \nu \, ds$$

OSSERVAZIONE 5.1. *Il vettore  $\frac{1}{2}\{x, y\}$  non é l'unico ad avere divergenza 1: altri, anche piú semplici sono*

$$\{x, 0\}, \quad \{0, y\}$$

*Pertanto riesce anche*

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial E} \{x, y\} \times \nu \, ds = \int_{\partial E} \{x, 0\} \times \nu \, ds = \int_{\partial E} \{0, y\} \times \nu \, ds$$

**6. Corone circolari, ecc.**

L'idea che la frontiera di una regione del piano sia fatta da una sola curva come accade per rettangoli, ellissi, ecc. é naif !

Pensate a una corona circolare ! Il teorema della divergenza vale anche sulle corone circolari: con la ovvia precisazione che il secondo membro della formula, quello che esprime il flusso del vettore, va naturalmente calcolato su tutta la frontiera.

Quindi, pensando al caso di una corona circolare, sia sulla circonferenza esterna sia su quella interna.

Prendere su ogni parte della frontiera  $\partial E$  di  $E$  la normale diretta verso l'esterno corrisponde a prendere sulle due circonferenze orientamenti, o versi di percorrenza, diversi: antiorario quello della esterna, orario quello della interna.

Le Figure di pagine 548 e 549 del Vol. II mostrano del resto alcune ovvie letture relative a regioni piane abbastanza generali.

## Il teorema di Stokes

### 1. L'orientamento

Una curva (un segmento, un arco di parabola, una circonferenza, una lemniscata, ecc) viene orientata nel momento in cui decidiamo il verso secondo il quale percorrerla. É evidente che il segmento AB puó essere percorso da A verso B o viceversa.

É anche evidente che scelto il verso di percorrenza su un archetto di una curva non intersecantesi tale orientamento é deciso su tutta la curva <sup>1</sup>.

Sulle curve  $\partial E$  che contornano gli insiemi E (rettangoli, plurirettangoli, ellissi, ecc) precedentemente incontrate abbiamo usato il versore normale

$$\vec{\nu},$$

orientato verso l'esterno.

Se si decide di scegliere dei due possibili versori tangenti a  $\partial E$  quello

$$\vec{t}$$

tale che la coppia  $(\vec{\nu} \ \vec{t})$  sia una rotazione (nel piano, senza ribaltamenti) della  $(\vec{x} \ \vec{y})$  allora si deduce un orientamento della curva...?

Non sempre: pensate alla lemniscata, una curva a forma di 8 !

L'orientamento di  $\nu$  e quello, conseguente di  $t$  sono disegnati in figura [1](#)

Tale orientamento appare meno sorprendente se si pensa alla lemniscata come limite delle curve

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, \dots, 6$$

disegnate in [Figura 2](#)

**OSSERVAZIONE 1.1.** *Una regola semplice per orientare le curve frontiere di regioni E é quello di pensare di percorrerle nel verso secondo il quale l'interno di E si trovi alla sinistra di chi cammina.*

---

<sup>1</sup>La presenza di eventuali punti di intersezione offre a chi percorresse la curva dei veri e propri bivi...

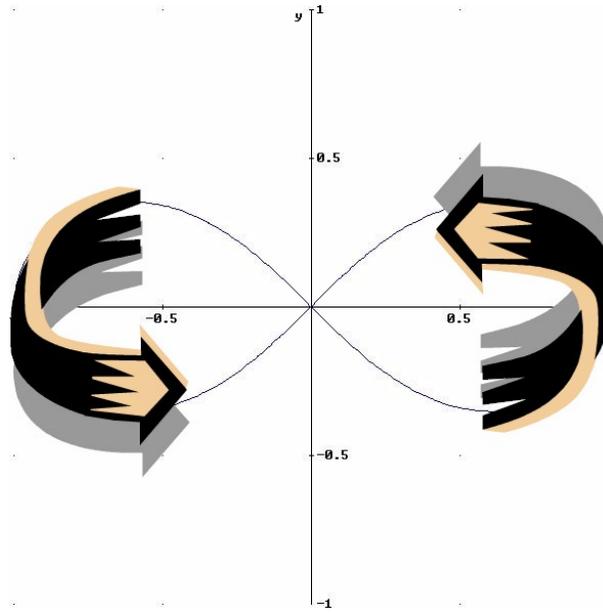


FIGURA 1. L'orientamento della lemniscata, pensata come frontiera di  $E$ , regione limitata determinata dalla lemniscata.

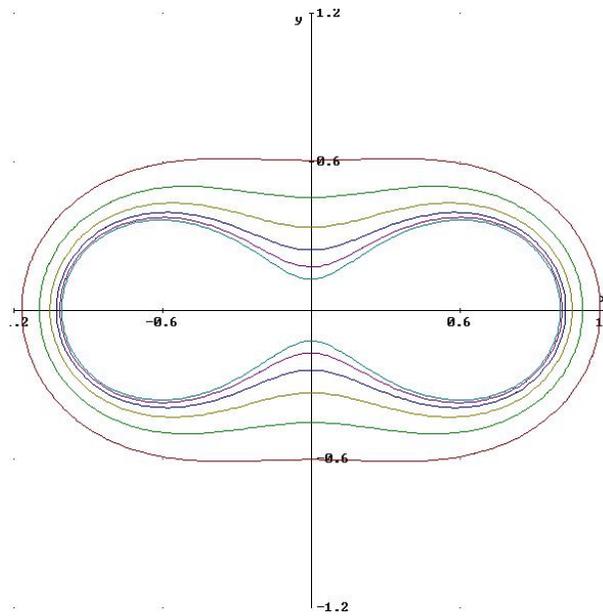


FIGURA 2.  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = \frac{1}{2^k}$ ,  $k = 1, \dots, 6$

**1.1. Il versore tangente a  $\partial E$ .** Sia  $\vec{\nu} = \{\nu_x, \nu_y\}$  il versore normale uscente, allora il versore tangente  $\vec{t}$  deve essere

- ortogonale a  $\vec{\nu}$
- allora

$$\vec{t} = \left\{ \begin{array}{l} t_x = -\nu_y \\ t_y = \nu_x \end{array} \right\}$$

- orientato in modo che  $\vec{\nu}, \vec{t}$  sia una rotazione di  $\vec{x}, \vec{y}$  ovvero

$$\det \begin{vmatrix} \nu_x & \nu_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = 1$$

## 2. Introduzione al teorema di Stokes

Si tratta di una chiave di lettura diversa del fenomeno che abbiamo denominato *Teorema della divergenza*: tenuto presente il legame tra versori tangente e normale a una curva

$$\vec{\nu} = \{\alpha, \beta\}, \quad \Leftrightarrow \quad \vec{t} = \{-\beta, \alpha\}$$

ne segue

$$\begin{aligned} \iint_E \operatorname{div}\{f, g\} \, dx dy &= \int_{\partial E} \{f, g\} \times \vec{\nu} \, ds = \\ (20) \quad &= \int_{\partial E} (f \cdot \alpha + g \cdot \beta) \, ds = \int_{\partial E} (-g \cdot (-\beta) + f \cdot \alpha) \, ds = \\ &= \int_{\partial E} \{-g, f\} \times \vec{t} \, ds \end{aligned}$$

relazione ottenuta ricordando il legame tra versore  $\vec{\nu}$  e versore tangente  $\vec{t}$ . Riscriviamo ora la (20) chiamando  $-g$  come  $u$  e  $f$  come  $v$

$$(21) \quad \int_{\partial E} \{u, v\} \times \vec{t} \, ds = \iint_E (v_x - u_y) \, dx dy$$

Ricordando l'espressione del *rotore* di un vettore  $\{u, v, w\}$

$$\operatorname{rot} \{u, v, w\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

la formula (21) diventa

$$(22) \quad \int_{\partial E} \{u, v\} \times \vec{t} \, ds = \iint_E \operatorname{rot}_z \{u, v, 0\} \, dx dy$$

Il primo membro della 22 si chiama

*circuitazione di  $\{u, v\}$  lungo  $\partial E$*

Indicato con  $F = \{u, v, 0\}$  la (22) si può anche scrivere come

$$(23) \quad \int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{t} \, ds = \iint_E \text{rot } \vec{F} \times \vec{\nu} \, dx dy$$

avendo indicato con  $\nu$  il versore normale del piano  $xy$  in cui è contenuto  $E$  e avendo riconosciuto che, ovviamente

$$\text{rot}_z \vec{F} = \text{rot } \vec{F} \times \vec{\nu}$$

La formula (23) si chiama *teorema di Stokes* : la sua importanza e validità è molto più ampia di quanto non appaia da quanto scritto finora.

### 3. Qualche disegno...

Un primo esempio:

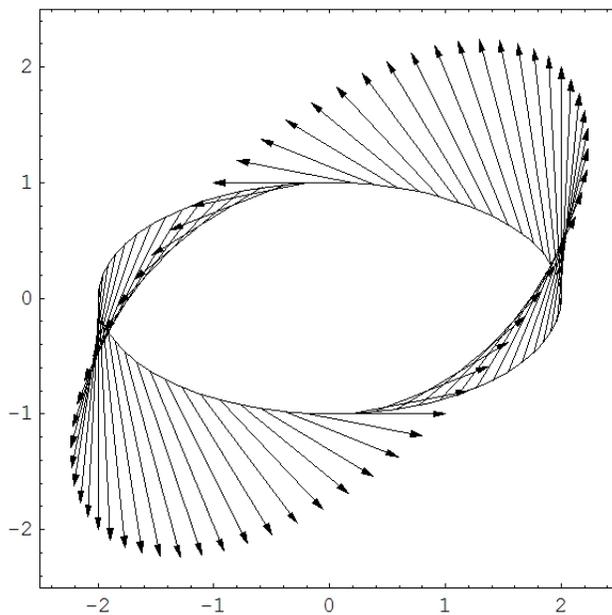


FIGURA 3. Il campo  $F = \{-y, x\}$  lungo l'ellisse  $x^2/4 + y^2 = 1$

In Figura 3 è disegnato il campo  $F = \{-y, x\}$  lungo l'ellisse

$$\mathcal{E} : x^2/4 + y^2 = 1$$

percorrendo l'ellisse in senso antiorario si riconosce che

$$\vec{F} \times \vec{t} > 0$$

quindi anche

$$\int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{t} \, ds > 0$$

Riesce del resto

$$\text{rot}_z(\vec{F}) = 2 \quad \rightarrow \quad \iint_E \text{rot}_z(\vec{F}) \, dx \, dy > 0$$

Quindi riesce plausibile (!!)

$$\int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{t} \, ds = \iint_E \text{rot}_z \vec{F} \, dx \, dy$$

Un secondo esempio:

Consideriamo nelle due Figure seguenti quanto stabilito dalla formula di Stokes: legami tra circuitazione di un campo vettoriale

$$F = \left\{ \frac{-y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2}, 0 \right\}$$

lungo la  $\partial E$  e integrale su  $E$  della componente normale del rotore

$$\text{rot}_z F = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

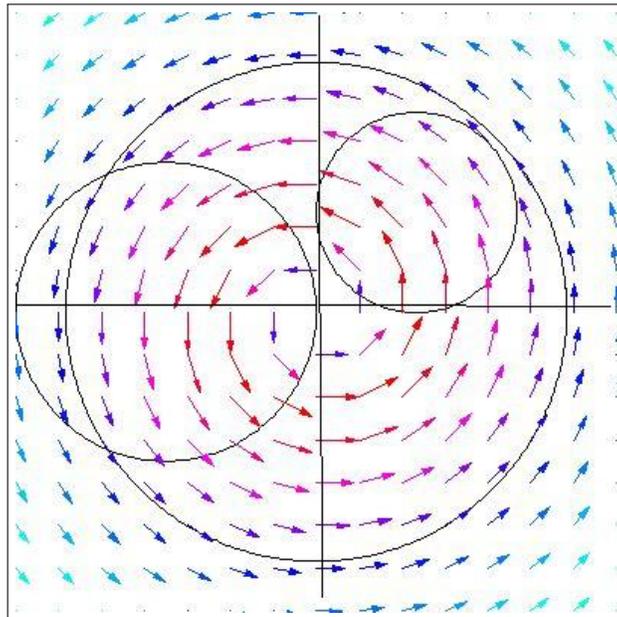


FIGURA 4. Il campo  $F$

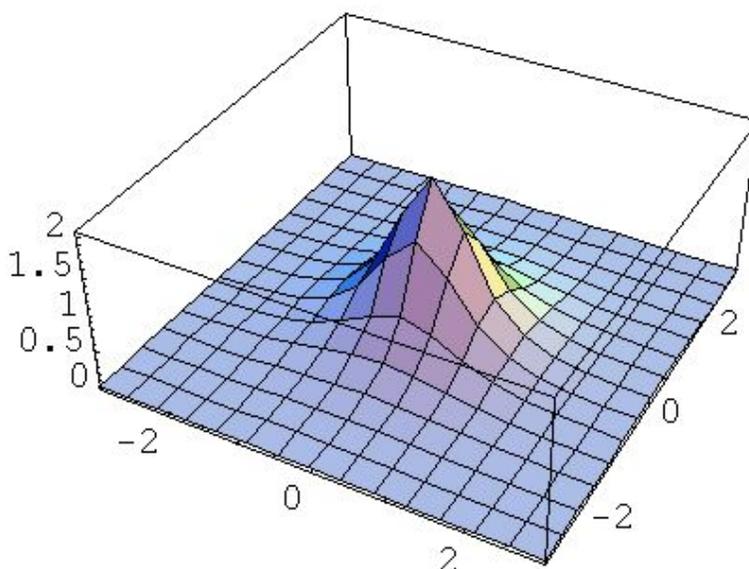


FIGURA 5. La componente normale del rotore

Le regioni  $E$  proposte sono quelle delimitate dalle tre circonferenze che si vedono in Figura 4: le circuitazioni di  $F$  lungo le tre circonferenze frontiere si immaginano immaginando i valori dei prodotti scalari

$$\vec{F} \times \vec{t}.$$

Per una delle tre circonferenze, quella centrale il prodotto scalare é sempre positivo, per le altre due invece cambia segno.

Non é un caso che la circuitazione lungo la circonferenza centrale sia certamente la maggiore:

tutte e tre le circuitazioni possono essere calcolate con il teorema di Stokes eseguendo l'integrale doppio esteso al cerchio che si sta studiando della componente normale del rotore.

Basta guardare il grafico di Figura 5 per riconoscere come tale integrale sia maggiore nel cerchio centrale...

**OSSERVAZIONE 3.1.** *La parola ROTORE...*

*Guardando il campo vettoriale  $F$  disegnato in Figura 4 chiunque direbbe che le freccette che indicano il campo rappresentano le traiettorie di qualcosa che RUOTA intorno all'origine.*

*L'origine é infatti il punto in cui la componente normale del ROTORE é piú grande.*

*Che le due parole RUOTA e ROTORE siano ben scelte nessuno lo puó negare !*

#### 4. I campi conservativi

Un campo vettoriale  $\vec{F}$  si dice conservativo in un aperto  $\Omega$  quando riesce

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} \, ds = 0$$

lungo qualsiasi curva regolare  $C$  chiusa contenuta in  $\Omega$ .

TEOREMA 4.1. *I campi  $\vec{F}$  conservativi sono tutti e soli i gradienti*

$$\nabla U(x, y)$$

*di funzioni  $U(x, y)$  regolari in  $\Omega$ .*

La proprietà di essere conservativo è molto importante: se  $\vec{F}$  rappresenta una forza la conservatività significa

*lavoro nullo sulle curve chiuse*

È molto difficile fornire condizioni minime per decidere se un campo  $\vec{F} = \{F_1, F_2\}$  sia conservativo

- Nel caso di  $\Omega$  convesso abbiamo riconosciuto, pagina 108, che se

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_2$$

allora  $F = \nabla U$  e quindi  $F$  è conservativo.

- una ulteriore situazione favorevole si ha nel caso degli aperti stellati, vedi Lemma di Poincaré, pagina 108,
- Nel caso di aperti  $\Omega$  di tipo generale il precedente teorema di Stokes afferma che:

Se la curva  $C$  è la frontiera di un insieme  $E \subseteq \Omega$  allora

$$\int_C F \times t \, ds = \iint_E \text{rot}_z(F) \, dx dy$$

Quindi se  $\text{rot}_z(F) = 0$  allora  $\int_C F \times t \, ds = 0$ .

Se tutte le curve  $C$  fossero frontiere di  $E \subseteq \Omega$ ...

DEFINIZIONE 4.2 (Connessione semplice). *Gli aperti  $\Omega$  tali che ogni curva chiusa in essi contenuta sia frontiera di un insieme  $E \subseteq \Omega$  si dicono semplicemente connessi.*

OSSERVAZIONE 4.3. *I domini rettangolari sono semplicemente connessi.*

*Le corone circolari non sono semplicemente connesse.*

Riassumendo:

Il teorema di Stokes implica che se  $\text{rot}(F) = 0$  allora  $F = \nabla U$  in aperti semplicemente connessi.

OSSERVAZIONE 4.4. *Il celebre campo*

$$\vec{F}(x, y) = \left\{ -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}$$

del contresempio di pagina 107

- ha rotore nullo,
- ma non é un gradiente.

Attenzione:  $\vec{F}(x, y)$  non é un gradiente in tutto  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  ma é un gradiente in parti di  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  che siano semplicemente connesse.

Ad esempio nel semipiano  $\Omega : x > 0$  riesce

$$\vec{F}(x, y) = \nabla \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si noti che la funzione

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

é  $C^1(\Omega)$  ma non é definita in tutto  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ .

Nel semipiano  $\Phi : y > 0$  riesce invece

$$\vec{F}(x, y) = \nabla \left( -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right)$$

Anche quest'ultima non é definita in tutto  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ .

Né si ottiene qualcosa di meglio pensando di incollare le due funzioni trovate... anche se con un po' di creatività si costruisce facilmente una funzione  $W(x, y)$  definita in  $\Omega \cup \Phi$  potenziale in questo campo per  $\vec{F}(x, y)$ .

$\Omega \cup \Phi$  é infatti ancora un aperto semplicemente connesso: in definitiva si può (anche se non é proprio banale) riconoscere l'esistenza di funzioni  $G(x, y)$  di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$  privato di una semiretta uscente dall'origine, tali che in tale piano tagliato riesca

$$\vec{F}(x, y) = \nabla G(x, y)$$

## La formula di integrazione per parti

### 1. Introduzione

Il titolo integrazione per parti in una dimensione <sup>1</sup> si riferisce al teorema di Torricelli o teorema fondamentale del calcolo riferito al prodotto  $(f.g)'$  :

$$\int_a^b (f.g)' dx = \int_a^b (f'.g + f.g') dx = f.g|_a^b$$

cioé

$$\int_a^b f'.g dx = f.g|_a^b - \int_a^b f.g' dx$$

Il teorema della divergenza e il teorema di Stokes stabiliscono risultati analoghi. Scelte

$$f(x, y) = a(x, y).u(x, y), \quad g(x, y) = b(x, y).v(x, y)$$

si ha, per il teorema della divergenza,

$$(24) \quad \iint_E \{(a.u)_x + (b.v)_y\} dx dy = \int_{\partial E} \{a.u, b.v\} \times \vec{\nu} ds$$

ovvero, sviluppando le derivate nell'integrale a primo membro

$$(25) \quad \iint_E \{a.u_x + b.v_y\} dx dy + \iint_E \{a_x.u + b_y.v\} = \int_{\partial E} \{a.u, b.v\} \times \nu ds$$

ovvero ancora, pensando di prendere uguale a 0 uno dei due fattori  $a$  o  $b$ ,

$$(26) \quad \begin{cases} a = 0 : & \iint_E b.v_y dx dy = \int_{\partial E} b.v.\nu_y ds - \iint_E b_y.v dx dy \\ b = 0 : & \iint_E a.u_x dx dy = \int_{\partial E} a.u.\nu_x ds - \iint_E a_x.u dx dy \end{cases}$$

formule in tutto simili a quelle unidimensionali:

- l'integrale (doppio) di un prodotto sposta la derivazione da un fattore all'altro
- compare, a secondo membro, un addendo relativo alla frontiera.

---

<sup>1</sup>§5.3 pag. 556

**1.1. Il caso dei gradienti.**  $\vec{F} = u\nabla w$

Applicando il teorema della divergenza si ha

$$\int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{\nu} \, ds = \iint_E \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx dy$$

ovvero, tenuto conto dell'espressione della derivata direzionale

$$\nabla w \times \nu = \frac{dw}{d\nu}$$

si ha

$$(27) \quad \int_{\partial E} u \frac{dw}{d\nu} \, ds = \iint_E (\nabla u \times \nabla w + u \Delta w) \, dx dy$$

scambiando  $u$  con  $w$  si ottiene la formula analoga

$$(28) \quad \int_{\partial E} w \frac{du}{d\nu} \, ds = \iint_E (\nabla u \times \nabla w + w \Delta u) \, dx dy$$

Sottraendo la (28) dalla (27) si ha quindi

$$(29) \quad \int_{\partial E} \left( u \frac{dw}{d\nu} - w \frac{du}{d\nu} \right) \, ds = \iint_E (u \Delta w - w \Delta u) \, dx dy$$

**1.2. Un caso particolare.** Provate a considerare la (29) in corrispondenza a  $u = 1$  si ottiene

$$(30) \quad \int_{\partial E} \frac{dw}{d\nu} \, ds = \iint_E \Delta w \, dx dy$$

Il primo membro della (30) rappresenta, pensando ad esempio che la curva  $\partial E$  abbia lunghezza 1, una sorta di valor medio della derivata normale

$$\frac{dw}{d\nu}$$

Se ne ricava quindi che se  $w$  é armonica la sua derivata normale... ha media nulla.

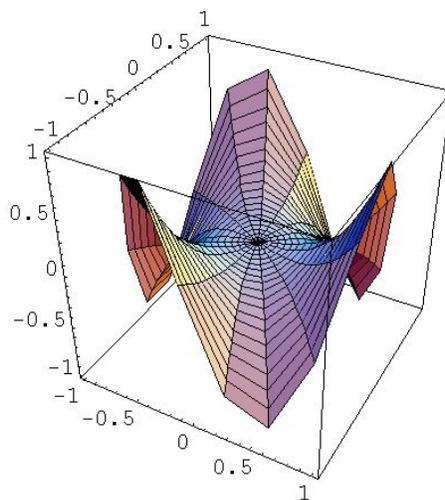


FIGURA 1.  $z = x^3 - 3xy^2$  sul cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$

ESEMPIO 1.1. *Si osservi, vedi Figura 1, come la superficie grafico della funzione armonica  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  arrivi sul bordo, la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  su tre parti in salita,*

$$\frac{df}{dv} > 0$$

*e su altre tre, equivalenti, in discesa... quindi a media nulla !*

ESEMPIO 1.2. *Il grafico di Figura 2*

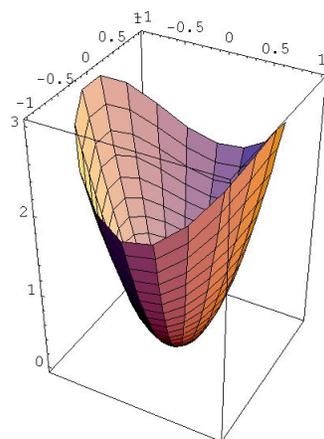


FIGURA 2.  $z = 3x^2 + 2y^2$  sul cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$

rappresenta la funzione  $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$  con  $\Delta f = 10$  : il grafico arriva sul bordo in salita !

Il valor medio della

$$\frac{df}{d\nu}$$

é... 5.

$$\int_{x^2+y^2=1} \frac{df}{d\nu} ds = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 10 dx dy \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{x^2+y^2=1} \frac{df}{d\nu} ds = 5$$

## 2. Valore intrinseco della divergenza

Sia  $F \in C^1$  in tutto un aperto  $\Omega$  : scelto un punto  $P_0 \in \Omega$  consideriamo la famiglia di cerchi di centro  $P_0$  e raggi  $r_n = 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Da un certo  $n_0$  in poi tali cerchi saranno certamente sufficientemente piccoli da essere completamente contenuti in  $\Omega$ .

Applicando il teorema della divergenza abbiamo

$$\iint_{C_n} \operatorname{div}(F) dx dy = \int_{\partial C_n} F \times \vec{\nu} ds$$

Tenuto conto che quanto piú il raggio di  $C_n$  é piccolo tanto piú riesce, per il teorema della media

$$\iint_{C_n} \operatorname{div}(F) dx dy \cong \operatorname{div}(F)|_{P_0} \pi r_n^2$$

si ha

$$(31) \quad \operatorname{div}(F)|_{P_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi r_n^2} \int_{\partial C_n} F \times \vec{\nu} ds$$

Il valore della formula (31) é maggiore di quanto possa apparire a prima vista: la formula fornisce un'espressione della divergenza

*intrinseca*

cioé indipendente dal riferimento cartesiano adottato.

Infatti il flusso del vettore  $F$  uscente dalle circonferenze  $C_n$  non dipende dal riferimento, quindi non dipenderá dal riferimento il quoziente a secondo membro della (31), come pure non ne dipenderá il limite.

Che la divergenza di un vettore avesse un valore intrinseco era tutt'altro che evidente: infatti per calcolare la divergenza di  $F$

- dobbiamo esprimere  $F$  tramite due componenti (e questo corrisponde già ad aver scelto un riferimento)
- dobbiamo inoltre fare su tali componenti delle derivate parziali (cosa che ovviamente dipende da come sono stati posti gli assi)
- ... eppure il risultato ottenuto risulta indipendente dalla scelta degli assi !

OSSERVAZIONE 2.1. *Nessun conto fisico credibile può essere fondato su oggetti che dipendano dal riferimento cartesiano in cui vengono misurati.*

OSSERVAZIONE 2.2. *Le stesse considerazioni esposte per la divergenza di un campo vettoriale si possono fare per il rotore, riconoscendo, anche per esso significato intrinseco.*

### 3. Il laplaciano in coordinate polari

Le osservazioni precedenti unite a quelle della (30), producono la formula <sup>2</sup>

$$(32) \quad \Delta u(r, \theta) \simeq \frac{1}{\text{Area}(R_{hk})} \int_{\partial R_{hk}} \frac{du}{d\nu} ds$$

avendo indicato con  $R_{hk}$  il settore polare

$$r \leq \rho \leq r + h, \quad \theta \leq \vartheta \leq \theta + k$$

la cui area é

$$(33) \quad \text{Area}(R_{hk}) = \frac{1}{2}(r + h)^2 k - \frac{1}{2}r^2 k = hk(r + \frac{1}{2}h)$$

Consideriamo le seguenti espressioni per le derivate

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) = \frac{1}{r}(xu_x + yu_y)$$

$$u_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta) = -yu_x + xu_y$$

Teniamo conto che il versore normale esterno sul settore polare  $R_{hk}$  é composto da

$$\nu = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right\}$$

sugli archi di circonferenza, da

$$\nu = \left\{ -\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right\}$$

sui raggi.

La frontiera su cui calcolare l'integrale della derivata normale é formata da 4 tratti:

- la porzione di circonferenza con  $\theta \leq \vartheta \leq \theta + k$  e raggio  $\rho = r + h$  sulla quale la derivata normale é  $u_r$  stessa
- il tratto del raggio con  $\vartheta = \theta + k$  sul quale la derivata normale é<sup>3</sup>  $u_\nu = u_\theta/r$

<sup>2</sup>Volume II, §5.5 pag. 565-7

<sup>3</sup>Verificare...

- la porzione di circonferenza con  $\theta \leq \vartheta \leq \theta + k$  e raggio  $\rho = r$  sulla quale la derivata normale é  $-u_r$
- il tratto del raggio con  $\vartheta = \theta$  sul quale la derivata normale é  $u_\nu = -u_\theta/r$

L'integrale su  $\partial R_{hk}$  si compone dei 4 addendi elencati in Figura 3

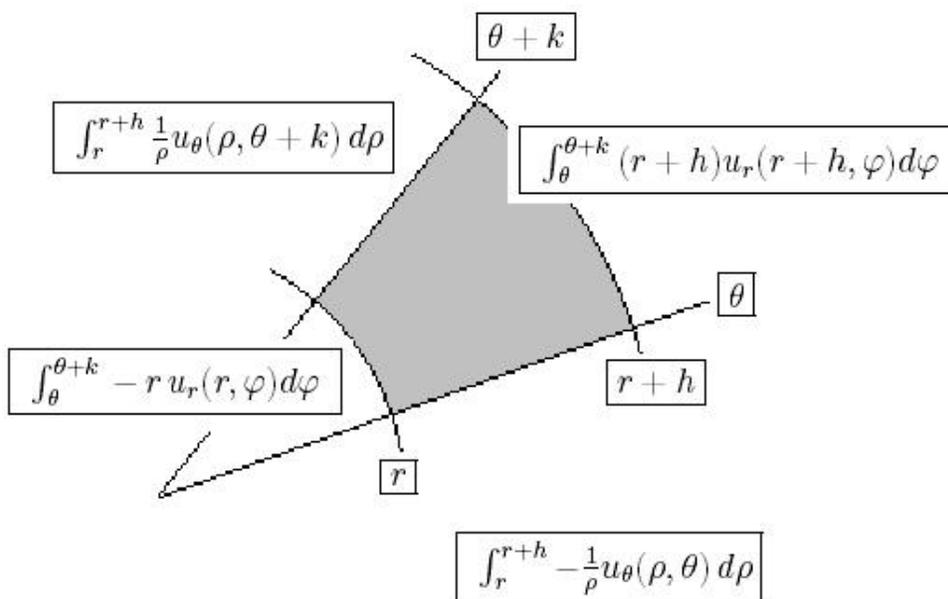


FIGURA 3. L'integrazione della derivata normale sulla frontiera di  $R_{hk}$

Osserviamo ora che

- La somma dei due integrali su  $[\theta, \theta+k]$  coincide con

$$\begin{aligned} & \int_\theta^{\theta+k} d\varphi \int_r^{r+h} [\rho u_\rho(\rho, \varphi)]_\rho d\rho = \\ & = \int_\theta^{\theta+k} d\varphi \int_r^{r+h} \frac{1}{\rho} [\rho u_\rho(\rho, \varphi)]_\rho d\rho \end{aligned}$$

- La somma dei due integrali su  $[r, r + h]$  coincide con

$$\int_r^{r+h} \rho d\rho \int_\theta^{\theta+k} \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) d\varphi$$

- Riesce quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_{hk}} \frac{du}{d\nu} ds &= \int_\theta^{\theta+k} d\varphi \int_r^{r+h} [\rho u_\rho(\rho, \varphi)]_\rho d\rho + \\ &+ \int_r^{r+h} \rho d\rho \int_\theta^{\theta+k} \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

ovvero, tenuto conto della (32)

$$\iint_{R_{hk}} \Delta u dx dy = \int_\theta^{\theta+k} d\varphi \int_r^{r+h} \left\{ \frac{1}{\rho} [\rho u_\rho(\rho, \varphi)]_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) \right\} \rho d\rho$$

ovvero, svolta la derivata rispetto a  $\rho$

$$\iint_{R_{hk}} \Delta u dx dy = \int_\theta^{\theta+k} d\varphi \int_r^{r+h} \left\{ u_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \frac{u_\rho(\rho, \varphi)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) \right\} \rho d\rho$$

Tenuto conto della regola di integrazione in coordinate polari si ha quindi

$$\iint_{R_{hk}} \Delta u dx dy = \iint_{R_{hk}} \left\{ u_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \frac{u_\rho(\rho, \varphi)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) \right\} dx dy$$

da cui segue, data l'arbitrarietà di  $R_{hk}$

$$\Delta u(r, \theta) = \left\{ u_{rr}(r, \theta) + \frac{u_r(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}(r, \theta) \right\}$$

**ESEMPIO 3.1.** Consideriamo la funzione  $u(x, y) = 3x^2 + 2y^2$  : il suo laplaciano in coordinate cartesiane vale

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 10$$

In coordinate polari si ha

$$u(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = 3\rho^2 \cos^2(\theta) + 2\rho^2 \sin^2(\theta) = v(\rho, \theta)$$

e riesce

$$\Delta v(\rho, \theta) = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 10$$

### 3.1. Carattere intrinseco del laplaciano.

La formula (32) consente di riconoscere per il laplaciano un carattere intrinseco analogo a quello riconosciuto per la *divergenza* e per il *rotore*. Scelto un punto  $(x_0, y_0)$  consideriamo le circonferenze

$$C_r : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  : dalla (32) e dal teorema della media per gli integrali doppi segue

$$\Delta u(\xi, \eta) \pi r^2 = \int_{\partial C_r} \frac{du}{d\vec{\nu}} ds$$

e quindi

$$\Delta u(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial C_r} \frac{du}{d\vec{\nu}} ds$$

Essendo il secondo membro evidentemente indipendente dal riferimento, altrettanto indipendente sarà il primo membro !

**ESEMPIO 3.2.** *Consideriamo la precedente funzione  $u(x, y) = 3x^2 + 2y^2$  e pensiamo di lavorare in un riferimento ruotato rispetto al precedente di un angolo di  $\pi/4$ : le nuove coordinate sono*

$$x + iy = (\xi + i\eta)(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \xi \cos(\pi/4) - \eta \sin(\pi/4) \\ y = \xi \sin(\pi/4) + \eta \cos(\pi/4) \end{cases}$$

Riesce pertanto

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 3(\xi \cos(\pi/4) - \eta \sin(\pi/4))^2 + 2(\xi \sin(\pi/4) + \eta \cos(\pi/4))^2 = \\ &= v(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Calcoliamo il laplaciano di  $v(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi, \eta) &= v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \\ &= 6 \cos^2(\pi/4) + 4 \sin^2(\pi/4) + 6 \sin^2(\pi/4) + 4 \cos^2(\pi/4) = 10 \end{aligned}$$

## Superfici

### 1. Superfici cartesiane: piano tangente

Sia  $z = f(x, y)$  una funzione di classe  $C^1$  in un aperto  $\Omega$ : essa é differenziabile e il piano

$$\zeta = f(x, y) + (\xi - x)f_x(x, y) + (\eta - y)f_y(x, y)$$

nelle variabili  $\xi, \eta, \zeta$  é il piano tangente <sup>1</sup> alla superficie nel punto  $P = (x, y, f(x, y))$ .

OSSERVAZIONE 1.1. *La rappresentazione cartesiana  $z = f(x, y)$  non é uno strumento molto duttile : sfugge alla rappresentazione cartesiana perfino la sfera che certamente é una superficie molto comune...*

**1.1. La normale.** Conosciuto il piano tangente si determina, con i suoi stessi coefficienti, un vettore (anzi due) normali alla superficie

$$(34) \quad \pm \{f_x(x, y), f_y(x, y), -1\}$$

I due versori normali sono naturalmente ottenuti normalizzando i precedenti vettori (34)

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \{f_x(x, y), f_y(x, y), -1\}$$

OSSERVAZIONE 1.2. *Il vettore bidimensionale  $\{f_x, f_y\}$  indica la direzione  $xy$  lungo la quale la superficie  $z = f(x, y)$  presenta la maggiore pendenza, indicando il verso della salita.*

*Sul piano  $xy$  il vettore  $\{f_x, f_y\}$  é perpendicolare alle linee di livello della  $f(x, y)$ .*

### 2. Superfici regolari parametriche

Una terna di funzioni (regolari)  $x(t), y(t), z(t)$  rappresentano una curva: l'oggetto *curva* é unidimensionale e la sua rappresentazione si serve di un solo parametro,  $t$ .

---

<sup>1</sup>Volume II, §1.5 c pag. 46

Le superfici sono oggetti bidimensionali e sono, quindi, rappresentate da funzioni di due variabili <sup>2</sup>

$$(35) \quad \begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

La regolarit  richiesta  :

- $\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$  di classe  $C^1$  in un aperto  $\Omega$
- la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(\phi, \psi, \chi)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u & \chi_u \\ \phi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

deve avere rango 2 in  $\Omega$

- ovvero la somma dei quadrati dei determinanti dei tre minori di ordine 2

$$L = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \phi_u & \chi_u \\ \phi_v & \chi_v \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

deve essere positiva in  $\Omega$

OSSERVAZIONE 2.1. *La richiesta che le tre funzioni che forniscono la rappresentazione parametrica della superficie producano una matrice jacobiana di rango 2 (rango massimo) significa, sostanzialmente che vogliamo che le tre funzioni siano*

*abbastanza diverse fra loro*

*Pensate infatti al seguente contreesempio in cui le tre funzioni sono prese regolarissime e anche... ugualissime tra loro*

$$(36) \quad \begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

*Che superficie si rappresenter  ?*

$$x = y = z \geq 0$$

*una semiretta ! Qualcosa di molto lontano dall'idea di superficie.*

### 2.1. Le linee coordinate.

Le curve

$$\begin{aligned} &\phi(u, v_0), \psi(u, v_0), \chi(u, v_0) \\ &\phi(u_0, v), \psi(u_0, v), \chi(u_0, v) \end{aligned}$$

ottenute fissando una delle due variabili  $u, v$  appartengono alla superficie e si dicono linee coordinate.

<sup>2</sup>Volume II, §3.4 pag. 278

Puó accadere che le linee coordinate siano ortogonali tra loro.

I vettori

$$(37) \quad \begin{aligned} \vec{X}_u &= \{\phi_u(u, v_0), \psi_u(u, v_0), \chi_u(u, v_0)\} \\ \vec{X}_v &= \{\phi_v(u_0, v), \psi_v(u_0, v), \chi_v(u_0, v)\} \end{aligned}$$

sono tangenti alle linee coordinate.

I vettori  $\vec{X}_u$  ed  $\vec{X}_v$  non sono paralleli: infatti la matrice jacobiana da essi formata ha, per ipotesi, rango 2.

**2.2. La normale.** Se  $\vec{X}_u$  ed  $\vec{X}_v$  sono due vettori tangenti alla superficie e non paralleli tra loro allora il prodotto vettoriale

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v$$

é normale alla superficie.

**2.3. Localmente cartesiane.** Le superfici parametriche regolari somigliano, localmente, a superfici cartesiane: infatti l'ipotesi che la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(\phi, \psi, \chi)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u & \chi_u \\ \phi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

abbia rango 2 consente di ricavare da due equazioni del sistema, ad esempio dalle  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$   $u, v$  in funzione di  $x, y$ . Sostituendo nella terza si ritorna ad un'espressione

$$z = f(x, y)$$

cioé la superficie é, in un tratto, il grafico della funzione  $z = f(x, y)$ . In un altro tratto sará forse il grafico di una  $y = g(x, z)$  ecc. ecc.

### 3. Alcune superfici fondamentali

Consideriamo in questo paragrafo alcune superfici molto comuni, fornendo anche il programma `GnuPlot` per rappresentarle.

**3.1. Piani.** Tre punti diversi

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3),$$

determinano un piano. Se le tre quote sono uguali

$$a_3 = b_3 = c_3 = h$$

il piano é  $z = h$ . Analogo discorso se fossero uguali le tre ascisse o le tre ordinate.

Altrimenti l'espressione cartesiana del piano per  $A, B, C$  sarà della forma

$$z = ax + by + c$$

I tre coefficienti  $a, b, c$  si determinano imponendo il passaggio del piano per i tre punti  $A, B, C$  assegnati.

GnuPlot

```
gnuplot> splot a*x + b*y + c
```

### 3.2. Triangoli.

Un triangolo é determinato, come il piano cui appartiene, da tre punti, i suoi tre vertici  $A, B, C$ .

I punti  $P$  del triangolo sono dati da

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  tre numeri non negativi a somma  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

Si rappresenta del resto il triangolo anche con l'espressione parametrica che scriviamo per semplicitá in forma vettoriale,

$$P = v.C + (1 - v)[u.A + (1 - u).B], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

Infatti  $Q = u.A + (1 - u).B$  é, per  $u \in [0, 1]$ , un punto del lato  $AB$  e  $P = v.C + (1 - v).Q$  é, per  $v \in [0, 1]$ , un punto del segmento  $CQ$ .

Usiamo questa espressione nel programma GnuPlot seguente relativo alla scelta

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

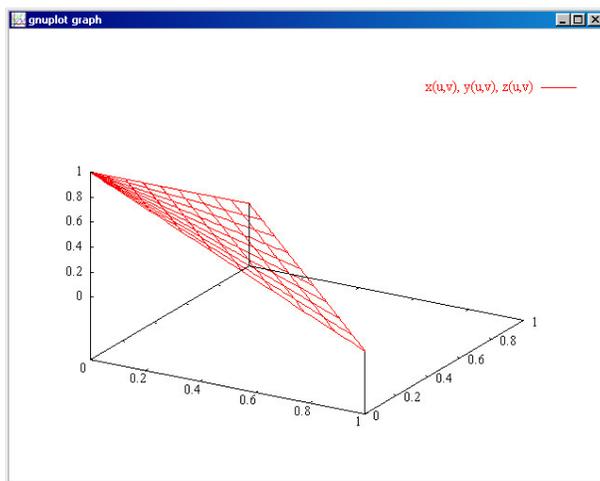


FIGURA 1. Il triangolo di vertici  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

```
gnuplot> a1=1;a2=0;a3=0;
gnuplot> b1=0;b2=1;b3=0;
gnuplot> c1=0;c2=0;c3=1;
gnuplot> set parametric
dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
gnuplot> set urange [0:1]
gnuplot> set vrangle [0:1]
gnuplot> x(u,v) = v*c1+(1-v)*(u*a1+(1-u)*b1)
gnuplot> y(u,v) = v*c2+(1-v)*(u*a2+(1-u)*b2)
gnuplot> z(u,v) = v*c3+(1-v)*(u*a3+(1-u)*b3)
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)
```

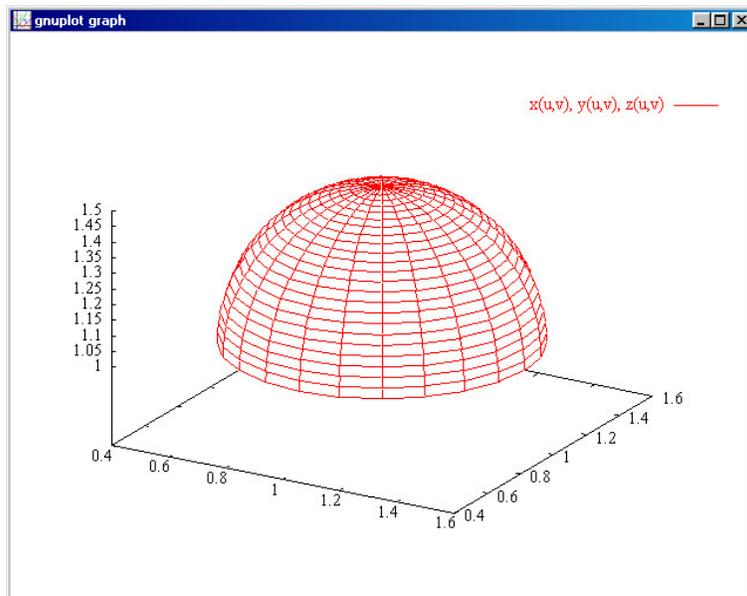


FIGURA 2. La semisfera superiore di centro  $(1, 1, 1)$  e raggio  $r = 0.5$

### 3.3. Sfere.

La sfera é determinata dal centro  $C = (c_1, c_2, c_3)$  e dal raggio  $r$  : le equazioni parametriche (vedi coordinate polari) sono

$$\begin{cases} x = c_1 + r \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = c_2 + r \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = c_3 + r \cdot \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Facendo variare i due parametri  $\varphi, \theta$  in intervalli piú piccoli si ottengono porzioni della sfera.

Ad esempio  $0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow$  semisfera superiore,

$0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4 \Rightarrow$  quarto di semisfera superiore,

ecc

Il programma seguente disegna con GnuPlot , vedi Figura (2), la semisfera superiore di centro  $C = (1, 1, 1)$  e raggio  $r = 0.5$

```
gnuplot> c1=1;c2=1;c3=1;
gnuplot> r=0.5
gnuplot> set parametric
dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
gnuplot> set urange [0:pi/2]
gnuplot> set vrange [0:2*pi]
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> set isosamples 25,25
```

```

gnuplot> x(u,v) = 1+r*sin(u)*cos(v)
gnuplot> y(u,v) = 1+r*sin(u)*sin(v)
gnuplot> z(u,v) = 1+r*cos(u)
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)

```

### 3.4. Ellissoidi.

L'ellissoide é una superficie simile alla sfera: é determinata da un centro  $C = (c_1, c_2, c_3)$  e da tre semiassi  $a, b, c$ .

L'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

suggerisce la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = c_1 + a \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = c_2 + b \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = c_3 + c \cdot \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Il programma seguente rappresenta con **GnuPlot**, vedi Figura (3), la porzione di ellissoide di centro  $C = (1, 1, 1)$  e semiassi 1, 2, 3 ottenuta facendo variare  $\varphi \in [0, \pi]$  e  $\theta \in [0, \frac{3}{2}\pi]$ .

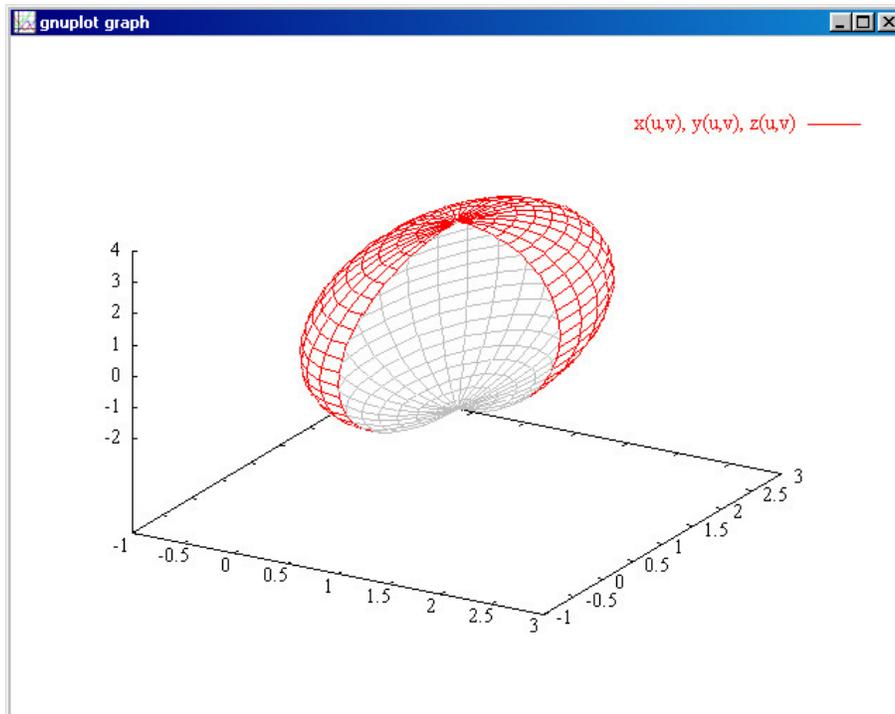


FIGURA 3. Una porzione di ellissoide di centro  $C = (1, 1, 1)$  e semiassi 1, 2, 3

```

gnuplot> a=1;b=2;c=3;
gnuplot> c1=1;c2=1;c3=1;
gnuplot> x(u,v)=c1+a*sin(u)*cos(v)
gnuplot> y(u,v)=c2+b*sin(u)*sin(v)
gnuplot> z(u,v)=c3+c*cos(u)
gnuplot> set parametric
dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
gnuplot> set urange [0:pi]
gnuplot> set vrange [0:3*pi/2]
gnuplot> set xrange [-1:3]
gnuplot> set yrange [-1:3]
gnuplot> set zrange [-2:4]
gnuplot> set isosamples 25,25
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)

```

### 3.5. Paraboloidi.

Consideriamo le superfici di equazione cartesiana

$$z = a(x - c_1)^2 + b(y - c_2)^2 + c(x - c_1)(y - c_2) + d$$

ottenute generalizzando l'equazione della parabola  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ . Si tratta di superfici molto diverse al variare dei parametri che le determinano:

- $(c_1, c_2)$  una sorta di centro
- $d$  la quota raggiunta in corrispondenza di  $(x, y) = (c_1, c_2)$
- i tre parametri  $a, b, c$  che determinano la forma della superficie
  - $\Delta = c^2 - 4ab < 0, \quad a > 0$  : una coppa verso l'alto
  - $\Delta = c^2 - 4ab < 0, \quad a < 0$  : una coppa verso il basso
  - $\Delta = c^2 - 4ab > 0$  : una sella

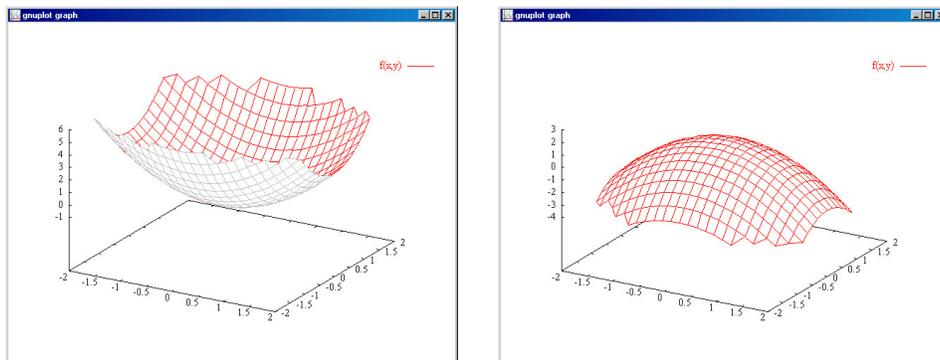


FIGURA 4. I paraboloidi con  $(a, b, c, d) = (1, 2, 0, -1)$  e con  $(a, b, c, d) = (-1, -2, 0, 1)$

Il programma GnuPlot per il primo dei due paraboloidi di Figura(4)

```
gnuplot> set noparametric
gnuplot> f(x,y) = a*(x-c1)**2+b*(y-c2)**2+c*(x-c1)*(y-c2)+d
gnuplot> c1=0;c2=0;
gnuplot> a=1;b=2;c=0;d=-1;
gnuplot> set xrange [-2:2]
gnuplot> set yrange [-2:2]
gnuplot> set zrange [-1.5:6]
gnuplot> splot f(x,y)
```

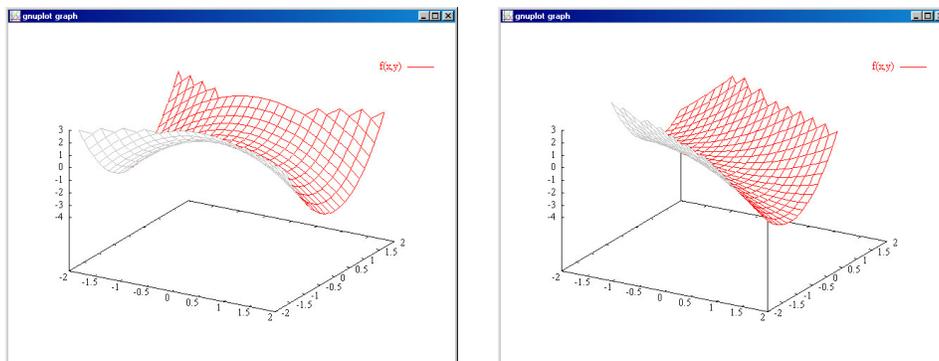


FIGURA 5. I paraboloidi con  $(a, b, c, d) = (-1, 2, 0, 1)$  e con  $(a, b, c, d) = (0.5, 2, 2.5, -1)$

### 3.6. I tori.

Il toro, o anello é la superficie ottenuta facendo ruotare una circonferenza intorno ad una retta del suo piano.

Le forme che si ottengono vanno dalla vera e propria ciambella nel caso che la retta non intersechi la circonferenza a forme intrecciate, mele o limoni<sup>3</sup>, nel caso la intersechi.

Le equazioni parametriche sono le seguenti

$$\begin{cases} x = (R + r \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ y = (R + r \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ z = r \sin(\theta) \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Il seguente programma GnuPlot si riferisce al caso piú semplice  $R = 3$  ed  $r = 2$  : si fa ruotare la circonferenza di raggio  $r = 2$  intorno ad una retta che disti  $R = 3$  dal centro e che, quindi, non la interseca

```
gnuplot> set parametric
dummy variable is t for curves, u/v for surfaces
```

<sup>3</sup>Queste denominazioni sono di Keplero: anche i grandi giocano...

```

gnuplot> set urange [0:2*pi]
gnuplot> set vrange [0:2*pi]
gnuplot> r1=3;r2=2;
gnuplot> x(u,v)=(r1+r2*cos(u))*cos(v)
gnuplot> y(u,v)=(r1+r2*cos(u))*sin(v)
gnuplot> z(u,v)=r2*sin(u)
gnuplot> set xrange [-5:5]
gnuplot> set yrange [-5:5]
gnuplot> set zrange [-3:3]
gnuplot> set isosamples 25,25
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)

```

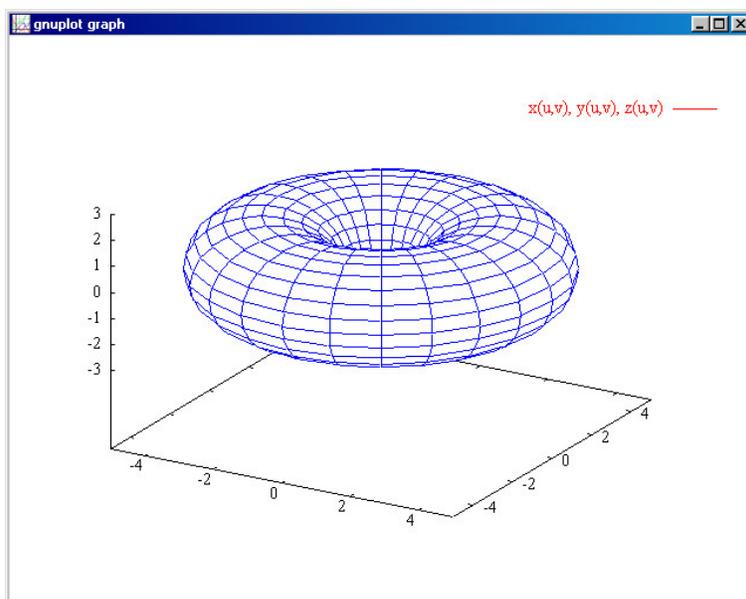
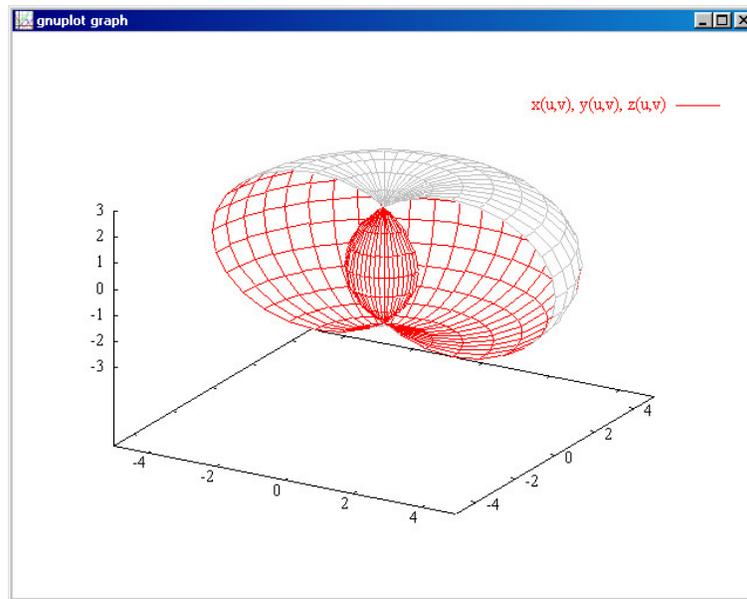


FIGURA 6. Il toro con  $R = 3$  ed  $r = 2$

La seguente Figura(7) rappresenta una porzione di toro relativo a

$$R = 2, \quad r = 3, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Si riconosce esteriormente una forma di *mela*, e, all'interno un fuso che ricorda il *limone*.

FIGURA 7. Una porzione di toro con  $R = 2$  ed  $r = 3$ 

#### 4. Curve trasformate in curve...

Sia  $C : u = u(t), v = v(t), t \in [\alpha, \beta]$  una curva regolare contenuta in  $\Omega$ : componendo si produce la curva  $S$

$$\phi(u(t), v(t)), \psi(u(t), v(t)), \chi(u(t), v(t))$$

tracciata sulla superficie.

Le proprietà di  $S$  dipendono, naturalmente dalle proprietà di  $C$  e dalle proprietà della superficie.

**4.1. Le tangenti.** Il vettore del piano  $u, v$

$$u'(t_0), v'(t_0)$$

indica la tangente a  $C$  nel punto  $(u(t_0), v(t_0))$ .

Il vettore dello spazio  $xyz$

$$u'(t_0) \cdot X_u + v'(t_0) X_v$$

è tangente all'immagine di  $C$  sulla superficie (provate con la regola di derivazione delle funzioni composte).

**4.2. Le lunghezze.** Come si modificano le lunghezze ?

Per rispondere basta la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$ds^2 = (\phi_u(u(t), v(t))du + \phi_v(u(t), v(t))dv)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + (\psi_u(u(t), v(t))du + \psi_v(u(t), v(t))dv)^2 + (\chi_u(u(t), v(t))du + \chi_v(u(t), v(t))dv)^2 = \\
 & = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2
 \end{aligned}$$

avendo indicato con

$$(38) \quad \begin{cases} E = \|X_u\|^2 \\ F = X_u \times X_v \\ G = \|X_v\|^2 \end{cases}$$

Se  $C : u = u(t), v = v(t), t_1 \leq t \leq t_2$  la lunghezza dell'immagine di  $C$  sulla superficie é

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt$$

OSSERVAZIONE 4.1. *Le superfici parametriche considerate potrebbero anche essere.... piatte, cioè appartenere al piano  $xy$  stesso (o anche ad un piano obliquo).*

*Il caso di superfici appartenenti ad uno dei piani coordinati si ottiene semplicemente pensando che una delle tre funzioni  $\phi, \psi, \chi$  sia nulla.*

## CAPITOLO 20

### Area di una superficie

#### 1. Introduzione

La definizione di area di una superficie curva contiene, ampliate le difficoltà incontrate nel parlare di lunghezza di una curva (che non coincida con un segmento)<sup>1</sup>.

Nel caso unidimensionale si é proceduto

- considerando le poligonali inscritte nella curva
- calcolandone (si tratta di segmenti) la lunghezza
- considerando l'estremo superiore di tali lunghezze.

Nel caso di una superficie il procedimento suggerirebbe, per analogia,

- di considerare poliedriche (a faccette triangolari) inscritte nella superficie
- di calcolare le aree di tali poliedriche (si tratta di sommare le aree dei triangoli che le compongono,
- di considerare l'estremo superiore di tali aree...

Ahimé ! Tale estremo superiore é molto spesso  $+\infty$ .

Si tratta dell'effetto *fisarmonica* o *nido d'ape*: la possibilità di inscrivere in superfici anche abbastanza piccole delle poliedriche di superfici estesissime (si pensi all'utile alettatura dei cilindri dei motori da raffreddare ad aria):

- il soffietto della fisarmonica può essere pensato come una poliedrica inscritta nel parallelepipedo determinato dai due lati rigidi della fisarmonica, le due tastiere.  
Quant'è l'area del soffietto ?  
Lavorando con una stoffa sottile si potrebbero realizzare soffietti estesissimi...
- il nido d'ape, le miriadi di cellette attaccate al modesto pannello dell'arnia hanno una incredibile superficie, del resto adatta al deposito del miele..

---

<sup>1</sup>Courant, Volume II, pag. 421

## 2. Un esempio importante

Consideriamo la superficie laterale del cilindro circolare di raggio 1 e altezza 1: un foglio rettangolare  $2\pi \times 1$  arrotolato appena...

Scopriremo che é possibile inscrivere in tale semplicissima superficie una poliedrica a faccette triangolari, una sorte di nido d'ape, molto vicina alla superficie cilindrica e tuttavia di area estesissima.

- dividiamo la superficie cilindrica con  $m$  tagli orizzontali equidistanti,

$$z = 1/m, z = 2/m, \dots, z = (m-1)/m,$$

- dividiamo ciascuna delle circonferenze in  $n$  parti uguali
  - $\theta = (2\pi)/n, \theta = (4\pi)/n, \dots, \theta = 2(n-1)\pi/n$ , la prima
  - $\theta = (2\pi)/n + \pi/n, \theta = (4\pi)/n + \pi/n, \dots, \theta = 2(n-1)\pi/n + \pi/n$ , la seconda,
  - e cosí proseguendo con tale mezzo sfasamento tra ciascuna circonferenza e la successiva,
- consideriamo i triangolini determinati da due punti di suddivisione consecutivi di una circonferenza e quello intermedio tra essi di una delle due circonferenze adiacenti sopra o sotto.

Si costruiscono in questo modo  $2nm$  triangolini tutti uguali, quindi tutti della stessa area.

Consideriamone uno in particolare, di vertici

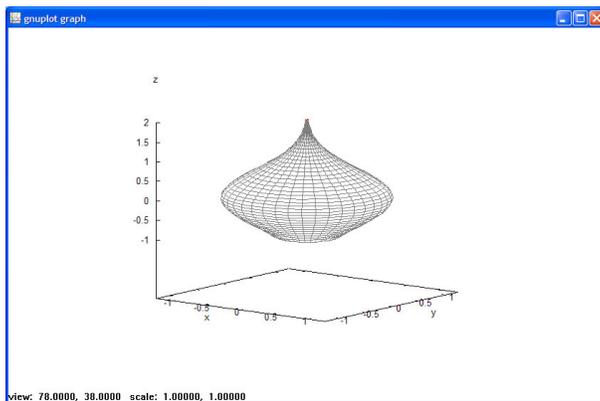


FIGURA 1. Uno dei triangolini inscritti nella superficie cilindrica,  $n = 6$ .

$$A = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{n}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right), 0 \right\}, \quad B = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), 0 \right\},$$

$$C = \left\{ 1, 0, \frac{1}{m} \right\}$$

vedi Figura 1,

Per calcolare l'area di  $\triangle_{ABC}$  consideriamo

- la base  $\overline{AB} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- l'altezza  $\overline{CH} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$

da cui

$$\text{Area}(\triangle_{ABC}) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

Moltiplicando per il numero  $2nm$  di tutti i triangolini inscritti nella superficie cilindrica si raggiunge un'area

$$\mathcal{A} = 2nm \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

ovvero, con semplici passaggi algebrici

$$(39) \quad \mathcal{A} = 2\pi \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \sqrt{1 + m^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

Se si prendesse, ad esempio  $n = m$  allora, passando al limite nella precedente (39) si otterrebbe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A} = 2\pi,$$

perfettamente in accordo con quanto atteso.

Pensiamo invece a scelte di  $m$  ed  $n$  indipendenti: tenuto conto che

$$\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \approx 1, \quad m^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 \approx \frac{\pi^4}{4} \frac{m^2}{n^4}$$

si capisce che si possono ottenere valori di  $\mathcal{A}$  comunque grandi: basta prendere  $m = kn^2$  con  $k$  via via piú grande...<sup>2</sup>

OSSERVAZIONE 2.1. *Un'osservazione....*

*Aumentare  $m$  cioé le suddivisioni orizzontali del cilindro produce triangolini  $\triangle_{ABC}$  che giacciono su piani sempre piú lontani dai piani tangenti alla superficie:*

- quasi orizzontali i piani per  $ABC$
- verticali i piani tangenti al cilindro.

*É proprio tale difformità di giacitura a produrre tanto divario in termini di aree tra superficie cilindrica e poliedrica inscritta...*

*Pensate alle alettature dei cilindri dei motori delle motociclette raffreddati ad aria...*

<sup>2</sup>Courant John, Vol. II, Appendice A.4, pag. 540

### 3. Il caso cartesiano

Limitiamoci a una superficie grafico

$$z = f(x, y)$$

#### 3.1. Dichiarazioni senza dimostrazione.

- La lunghezza di una curva regolare coincide con l'estremo inferiore delle lunghezze delle poligonali tangenti<sup>3</sup>
- L'area di una superficie é in modo simile, l'estremo inferiore delle aree delle poliedriche triangolari tangenti alla superficie.

Indicate con  $\Delta_n$  le aree dei triangolini in cui abbiamo suddiviso  $\Omega$  e con  $\tau_n$  le aree delle faccette tangenti alla superficie corrispondenti si ha

$$\Delta_n = \tau_n \times |\nu_z|$$

essendo  $|\nu_z|$  il modulo della componente  $z$  del versore normale alla superficie.

$$(40) \quad \vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{f_x(x, y), f_y(x, y), -1\}$$

OSSERVAZIONE 3.1. Giustificazione della (40)

Consideriamo, ad esempio il parallelepipedo  $L \times P \times H$  di Figura 2 : tagliamolo con un piano  $z = 1 + m y$ , ( $m = 1/2$  in Figura) e valutiamo l'area della parte superiore obliqua frutto del taglio.

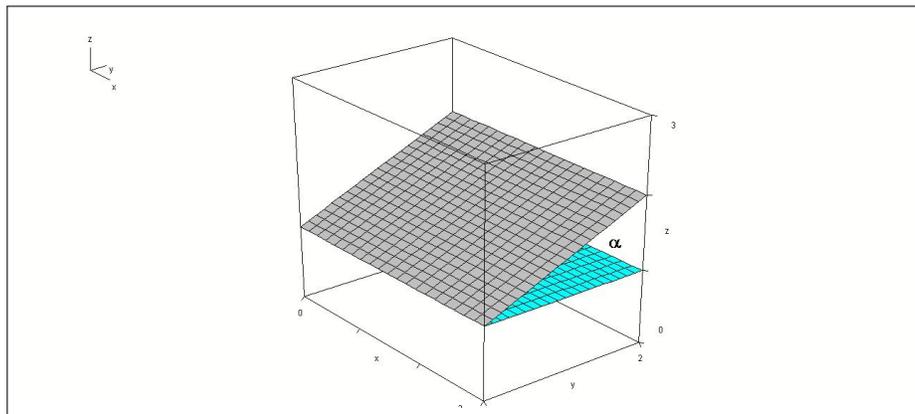


FIGURA 2. Parallelepipedo:  $L = 3$ ,  $P = 2$ ,  $H = 1$

Si tratta di un rettangolo con un lato ancora  $L$  e l'altro, piú lungo  $\ell$  tale che

$$\ell \cos(\alpha) = P$$

<sup>3</sup>Courant John, Vol. II pag, 422, 423

É facile riconoscere che

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \nu_z$$

essendo  $\nu$  il versore normale al piano in cui giace il rettangolo frutto del taglio.

É altrettanto facile riconoscere che una formula analoga sussiste anche nel caso di un taglio fatto con un piano  $z = 1 + m y + n x$  doppiamente obliquo: l'area del parallelogramma  $\mathcal{P}$  ottenuto é maggiore di quella del rettangolo orizzontale  $\mathcal{R}$  iniziale, e il legame é ancora

$$\text{Area}(\mathcal{P}) \nu_z = \text{Area}(\mathcal{R})$$

Quindi, tenuto conto di (40) si ha

$$\Delta_n = \tau_n \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

ovvero

$$\tau_n = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \Delta_n$$

L'area della unione di poligoni<sup>4</sup> tangenti alla superficie sará pertanto

$$\sum_n \tau_n = \sum_n \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \Delta_n$$

La formula osservata suggerisce quindi che l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

rappresenti l'area della superficie  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ .

**3.2. Un esempio.** Calcoliamo l'area della superficie

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f_x = x, f_y = y : \quad \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} d(1 + \rho^2) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\pi \simeq 1.21895 \pi \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Non é del tutto giusto parlare di una poliedrica, i triangolini che consideriamo non sono, in generale, ben uniti uno all'altro.

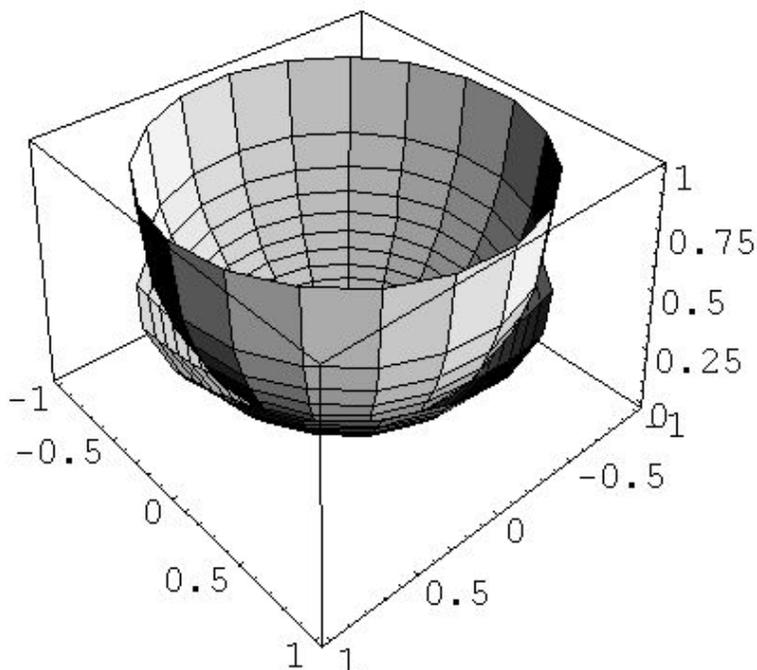


FIGURA 3. La  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  e, sopra, la semisfera

OSSERVAZIONE 3.2. *L'area trovata é  $\simeq 1.21895\pi$  : l'area del cerchio piatto é  $\pi$  l'area della semisfera é  $2\pi$ .*

*Il valore trovato, intermedio tra i due é ragionevole, vedi Figura 3 .*

#### 4. Area di una superficie parametrica

La formula dell'area di una superficie fornita, parametricamente

$$(41) \quad \begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

dalle (41) é suggerita da quanto accadrebbe se potessimo esplicitare, tramite due delle tre funzioni (41),  $u, v$  in funzione di  $x, y$  .

Supponiamo che le prime due equazioni siano effettivamente invertibili

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

La superficie diventa cartesiana

$$z = \chi[u(x, y), v(x, y)]$$

e l'area sarebbe

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + (\chi_u u_x + \chi_v v_x)^2 + (\chi_u u_y + \chi_v v_y)^2} dx dy$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} 1 = \phi_u u_x + \phi_v v_x \\ 0 = \phi_u u_y + \phi_v v_y \\ 0 = \psi_u u_x + \psi_v v_x \\ 1 = \psi_u u_y + \psi_v v_y \end{cases}$$

si ricava:

$$\begin{cases} u_x = \psi_v / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u) \\ u_y = -\phi_v / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u) \\ v_x = -\psi_u / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u) \\ v_y = \phi_u / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u) \end{cases}$$

Ne segue

$$\chi_u u_x + \chi_v v_x = (\chi_u \psi_v - \chi_v \psi_u) / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u)$$

$$\chi_u u_y + \chi_v v_y = (-\chi_u \phi_v + \chi_v \phi_u) / (\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u)$$

É evidente che:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + (\chi_u u_x + \chi_v v_x)^2 + (\chi_u u_y + \chi_v v_y)^2} = \\ & = \frac{\sqrt{(\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u)^2 + (\chi_u u_x + \chi_v v_x)^2 + (\chi_u u_y + \chi_v v_y)^2}}{|\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u|} \end{aligned}$$

Svolgendo i quadrati si riconosce a numeratore  $\sqrt{EG - F^2}$  avendo indicato, come in (38)

$$\begin{cases} E = \chi_u^2 + \phi_u^2 + \psi_u^2 \\ G = \chi_v^2 + \phi_v^2 + \psi_v^2 \\ F = \chi_u \chi_v + \phi_u \phi_v + \psi_u \psi_v \end{cases}$$

La formula dell'area maturata, per analogia al caso cartesiano é pertanto,

$$(42) \quad \iint_{\Omega} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|\phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u|} dx dy$$

OSSERVAZIONE 4.1. Il segno di  $\boxed{?}$  nell'integrale doppio precedente non é una svista tipografica: in realtà non so quando  $(u, v) \in \Omega$  dove varino  $(x, y)$ .

Vedete nel seguito come (fortunatamente) tale informazione mancante non pregiudichi il risultato !!!

Tenuta presente la regola di cambiamento delle coordinate negli integrali doppi si riconosce nella (42) l'integrale

$$(43) \quad \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

OSSERVAZIONE 4.2. *I conti fatti sembrano poggiare sul fatto che le prime due equazioni delle (41) siano invertibili: in realtà due sempre localmente invertibili ci sono dal momento che abbiamo richiesto che lo jacobiano*

$$\frac{\partial(\phi, \psi, \chi)}{\partial(u, v)}$$

*abbia rango 2.*

OSSERVAZIONE 4.3. *Ovviamente il caso delle superfici cartesiane rientra in quello delle superfici parametriche, la radice  $\sqrt{EG - F^2}$  restituisce in tal caso la precedente  $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$*

#### 4.1. Esempio. L'area della sfera.

La sfera di raggio 1 si rappresenta parametricamente con

$$\begin{cases} x = \sin(u) \cos(v), \\ y = \sin(u) \sin(v), \\ z = \cos(u), \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$E = \cos(u)^2 \cos(v)^2 + \sin(u)^2 + \cos(u)^2 \sin(v)^2$$

$$G = \cos(v)^2 \sin(u)^2 + \sin(u)^2 \sin(v)^2$$

$$F = 0$$

$$EG - F^2 = \sin^2(u)$$

Tenuto conto che  $0 \leq u \leq \pi$  riesce

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin(u)$$

Ne segue

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin(u) du = 4\pi$$

OSSERVAZIONE 4.4. *Il risultato é giusto e non solo perché i conti sono stati fatti senza errori ma perché coincide con il valore trovato da Archimede che, in termini di calcolo numerico era, e resta, fonte attendibile !*

*Il risultato di Archimede é l'equivalenza in termini di area tra la superficie sferica e il cilindro tangente (stesso diametro e stessa altezza).*

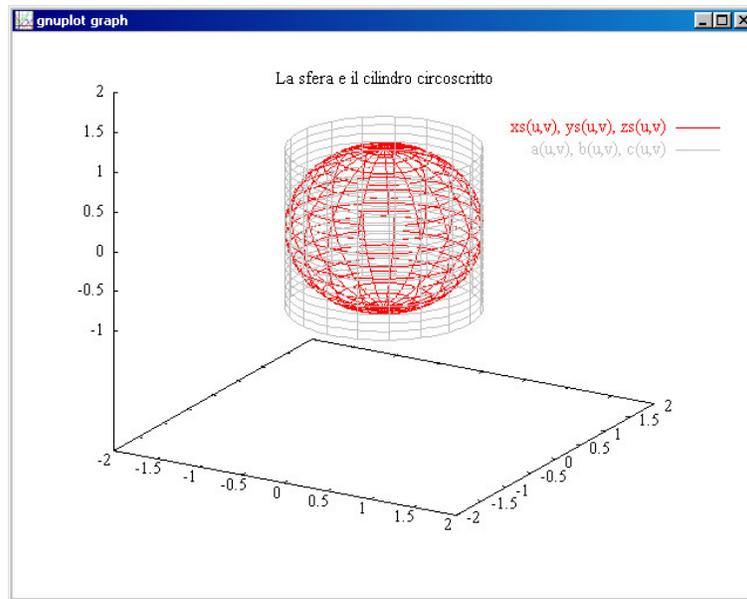


FIGURA 4. La sfera e il cilindro tangente

*Tale risultato é eccezionale in quanto collega una superficie sviluppabile, quella del cilindro, con una, quella della sfera, non sviluppabile, cioé non applicabile in modo isometrico sul piano (la nota difficoltà delle carte geografiche).*

### 5. Una giustificazione alternativa

La formula (43) proposta precedentemente può essere giustificata anche servendosi del prodotto vettoriale, confronta (37),

$$\vec{X}_u du \wedge \vec{X}_v dv$$

il cui modulo, com'è per i prodotti vettoriali rappresenta l'area del parallelogramma di lati i due vettori

$$\vec{X}_u du \quad \vec{X}_v dv$$

parallelogramma tangente alla superficie e corrispondente al quadratino  $du dv$  del piano  $(u, v)$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} \vec{X}_u du \wedge \vec{X}_v dv &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} dudv = \\ &= \{(y_u z_v - y_v z_u)i + (z_u x_v - z_v x_u)j + (x_u y_v - x_v y_u)k\} dudv \end{aligned}$$

si ha, con le notazioni precedenti

$$L = y_u z_v - y_v z_u, \quad M = z_u x_v - z_v x_u, \quad N = x_u y_v - x_v y_u,$$

$$\left| \overrightarrow{X}_u du \wedge \overrightarrow{X}_v dv \right| = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} du dv$$

ovvero con le analoghe notazioni  $E, G, F$  si ha

$$\left| \overrightarrow{X}_u du \wedge \overrightarrow{X}_v dv \right| = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Donde

$$Area(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

come era stato trovato precedentemente appunto nella (43).

## 6. Le superfici di rotazione

Sia  $f(z) \geq 0$  la rotazione del grafico  $x = f(z)$  intorno all'asse  $z$  produce una superficie di rotazione che ha le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(z) \cos(\theta) \\ y = f(z) \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [a, b]$$

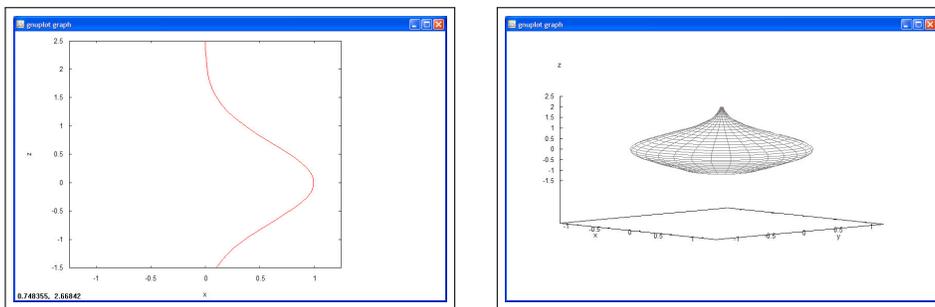


FIGURA 5. La rotazione di  $f(z) = e^{-z^2}$ ,  $-1 \leq z \leq 2$

La matrice jacobiana é

$$j = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)f(z) & \cos(\theta)f(z) & 0 \\ \cos(\theta)f'(z) & \sin(\theta)f'(z) & 1 \end{pmatrix}$$

La relativa espressione

$$\sqrt{EG - F^2} = f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)}$$

L'area che ne deriva é

$$2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

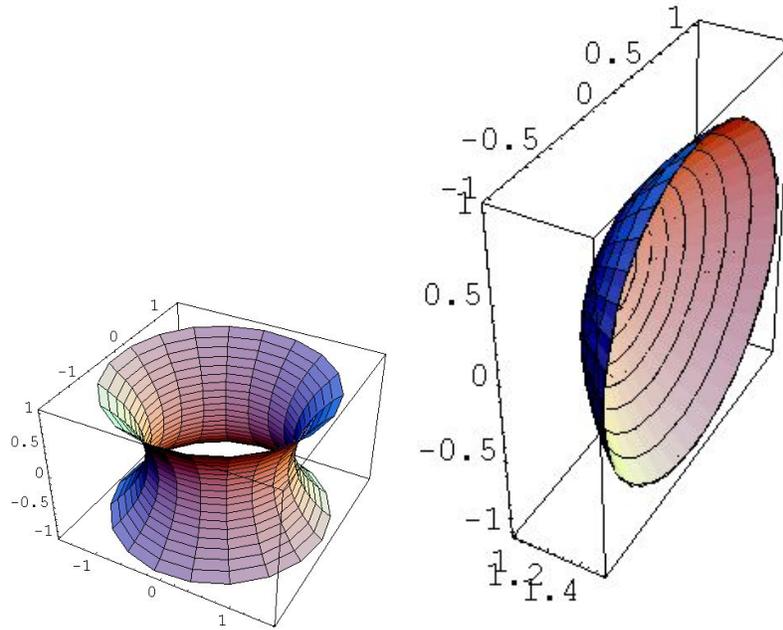


FIGURA 6.  $x = \cosh(z)$   $z \in [-1, 1]$  a) Rotazione intorno asse  $z$ , b) rotazione intorno asse  $x$

È evidente che

$$2\pi f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}dz$$

approssima la superficie cilindrica ottenuta facendo ruotare il segmento di lunghezza

$$ds = \sqrt{1+f'^2(z)}dz$$

su una circonferenza di raggio  $f(z)$ .



## Integrali superficiali

### 1. Introduzione

Definita l'area di una superficie  $\Sigma$  regolare si definiscono gli integrali superficiali <sup>1</sup> di una funzione reale di tre variabili reali  $f(x, y, z)$  continua su di essa.

Il concetto, comune a tutti gli integrali é quello di limiti di somme

- decomposizione della superficie,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$ ,
- prodotti  $f(P_i)\text{area}(\Sigma_i)$ ,  $P_i \in \Sigma_i$ ,
- somme dei prodotti ottenuti.

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

L'integrale si calcola tramite la rappresentazione parametrica con la quale la superficie é stata assegnata e corrisponde al valore

$$\iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Fin'ora le superfici sono state assegnate e usate esclusivamente tramite la loro rappresentazione parametrica: si tratta di un approccio naif e non del tutto soddisfacente.*

*É infatti naturale attribuire alla parola superficie un contenuto geometrico che prescinde dalla eventuale rappresentazione parametrica: una sfera é una sfera indipendentemente dalle coordinate polari che usiamo per lavorare con essa.*

*Conclusione:*

- *una superficie (come una curva) regolare possiede diverse rappresentazioni parametriche*
- *i conti che abbiamo fatto (area, integrali superficiali) sono stati condotti servendosi di una rappresentazione parametrica*
- *si può provare che i valori ottenuti sono indipendenti dalla rappresentazione parametrica.*

---

<sup>1</sup>Vol. II, pag. 594

## 2. Il teorema della divergenza nello spazio

Sia  $R$  il dominio rettangolare dello spazio

$$R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$$

L'integrale (triplo) esteso ad  $R$

$$\iiint_R F_x(x, y, z) dx dy dz$$

si calcola per integrazioni successive come

$$\iint_{[b,c] \times [e,f]} dy dz \int_a^b F_x dx = \iint_{[b,c] \times [e,f]} (F[b, y, z] - F[a, y, z]) dy dz$$

formula che può essere scritta analogamente come

$$\iiint_R F_x(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial R} F_x \nu_x d\sigma$$

avendo indicato con  $\nu$  il versore normale alla frontiera di  $R$  diretto verso l'esterno, e con  $d\sigma$  l'elemento d'area su  $\partial R$ .

Preparate poi le formule analoghe relative alle altre due derivate  $G_y$  ed  $H_z$  si possono compattare le tre formule in un'unica introducendo il campo vettoriale  $\Phi = \{F, G, H\}$

$$\iiint_R \operatorname{div} \vec{\Phi} dx dy dz = \iint_{\partial R} \vec{\Phi} \times \vec{\nu} d\sigma$$

**2.1. Le generalizzazioni.** La formula precedente riconosciuta facilmente sui domini rettangolari si estende

- ai plurirettangoli
- ai domini, quali la sfera, approssimabili con plurirettangoli.

## 3. Il teorema di Stokes nello spazio

Consideriamo la superficie cartesiana  $\Sigma$

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

indichiamo con

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

la curva  $C$  frontiera  $\partial\Omega$

Consideriamo la circuitazione del vettore

$$F = \{a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)\}$$

lungo il bordo di  $\Sigma$  (immagine tramite  $f(x, y)$  di  $C = \partial\Omega$ )

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \{a[x(t), y(t), f[x(t), y(t)]]x'(t) + \\ + b(\dots)y'(t) + c(\dots)(f_x x' + f_y y')\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} (a + cf_x)x' + (b + cf_y)y' dt$$

Tale integrale può, a sua volta essere letto come una circuitazione su  $C = \partial\Omega$ , curva chiusa del piano  $xy$

$$(44) \quad \int_C \{a + cf_x, b + cf_y\} \times \vec{t} ds$$

avendo indicato con  $\vec{t}$  il versore tangente a  $C$ .

L'integrale (44) si può rappresentare tramite il teorema di Stokes nel piano

$$\iint_{\Omega} \{(b + cf_y)_x - (a + cf_x)_y\} dx dy$$

Svolti i conti si ottiene

$$\iint_{\Omega} \{b_x + b_z f_x + c_x f_y + c_z f_x f_y + cf_{xy} - a_y - a_z f_y - c_y f_x - c_z f_y f_x - cf_{xy}\} dx dy$$

(45)

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \iint_{\Omega} \{+(b_z - c_y)f_x + (c_x - a_z)f_y - (a_y - b_x)\} dx dy$$

Tenuto presente che

$$\{(b_z - c_y), (c_x - a_z), (a_y - b_x)\} = \text{rot}(F)$$

e che

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{f_x, f_y, -1\} = \vec{\nu}_{\Sigma}$$

é un versore normale a  $\Sigma$  si riconosce che la (45) corrisponde a

$$(46) \quad \int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{F}) \times \vec{\nu}_{\Sigma} d\sigma$$

La relazione osservata nel caso di una superficie cartesiana si mantiene in generale anche per superfici parametriche generali secondo il seguente

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $F$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ , sia  $\Sigma$  una superficie regolare orientabile<sup>2</sup> e sia  $C$  il suo bordo:*

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{F}) \times \vec{\nu} d\sigma_{\Sigma}$$

<sup>2</sup>esistono superfici non orientabili...si pensi al nastro di Moebius vedi il disegno di Escher a pag. 584

OSSERVAZIONE 3.2. *Il precedente teorema é in un certo senso sorprendente: per calcolare la circuitazione di un vettore  $F$  lungo una curva  $C$  si puó calcolare il flusso del rotore attraverso cosa ?*

*Attraverso una qualsiasi superficie  $\Sigma$  di cui la curva  $C$  sia bordo.*

*Probabilmente di tali superfici ce ne sono piú d'una....*

OSSERVAZIONE 3.3. *La orientabilitá di una superficie equivale all'esistenza di un versore normale in ogni punto della superficie che vari con continuitá sulla superficie, ovvero tale che trasportandolo lungo una curva chiusa torni, a trasporto ultimato, nella posizione iniziale.*

*Questo trasporto fallisce sul nastro di Möbius come si riconosce dal bel disegno<sup>3</sup> delle formiche di Escher.*

#### 4. Lavoro, campi irrotazionali, ecc.

Il teorema della formula di Stokes traduce il calcolo del lavoro di una campo  $F$  su una curva chiusa  $\mathcal{C}$  nel calcolo del flusso del rotore attraverso una superficie  $\Sigma$  che abbia la  $\mathcal{C}$  come bordo.

Naturalmente la relazione si riferisce a un campo  $F$  che sia regolare, almeno di classe  $C^1$  in un aperto che contenga  $\Sigma$  e il suo bordo  $\mathcal{C}$ .

Un campo  $\vec{F}$  regolare in tutto  $\mathbb{R}^3$  privato di un punto  $O$  e a rotore nullo é conservativo: infatti qualunque curva chiusa  $\mathcal{L}$  consideri essa sará sempre pensabile come il bordo di una superficie  $\Sigma$  che non tocchi il punto proibito  $O$  e quindi

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \times \vec{t} ds = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{F}) \times \vec{\nu} d\sigma = 0$$

Diversamente possono andare le cose se il campo  $\vec{F}$  é regolare in tutto  $\mathbb{R}^3$  privato di una retta: le curve chiuse  $\mathcal{L}$  che girassero intorno a tale retta non sono evidentemente bordo di alcuna superficie  $\Sigma$  legittima (si tratterebbe infatti sempre di superfici bucate dalla retta proibita...). Su tali curve quindi non puó usarsi la formula di Stokes e il lavoro lungo una di tali curve puó essere anche diverso da zero.

ESEMPIO 4.1 (Il campo magnetico). *Il campo magnetico generato da un filo indefinito posto lungo l'asse  $z$ , percorso da corrente é*

$$\vec{B} = \left\{ k \frac{-y}{x^2 + y^2}, k \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right\}$$

<sup>3</sup>Vedi COURANT, Vol. II, pag.584

- *Non é conservativo: verificiamone il lavoro lungo una qualsiasi la circonferenza  $\mathcal{C}$  orizzontale di centro sull'asse  $z$*

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \times \vec{t} \, ds = \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k$$

- *il rotore di  $\vec{B}$  ha le prime due componenti evidentemente nulle, e la terza*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} = 0$$

*anche...*

- *Quindi  $B$  é irrotazionale: ma in che parte dello spazio é definito ?*
- *in tutto  $\mathbb{R}^3$  privato dell'asse  $z$ , una retta...*
- *non c'è da stupirsi che, pur essendo irrotazionale il suo lavoro lungo quelle circonferenze col centro sull'asse  $z$  sia venuto diverso da zero.*

*Quelle circonferenze non sono il bordo di alcuna superficie lecita... su cui applicare la formula di Stokes e agganciare quindi la circuitazione al flusso del rotore.*

## 5. Campi a divergenza nulla

Ad ogni campo vettoriale

$$\vec{F} = \{\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)\}$$

si associa il suo rotore

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Viceversa quali campi vettoriali sono dei rotori ?

La risposta é semplice e costruttiva, almeno localmente:

**TEOREMA 5.1.** *Assegnato il campo vettoriale  $\vec{F}$ , di classe  $C^1$  in un aperto convesso  $\Omega$  esiste in tale aperto un campo  $U$  tale che*

$$\text{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

*se e solo se riesce  $\text{div} \vec{F} = 0$*

**DIMOSTRAZIONE.**

Supponiamo, per semplicitá che  $\Omega$  sia un intorno rettangolare dell'origine: per ogni punto  $P \in \Omega$  possiamo quindi tranquillamente lavorare sugli spigoli del parallelepipedo di estremi  $P$  e l'origine.

Necessità

Sia  $F = \{a, b, c\}$  e sia  $U = \{A, B, C\}$  tale che

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

ovvero

$$(47) \quad \begin{cases} C_y - B_z = a \\ A_z - C_x = b \\ B_x - A_y = c \end{cases}$$

riesce

$$\operatorname{div} \vec{F} = a_x + b_y + c_z$$

quindi, tenuto conto delle (51),

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(C_y - B_z) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z - C_x) + \frac{\partial}{\partial z}(B_x - A_y) = \\ &= C_{yx} - B_{zx} + A_{zy} - C_{xy} + B_{xz} - A_{yz} = 0 \end{aligned}$$

avendo tenuto conto del teorema di Schwarz sulla permutabilità dell'ordine di derivazione parziale.

Sufficienza

Costruiamo<sup>4</sup> un vettore  $U$  che soddisfi l'equazione

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

nella forma

$$U = \{A, B, 0\}$$

Tenuto conto delle (51) e della scelta  $C = 0$  sarà

$$\begin{cases} A_z = b & \Rightarrow A(x, y, z) = \int_0^z b(x, y, \xi) d\xi + \alpha(x, y) \\ B_z = -a & \Rightarrow B(x, y, z) = -\int_0^z a(x, y, \xi) d\xi + \beta(x, y) \end{cases}$$

La scelta proposta soddisfa le prime due equazioni del sistema (51): per quanto concerne la terza equazione,  $B_x - A_y = c$ , osserviamo che dalla

---

<sup>4</sup>Confronta Courant John, Volume II, pag 314

costruzione della due funzioni  $A$  e  $B$  si ha, derivando sotto il segno di integrale<sup>5</sup>

$$\begin{cases} A_y(x, y, z) = \int_0^z b_y(x, y, \xi) d\xi + \alpha_y(x, y) \\ B_x(x, y, z) = -\int_0^z a_x(x, y, \xi) d\xi + \beta_x(x, y) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) &= -\int_0^z \{a_x(x, y, \xi) + b_y(x, y, \xi)\} d\xi + \\ &+ \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'ipotesi  $\operatorname{div}(F) = a_x + b_y + c_z = 0$ , cioè

$$c_z = -\{a_x + b_y\}$$

si ha anche

$$B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) = \int_0^z c_z(x, y, \xi) d\xi + \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y)$$

ovvero integrando  $c_z$

$$B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) = c(x, y, z) - c(x, y, 0) + \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y)$$

Perché le funzioni  $A$  e  $B$  soddisfino anche la terza equazione del sistema (51) basta che le due funzioni  $\alpha(x, y)$  e  $\beta(x, y)$  soddisfino l'uguaglianza

$$\beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) = c(x, y, 0)$$

cosa che si può ottenere prendendo, ad esempio

$$\begin{cases} \alpha(x, y) \equiv 0 \\ \beta(x, y) = \int_0^x c(\xi, y, 0) d\xi \end{cases}$$

Concludendo il vettore  $U = \{A, B, 0\}$  con

$$\begin{cases} A(x, y, z) = \int_0^z b(x, y, \xi) d\xi \\ B(x, y, z) = -\int_0^z a(x, y, \xi) d\xi + \int_0^x c(\xi, y, 0) d\xi \end{cases}$$

soddisfa la relazione

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

□

<sup>5</sup>Operazione consentita dalla regolarità  $F \in C^1$

OSSERVAZIONE 5.2. *Tenuto conto che i gradienti hanno rotore nullo, sono soluzioni dell'equazione*

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

anche tutti i campi

$$\vec{V} = \vec{U} + \nabla\Phi(x, y, z)$$

qualunque sia la funzione  $\Phi \in C^2$ .

### 5.1. Flusso di campi a divergenza nulla.

Siano

- $\vec{F}$  un campo vettoriale di classe almeno  $C^1$ , a divergenza nulla,
- $\Sigma$  una superficie, con  $\Sigma \subseteq \Omega$  aperto convesso di  $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} = \partial\Sigma$  il suo bordo

Dal precedente Teorema 6.1 riesce, nell'aperto convesso  $\Omega$ ,

$$\vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{U})$$

e quindi, dalla formula di Stokes si ha

$$(48) \quad \iint_{\Sigma} \vec{F} \times \vec{\nu} \, d\sigma = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\vec{U}) \times \vec{\nu} \, d\sigma = \int_{\mathcal{C}} \vec{U} \times \vec{\tau} \, ds$$

OSSERVAZIONE 5.3. *La precedente equazione (48) chiarisce il legame tra  $F$  e i molti possibili campi  $V = U + \nabla\Phi$  tali che*

$$\operatorname{rot}(U + \nabla\Phi) = F$$

*Gli addendi  $\nabla\Phi$  rappresentano campi conservativi, quindi*

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\Phi \times \vec{\tau} \, ds = 0$$

*e quindi non influiscono sulla (52).*

### 5.2. Campi a rotore nullo.

Ricordiamo un risultato analogo relativo ai campi  $\vec{F}$  con  $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$  stabilito nel corso di Funzioni di piú variabili con il nome di Lemma di Poincaré

TEOREMA 5.4. *Assegnato il campo vettoriale  $\vec{F}$ , di classe  $C^1$  in un aperto convesso<sup>6</sup>  $\Omega$  esiste in tale aperto un suo potenziale  $\Phi(x, y, z)$*

$$\nabla(\Phi(x, y, z)) = \vec{F}$$

*se e solo se riesce  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$*

<sup>6</sup>Il Lemma di Poincaré era stato dimostrato addirittura in aperti  $\Omega$  stellati, una classe di insiemi piú generale di quella dei convessi.

Riassumendo

In un aperto convesso si ha:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{F}) = 0 & \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla\Phi \\ \operatorname{div}(\vec{F}) = 0 & \Leftrightarrow \vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{U}) \end{cases}$$



## Il linguaggio delle forme differenziali

### 1. Introduzione

Il teorema della divergenza come quello di Stokes, nel piano come nello spazio, trovano un'espressione particolarmente significativa con il *linguaggio delle forme differenziali*.

Indichiamo d'ora in avanti con

$$\partial E$$

il bordo di  $E$

- due punti se  $E$  è un intervallo dell'asse reale
- la curva che lo delimita se  $E$  è una regione del piano
- ancora una curva, il bordo, se  $E$  è una superficie dello spazio
- la superficie che lo racchiude se  $E$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^3$

**1.1. Il caso unidimensionale.** Provate a leggere il teorema di Torricelli

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

con la grafia

$$\int_{[a,b]} df(x) = f|_{\partial[a,b]}$$

che evidenzia una sorta di dualità:

- l'integrale del differenziale di  $df(x)$  su  $[a, b]$
- una sorta di integrale di  $f$  sulla frontiera  $\partial[a, b]$  che può essere considerata una sorta di *differenziale* di  $[a, b]$ .

Le osservazioni precedenti sarebbero solo chiacchiere se tali somiglianze non si conservassero (miracolosamente) in dimensioni superiori.

## 2. Il teorema di Stokes nel piano

Sia  $F = \{a, b\}$ , consideriamo l'integrale  $\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds$  sulla curva  $C = \partial E : x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$  che delimita  $E$

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \int_{\alpha}^{\beta} [a[x(t), y(t)]x'(t) + b[x(t), y(t)]y'(t)]dt$$

riassunti i prodotti

$$x'(t)dt = dx, \quad y'(t)dt = dy$$

si ha, formalmente

$$\int_C \vec{F} \times \vec{t} ds = \int_{\partial E} a dx + b dy$$

Scriviamo ora formalmente l'analoga formula suggerita dal teorema di Torricelli

$$\int_{\partial E} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \iint_E d \{a(x, y) dx + b(x, y) dy\}$$

Assunte le seguenti regole di moltiplicazione formale, che diremo *esterna*, moltiplicazione antisimmetrica,

$$(49) \quad dx dy = -dy dx, \quad dx dx = dy dy = 0$$

riesce

$$d \{a(x, y) dx + b(x, y) dy\} = (a_x dx + a_y dy)dx + (b_x dx + b_y dy)dy = (b_x - a_y)dx dy$$

Abbiamo ritrovato, dando al *differenziale esterno* il significato convenuto,

$$d \{a(x, y) dx + b(x, y) dy\} = (b_x - a_y)dx dy$$

la formula di Stokes

$$\int_{\partial E} a dx + b dy = \iint_E (b_x - a_y)dx dy$$

OSSERVAZIONE 2.1. *É innegabile, posto*

$$\vec{F} = \{a, b\}, \quad \vec{t} ds = \{dx, dy\}$$

la lettura

$$\vec{F} \times \vec{t} ds = a dx + b dy$$

### 3. Il teorema della divergenza nel piano

Siano  $F$  ed  $E$  come sopra

$$\int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{\nu} ds = \int_{\partial E} (a dy - b dx)$$

Applichiamo formalmente la regola precedente sui prodotti formali  $dx dy, \dots$

$$\int_{\partial E} (a dy - b dx) = \iint_E d[ady - bdx]$$

Sviluppando il secondo membro si trova, effettivamente l'integrale doppio

$$\iint_E (a_x + b_y) dx dy$$

che riproduce il noto teorema della divergenza.

### 4. Gli integrali $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz$ , ecc.

Attribuiamo ora agli integrali

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz, \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z)dzdx, \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy$$

i seguenti significati in termini di integrali superficiali:

$$(50) \quad dy dz = \nu_x d\sigma = dz dx = \nu_y d\sigma, \quad dx dy = \nu_z d\sigma$$

Ne deriva se  $\Sigma$  é rappresentata parametricamente da

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \Omega$$

- tenuto conto che il vettore

$$\vec{n}_{\Sigma} = \left\{ \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right\}$$

é ortogonale alla superficie  $\Sigma$

- tenuto conto che

$$|\vec{n}_{\Sigma}| = \sqrt{EG - F^2}$$

essendo  $E, G, F$  definiti in (38)

•

$$\iint_{\Sigma} f \, dydz = \iint_{\Omega} f[\varphi(u, v), \dots] \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} \, dudv$$

$$\iint_{\Sigma} f \, dzdx = \iint_{\Omega} f[\varphi(u, v), \dots] \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} \, dudv$$

$$\iint_{\Sigma} f \, dxdy = \iint_{\Omega} f[\varphi(u, v), \dots] \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \, dudv$$

### 5. Il teorema di Stokes nello spazio

Sia  $C = \partial S$  il bordo della superficie  $S$  : scriviamo la circuitazione di  $F = \{a, b, c\}$  lungo  $\partial S$  nella grafia delle forme differenziali

$$\int_{\partial S} \vec{F} \times \vec{t} \, ds = \int_{\partial S} (adx + bdy + cdz)$$

applichiamo in modo automatico l'algoritmo precedente approdando all'integrale superficiale

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\partial S} (adx + bdy + cdz) &= \iint_S d\{adx + bdy + cdz\} = \\ &= \iint_S (a_x dx + a_y dy + a_z dz) dx + \\ &+ \iint_S (b_x dx + b_y dy + b_z dz) dy + \\ &+ \iint_S (c_x dx + c_y dy + c_z dz) dz \end{aligned} \right.$$

da cui tenuto conto della regola di differenziazione esterna (49), moltiplicazione antisimmetrica, si ha

$$\int_{\partial S} (adx + bdy + cdz) = \iint_S \{(c_y - b_z) dydz + (a_z - c_x) dzdx + (b_x - a_y) dxdy\}$$

Da cui, tenuto conto della definizione data ai tre integrali

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dydz, \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dzdx, \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dxdy$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (adx + bdy + cdz) &= \iint_S \{(c_y - b_z)\nu_x + (a_z - c_x)\nu_y + (b_x - a_y)\nu_z\} \, d\sigma = \\ &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \times \vec{\nu} \, d\sigma \end{aligned}$$

che esprime la formula di Stokes già osservata nel capitolo precedente.

### 6. Campi a divergenza nulla

Ad ogni campo vettoriale

$$\vec{F} = \{\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)\}$$

si associa il suo rotore

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Viceversa quali campi vettoriali sono dei rotori ?

La risposta é semplice e costruttiva, almeno localmente:

**TEOREMA 6.1.** *Assegnato il campo vettoriale  $\vec{F}$ , di classe  $C^1$  in un aperto convesso  $\Omega$  esiste in tale aperto un campo  $U$  tale che*

$$\text{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

se e solo se riesce  $\text{div} \vec{F} = 0$

**DIMOSTRAZIONE.**

Supponiamo, per semplicitá che  $\Omega$  sia un intorno rettangolare dell'origine: per ogni punto  $P \in \Omega$  possiamo quindi tranquillamente lavorare sugli spigoli del parallelepipedo di estremi  $P$  e l'origine.

Necessitá

Sia  $F = \{a, b, c\}$  e sia  $U = \{A, B, C\}$  tale che

$$\text{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

ovvero

$$(51) \quad \begin{cases} C_y - B_z = a \\ A_z - C_x = b \\ B_x - A_y = c \end{cases}$$

riesce

$$\text{div} \vec{F} = a_x + b_y + c_z$$

quindi, tenuto conto delle (51),

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(C_y - B_z) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z - C_x) + \frac{\partial}{\partial z}(B_x - A_y) = \\ &= C_{yx} - B_{zx} + A_{zy} - C_{xy} + B_{xz} - A_{yz} = 0 \end{aligned}$$

avendo tenuto conto del teorema di Schwarz sulla permutabilità dell'ordine di derivazione parziale.

Sufficienza

Costruiamo un vettore  $U$  che soddisfi l'equazione

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

nella forma

$$U = \{A, B, 0\}$$

Tenuto conto delle (51) e della scelta  $C = 0$  sarà

$$\begin{cases} A_z = b & \Rightarrow A(x, y, z) = \int_0^z b(x, y, \xi) d\xi + \alpha(x, y) \\ B_z = -a & \Rightarrow B(x, y, z) = -\int_0^z a(x, y, \xi) d\xi + \beta(x, y) \end{cases}$$

La scelta proposta soddisfa le prime due equazioni del sistema (51): per quanto concerne la terza equazione,  $B_x - A_y = c$ , osserviamo che dalla costruzione della due funzioni  $A$  e  $B$  si ha, derivando sotto il segno di integrale<sup>1</sup>

$$\begin{cases} A_y(x, y, z) = \int_0^z b_y(x, y, \xi) d\xi + \alpha_y(x, y) \\ B_x(x, y, z) = -\int_0^z a_x(x, y, \xi) d\xi + \beta_x(x, y) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) &= -\int_0^z \{a_x(x, y, \xi) + b_y(x, y, \xi)\} d\xi + \\ &+ \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'ipotesi  $\operatorname{div}(F) = a_x + b_y + c_z = 0$ , cioè

$$c_z = -\{a_x + b_y\}$$

si ha anche

$$B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) = \int_0^z c_z(x, y, \xi) d\xi + \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y)$$

---

<sup>1</sup>Operazione consentita dalla regolarità  $F \in C^1$

ovvero integrando  $c_z$

$$B_x(x, y, z) - A_y(x, y, z) = c(x, y, z) - c(x, y, 0) + \beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y)$$

Perché le funzioni  $A$  e  $B$  soddisfino anche la terza equazione del sistema (51) basta che le due funzioni  $\alpha(x, y)$  e  $\beta(x, y)$  soddisfino l'uguaglianza

$$\beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) = c(x, y, 0)$$

cosa che si può ottenere prendendo, ad esempio

$$\begin{cases} \alpha(x, y) \equiv 0 \\ \beta(x, y) = \int_0^x c(\xi, y, 0) d\xi \end{cases}$$

Concludendo il vettore  $U = \{A, B, 0\}$  con

$$\begin{cases} A(x, y, z) = \int_0^z b(x, y, \xi) d\xi \\ B(x, y, z) = -\int_0^z a(x, y, \xi) d\xi + \int_0^x c(\xi, y, 0) d\xi \end{cases}$$

soddisfa la relazione

$$\text{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

□

OSSERVAZIONE 6.2. *Tenuto conto che i gradienti hanno rotore nullo, sono soluzioni dell'equazione*

$$\text{rot}(\vec{U}) = \vec{F}$$

anche tutti i campi

$$\vec{V} = \vec{U} + \nabla\Phi(x, y, z)$$

qualunque sia la funzione  $\Phi \in C^2$ .

### 6.1. Flusso di campi a divergenza nulla.

Siano

- $\vec{F}$  un campo vettoriale di classe almeno  $C^1$ , a divergenza nulla,
- $\Sigma$  una superficie, con  $\Sigma \subseteq \Omega$  aperto convesso di  $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} = \partial\Sigma$  il suo bordo

Dal precedente Teorema 6.1 riesce, nell'aperto convesso  $\Omega$ ,

$$\vec{F} = \text{rot}(\vec{U})$$

e quindi, dalla formula di Stokes si ha

$$(52) \quad \iint_{\Sigma} \vec{F} \times \vec{\nu} d\sigma = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{U}) \times \vec{\nu} d\sigma = \int_{\mathcal{C}} \vec{U} \times \vec{\tau} ds$$

OSSERVAZIONE 6.3. La precedente equazione (52) chiarisce il legame tra  $F$  e i molti possibili campi  $V = U + \nabla\Phi$  tali che

$$\operatorname{rot}(U + \nabla\Phi) = F$$

Gli addendi  $\nabla\Phi$  rappresentano campi conservativi, quindi

$$\int_c \nabla\Phi \times \vec{\tau} ds = 0$$

e quindi non influiscono sulla (52).

### 6.2. Campi a rotore nullo.

Ricordiamo un risultato analogo relativo ai campi  $F$  con  $\operatorname{rot}(F) = 0$  stabilito nel corso di Funzioni di piú variabili con il nome di Lemma di Poincaré

TEOREMA 6.4. Assegnato il campo vettoriale  $\vec{F}$ , di classe  $C^1$  in un aperto convesso<sup>2</sup>  $\Omega$  esiste in tale aperto un suo potenziale  $\Phi(x, y, z)$

$$\nabla(\Phi(x, y, z)) = \vec{F}$$

se e solo se riesce  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

#### Riassumendo

In un aperto convesso si ha:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{F}) = 0 & \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla\Phi \\ \operatorname{div}(\vec{F}) = 0 & \Leftrightarrow \vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{U}) \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>Il Lemma di Poincaré era stato dimostrato addirittura in aperti  $\Omega$  stellati, una classe di insiemi piú generale di quella dei convessi.

**Parte 6**

**Funzioni implicite**



## Risolvere equazioni

### 1. Introduzione

Dai ricordi scolastici il termine risolvere un'equazione si abbina quasi certamente a equazioni molto particolari (equazioni di primo grado, di secondo, qualche equazione trigonometrica o esponenziale)

$$(53) \quad \begin{cases} kx^2 + 5x & = 1 \\ x + b & = 0 \\ x + y & = 1 \\ \dots & = \dots \end{cases}$$

Sempre problemi in cui si cercavano valori dell'incognita (quasi sempre detta  $x$  o  $y$ ) che soddisfacessero appunto l'equazione assegnata.

Un aspetto quasi sempre trascurato era il fatto che

- le equazioni proposte contenevano un parametro (ad esempio, nel caso dell'equazione di secondo grado nel primo esempio il coefficiente  $k$ )
- le soluzioni dell'equazione dipendono certamente da tale parametro: in altri termini le soluzioni dell'equazione sono

*funzioni dei coefficienti*

Considereremo, in questo capitolo, equazioni

$$(54) \quad F(x, y) = 0$$

contenenti un solo parametro rappresentato dalla prima variabile, e nelle quali l'incognita sia rappresentata dalla seconda variabile.

Riferendoci agli esempi (53) sarà quindi

$$\begin{cases} F(k, x) = kx^2 + 5x - 1 \\ F(b, x) = x + b \\ F(x, y) = x + y - 1 \\ \dots = \dots \end{cases}$$

Le funzioni  $y(x)$  (se ne esistono) soluzioni dell'equazione si dicono **funzioni implicite**

definite dalla (54).

La simmetria con la quale l'equazione (54) si presenta permette di scambiare i ruoli della prima con la seconda variabile

- equazione nell'incognita  $y$  dipendente dal parametro  $x$
- oppure equazione nell'incognita  $x$  dipendente dal parametro  $y$ .

La seconda chiave di lettura condurrà alla determinazione delle funzioni  $x(y)$  che si diranno anch'esse *funzioni implicite* definite dalla (54).

ESEMPIO 1.1.

$$y^3 + x^2 - 1 = 0, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = \sqrt[3]{1 - x^2} \\ x(y) = \pm\sqrt{1 - y^3} \end{cases}$$

ESEMPIO 1.2.

$$y^2 + 2xy + 1 = 0, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = -x + \pm\sqrt{x^2 - 1} \\ x(y) = -\frac{1 + y^2}{2y} \end{cases}$$

se  $|x| \geq 1$ .

ESEMPIO 1.3.

$$e^y + x^2 + 1 = 0, \quad \rightarrow \quad \emptyset$$

*nessuna funzione implicita, infatti l'equazione proposta, qualunque sia  $x$ , non è soddisfatta da alcun  $y$ .*

### 1.1. Equazioni di tipo particolare.

Un caso di equazioni  $F(x, y) = 0$  particolare è il seguente

$$f(x) - g(y) = 0$$

La sua risoluzione,  $f(x) = g(y)$  corrisponde a trovare le coppie  $(x_1, y_1)$  in corrispondenza alle quali le due funzioni  $f$  e  $g$  assumono gli stessi valori.

In termini di funzioni inverse  $g^{-1}$  o  $f^{-1}$  l'equazione  $f(x) = g(y)$  corrisponde a

$$y = g^{-1}[f(x)], \quad x = f^{-1}[g(y)]$$

#### 1.1.1. L'interpretazione grafica.

Risolvere l'equazione

$$e^y - \frac{1}{2} \sin(y) = 1 + x^2$$

corrisponde a

- disegnare i grafici delle due funzioni

$$z = 1 + t^2, \quad z = e^t - \frac{1}{2} \sin(t)$$

- riconoscere le coppie  $t_1$  e  $t_2$  in corrispondenza alle quali raggiungono gli stessi valori.

Consideriamo, vedi Figura 1, i due grafici:

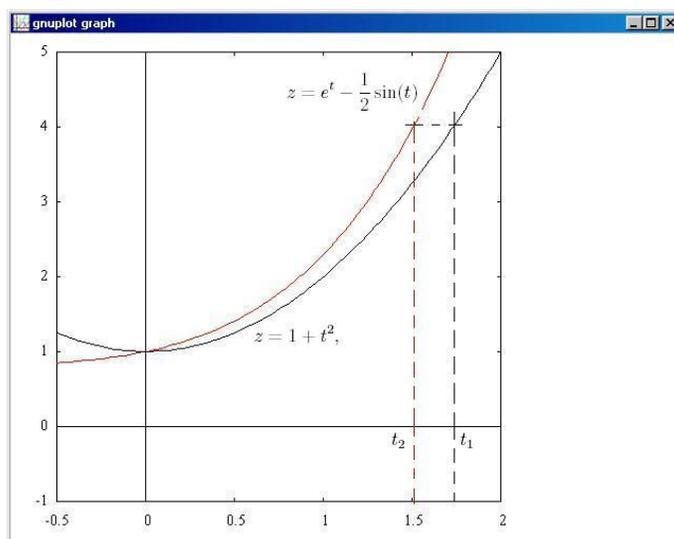


FIGURA 1.  $z = 1 + t^2$ ,  $z = e^t - \frac{1}{2} \sin(t)$

- scelta l'ascissa  $t_1$  che rappresenta la  $x$ ,
- determiniamo l'altezza  $1 + t_1^2$ ,
- cerchiamo in quale ascissa  $t_2$ , che rappresenta la  $y$  la seconda funzione  $e^t - 1/2 \sin(t)$  raggiunge la stessa altezza.

Il legame tra  $t_1$  e  $t_2$  rappresenta la funzione implicita definita dall'equazione  $e^y - \frac{1}{2} \sin(y) = 1 + x^2$ .

Nel caso in Figura 1 al valore  $t_1 \simeq 1.75$  corrisponde il valore  $t_2 \simeq 1.5$ .

## 2. Gli insiemi di livello

Consideriamo gli *insiemi di livello*<sup>1</sup> della funzione  $z = F(x, y)$  definita in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ :

$$E_c = \{(x, y) \in \Omega | F(x, y) = c\}$$

si dice insieme di livello di  $F$  relativo al valore  $c$ .

Puó succedere che:

- Gli insiemi di livello siano delle linee molto semplici del piano,

<sup>1</sup>Si parla quasi sempre di *linee di livello* piuttosto che di *insiemi di livello* perché per la maggior parte delle funzioni piú regolari gli insiemi di livello sono delle curve, cioè delle linee del piano.

- che si presentano come grafici di funzioni  $y = f(x)$  come accade, ad esempio se  $F(x, y) = x + y$

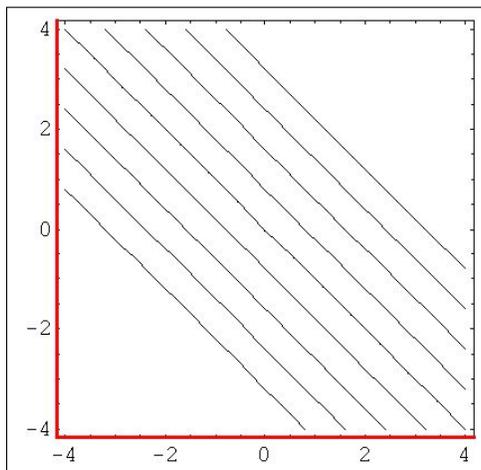


FIGURA 2.  $F(x, y) = x + y \quad -4 \leq F(x, y) \leq 4$

- che si presentano come grafici di funzioni  $x = g(y)$  come accade ad esempio se  $F(x, y) = x - y^2$

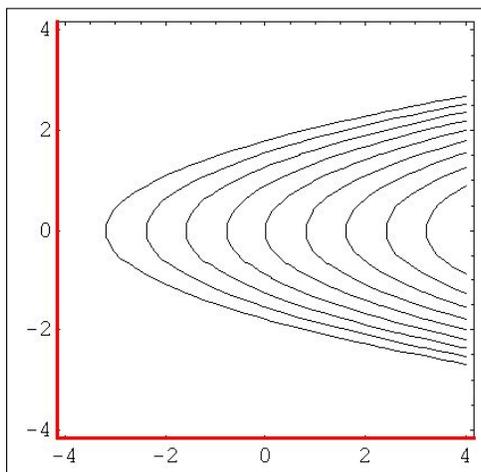


FIGURA 3.  $F(x, y) = x - y^2 \quad -4 \leq F(x, y) \leq 4$

- come curve del piano che non sono grafici né di funzioni  $y = f(x)$  né  $x = g(y)$  come accade, ad esempio se  $F(x, y) = x^2 + y^2$  e  $c \geq 0$
- Alcuni insiemi di livello coincidano con l'insieme vuoto, come accade, ad esempio se  $F(x, y) = x^2 + y^2$  e  $c < 0$

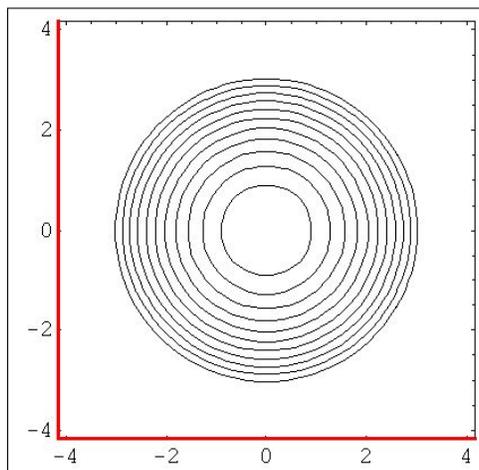


FIGURA 4.  $F(x, y) = x^2 + y^2$   $0 \leq F(x, y) \leq 10$

- Alcuni insiemi di livello possono essere regioni del piano dotate di interno, come accade ad esempio se  $F(x, y) = [x + y]$  avendo

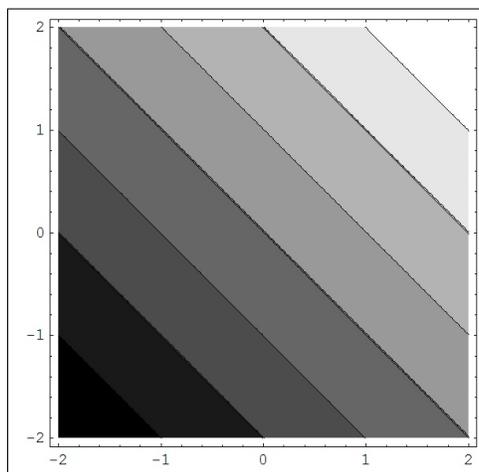


FIGURA 5.  $F(x, y) = [x + y]$   $-2 \leq F(x, y) \leq 5$

indicato con [...] la funzione parte intera.

### 3. Interpretazione geometrica

Risolvere l'equazione <sup>2</sup>

$$(55) \quad F(x, y) = 0$$

equivale a determinare l'insieme di livello

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

ovvero determinare le intersezioni della superficie grafico di

$$z = F(x, y)$$

con il piano  $z = 0$ .

Supponiamo naturalmente che la funzione  $F(x, y)$  di cui ci occupiamo abbia una grande regolarità che ci consenta ad esempio di eseguire su di essa tutte le derivazioni parziali che ci serviranno.

Una scelta ragionevole può essere quella di

$$F \in C^\infty(\Omega)$$

con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

Ci sono le tre seguenti possibilità:

- 1 il piano e il grafico non si intersecano affatto,  
(l'equazione (55) non ha soluzioni, ad esempio  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ )
- 2 il piano e il grafico si toccano in un solo punto, cioè il piano è tangente alla superficie,  
(ad esempio  $x^2 + y^2 = 0$  per la quale si trova il solo  $(0, 0)$ )
- 3 piano e grafico si intersecano in una (o più) linee,  
(il caso, ad esempio, di  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ )

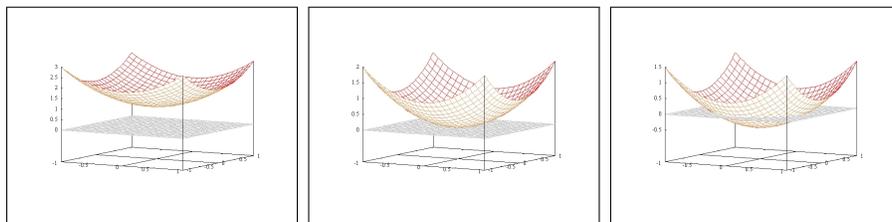


FIGURA 6. Interpretazione geometrica: i tre casi possibili.

<sup>2</sup>Si incontrano equazioni di questo tipo nella definizione cartesiana di molte curve piane, (coniche, ecc.) vedi Vol. I, pag. 102, Vol.II, pag. 224, ecc

#### 4. Il teorema delle funzioni implicite

Per non cadere nel *primo* dei tre casi precedenti, vedi Figura 6, ammettiamo che esista almeno un punto  $(x_0, y_0)$  tale che  $F(x_0, y_0) = 0$ .

Per non cadere nel *secondo* caso, sempre di Figura 6, evitiamo che il piano  $z = 0$  sia tangente alla superficie  $z = F(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Tenuto conto che il piano tangente alla superficie grafico ha equazione

$$z = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

avendo tenuto conto che  $F(x_0, y_0) = 0$ , richiedere che esso sia diverso da  $z = 0$  equivale a richiedere che una almeno delle due derivate parziali

$$F_x(x_0, y_0) \quad F_y(x_0, y_0)$$

sia diversa da 0.

**TEOREMA 4.1** (Teorema di Dini). *La funzione  $F(x, y)$  sia di classe  $C^1$  (continua con derivate parziali continue) in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ed esista un punto  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tale che*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

*Allora esiste  $\beta_0 > 0$  tale che per ogni  $\beta < \beta_0$  esiste  $\alpha_\beta > 0$  tale che*

- $\forall x \in (x_0 - \alpha_\beta, x_0 + \alpha_\beta)$  l'equazione  $F(x, y) = 0$ , nell'incognita  $y$  ha una ed una sola soluzione  $y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ , soluzione naturalmente dipendente da  $x$ ,
- detta  $y = f(x)$  tale soluzione, la funzione  $f$  definita in  $(x_0 - \alpha_\beta, x_0 + \alpha_\beta)$  si dice funzione implicita definita dall'equazione  $F(x, y) = 0$ ,
- la funzione implicita  $f$  è continua in  $(x_0 - \alpha_\beta, x_0 + \alpha_\beta)$ ,
- la funzione implicita  $f$  è derivabile in  $(x_0 - \alpha_\beta, x_0 + \alpha_\beta)$  e riesce

$$(56) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

*Analogo risultato con scambi prevedibili se invece di  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  supponiamo  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ .*

**OSSERVAZIONE 4.2.** *Il teorema precedente afferma che, nell'ipotesi*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

*l'insieme di livello  $E_0 : F(x, y) = 0$  limitatamente ai rettangoli*

$$R = (x_0 - \alpha_\beta, x_0 + \alpha_\beta) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

*centrati in  $(x_0, y_0)$  e abbastanza piccoli coincide con il grafico di una funzione continua e derivabile  $y = f(x)$*

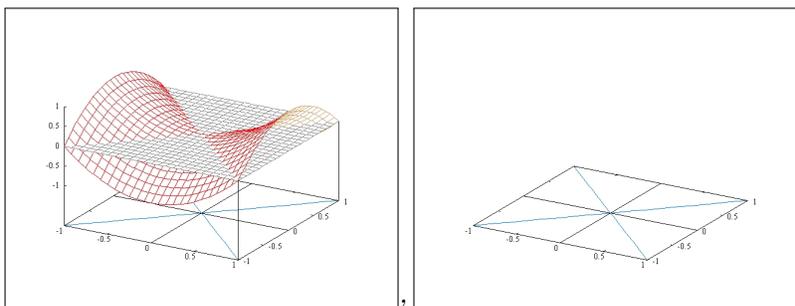


FIGURA 7. Il monumento a Dini in via Ulisse Dini a Pisa, a 100 metri dalla Normale...

*OSSERVAZIONE 4.3. Si pensi alle linee di livello delle carte topografiche: si tratta di linee che non sono quasi mai nel loro intero attorcigliarsi grafici di funzioni.*

*ESEMPIO 4.4. Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 - y^2$ : l'insieme di livello  $E_0 : f(x, y) = 0$  è rappresentato nella Figura seguente  $E_0$  è formato dalle due rette  $y = x$  e  $y = -x$  che si intersecano nell'origine: in nessun rettangolo centrato nell'origine l'insieme  $E_0$  si presenta quindi come il grafico di una funzione<sup>3</sup>  $y = g(x)$ . La cosa non sorprende: infatti in  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  riesce  $f(x_0, y_0) = 0$  ma nessuna delle due*

<sup>3</sup>Un insieme del piano  $x, y$  è il grafico di una funzione  $y = f(x)$  se le rette verticali o non lo intersecano o, se lo intersecano lo fanno in un solo punto: tale proprietà si perde nel caso dell'insieme formato dalle due rette  $y = \pm x$ , insieme intersecato dalle verticali  $x = k \neq 0$  sempre in due punti  $(k, k)$  e  $(k, -k)$ .

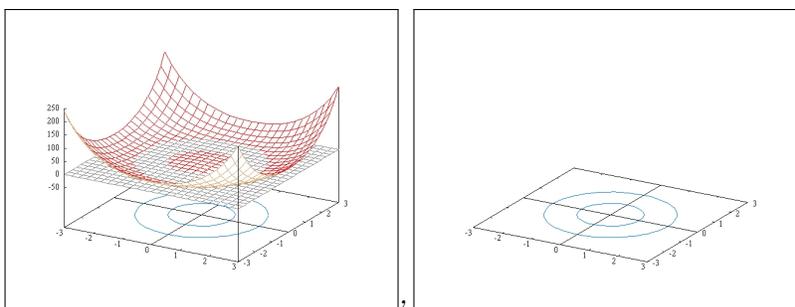
FIGURA 8.  $z = f(x, y)$ ,  $f(x, y) = 0$ 

derivate  $f_x = 2x$  e  $f_y = -2y$  riesce diversa da zero, come richiede il Teorema di Dini.

ESEMPIO 4.5. Consideriamo ora invece la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4)$$

L'insieme di livello  $E_0 : f(x, y) = 0$  rappresentato nella figura seguente é formato dalle due circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2: es-

FIGURA 9.  $z = f(x, y)$ ,  $f(x, y) = 0$ 

so non é globalmente il grafico di alcuna funzione  $y = y(x)$ . Il punto  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  appartiene ad  $E_0$ : se consideriamo un rettangolino

$$R : -0.5 \leq x \leq 0.5, \quad 0.8 \leq y \leq 1.2$$

in esso  $E_0$  coincide con un archetto della circonferenza minore e, quindi, coincide con il grafico di  $y = \sqrt{1 - x^2}$

L'esempio riconosce il carattere locale dell'affermazione del Teorema di Dini.

Nel punto  $(0, 1)$  infatti riuscivano soddisfatte le ipotesi del Teorema

$$f(0, 1) = 0, f_y = 2y(x^2 + y^2 - 4) + 2y(x^2 + y^2 - 1), \rightarrow f_y(0, 1) = -6 \neq 0$$

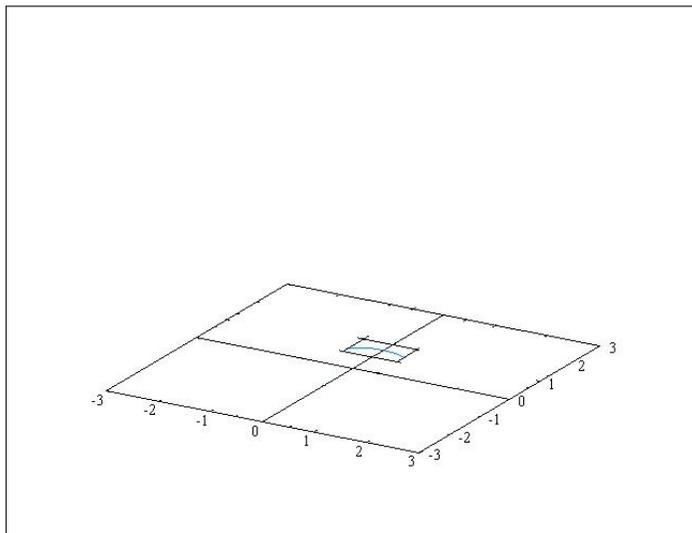


FIGURA 10.  $E_0$  limitatamente al rettangolino coincide con il grafico di  $y = \sqrt{1 - x^2}$

OSSERVAZIONE 4.6. *Le condizioni espresse nel precedente teorema sono **condizioni sufficienti** al raggiungimento delle tesi indicate nei quattro punti indicati nel Teorema 4.1 dopo l' Allora...*

*Si tratta di condizioni che tuttavia **non sono anche necessarie**: l'equazione per esempio  $x^3 - y^3 = 0$  non soddisfa in corrispondenza al punto  $(0,0)$  le ipotesi del Teorema 4.1 (cercate perché) ma, tuttavia definisce, evidentemente, una onestissima funzione implicita...  $f(x) = x$  che possiede tutti i requisiti delle tesi del Teorema.*

OSSERVAZIONE 4.7 (**Un contreesempio... ovvio**). *Un'equazione  $F(x,y) = 0$  può definire implicitamente una funzione  $y = f(x)$  anche al di fuori delle ipotesi del teorema di Dini.*

*Basta pensare al caso*

$$F(x,y) = (y - f(x))^2 = 0,$$

*che definisce la funzione implicita  $y = f(x)$  a prescindere da qualsiasi condizione (regolarità, ecc.) sulla  $f(x)$ .*

#### 4.1. L'unicità.

Si consideri l'esempio dell'equazione  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ovvero  $y^2 = 1 - x^2$ : tutti capiscono che per risolvere tale equazione occorre che  $1 - x^2 \geq 0$  ovvero che  $x \in [-1, 1]$ .

A questo punto scatta la proposta

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Quale delle due funzioni  $y = \sqrt{1-x^2}$  o  $y = -\sqrt{1-x^2}$  é la funzione implicita definita dall'equazione  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ?

Ovvero come mai si é persa l'unicitá ?

Nulla di tutto ciò: l'unicitá resta nel rettangolo

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

nel quale la funzione implicita é  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  come pure nell'altro rettangolo

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 0$$

nel quale é  $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ .

Si noti quindi, anche alla luce di questo esempio, il significato **locale** dell'affermazione

*$\forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  l'equazione  $F(x, y) = 0$ , nell'incognita  $y$  ha una ed una sola soluzione  $y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ , soluzione naturalmente dipendente da  $x$*

fatta nel Teorema di Dini: affermazione che non esclude che ci possano essere altre soluzioni, ma con valori.... fuori di  $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ .

#### 4.2. Un'equazione di secondo grado.

Consideriamo l'equazione nell'incognita  $y$

$$y^2 + 2xy + 1 = 0$$

Se  $x = 1$  essa ha la soluzione  $y = -1$ : in altri termini, se  $x = 1$  l'equazione é risolubile.

Se prendiamo  $x \approx 1$  é giusto affermare che l'equazione sará altrettanto risolubile (naturalmente con radici diverse) ?

No ! Basta servirsi della formula risolutiva per accorgersi che non appena  $|x| < 1$  l'equazione non ha piú radici.

Provate, detta  $f(x, y) = y^2 + 2xy + 1$ , a calcolare la  $f_y$  in corrispondenza ai valori  $x = 1$  e  $y = -1$  osservati: risulta  $f_y = 0$ .

Non c'é da stupirsi che le cose siano andate male...!

OSSERVAZIONE 4.8. *Chi ritenesse <sup>4</sup> che le funzioni discontinue siano una invenzione malata dei matematici provi a considerare la funzione  $C(x)$  che esprime il numero delle radici reali dell'equazione di secondo grado precedente...*

<sup>4</sup> erroneamente,

### 5. La dimostrazione del teorema di Dini

*Questo paragrafo può essere omesso<sup>5</sup>: si tratta della dimostrazione completa del Teorema di Dini, traduzione fedele di quanto esposto nel Courant - John, Introduction to Calculus and Analysis, Volume II, pag. 225.*

L'esistenza delle funzioni implicite deriva direttamente dal teorema d'esistenza degli zeri per le funzioni continue.

Ammettiamo che  $F(x, y)$  sia definita con le sue derivate prime continue in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$  e riesca

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Senza ledere in generalità ammettiamo che

$$m = F_y(x_0, y_0) > 0$$

In caso fosse riuscito invece  $F_y(x_0, y_0) < 0$  sarebbe bastato sostituire l'equazione  $F(x, y) = 0$  con l'equazione equivalente  $-F(x, y) = 0$ .

Poiché  $F_y(x, y)$  è continua possiamo determinare, teorema della permanenza del segno, un rettangolo  $R$  di centro  $(x_0, y_0)$  tanto ristretto da essere contenuto interamente nell'aperto  $\Omega$  in cui  $F(x, y)$  è definita e tale che

$$F_y(x, y) \geq \frac{m}{2}$$

in tutto il rettangolino  $R$ .

Supponiamo che  $R$  sia definito dalle limitazioni

$$x_0 - a < x < x_0 + a, \quad y_0 - \beta < y < y_0 + \beta$$

Poiché  $F_x(x, y)$  è continua in  $R$  sarà limitata in modulo: dunque esistono due costanti positive  $m$  ed  $M$  tali che

$$\forall (x, y) \in R \quad F_y(x, y) > \frac{m}{2}, \quad |F_x(x, y)| \leq M$$

Per ogni fissato  $x$  tra  $x_0 - a$  e  $x_0 + a$  l'espressione  $F(x, y)$  è funzione della  $y$  continua, monotona crescente tra  $y_0 - \beta$  e  $y_0 + \beta$  e riesce, dal teorema di Lagrange,

$$F(x, y) = F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = F_x(\xi, y_0)(x - x_0)$$

essendo  $\xi$  un punto intermedio tra  $x_0$  ed  $x$ .

Se indichiamo con  $\alpha$  un numero compreso tra 0 e  $a$  avremo

$$\forall |x - x_0| \leq \alpha \quad |F(x, y_0)| = |F_x(\xi, y_0)||x - x_0| \leq M\alpha,$$

---

<sup>5</sup>Omissione tuttavia di dubbio vantaggio...

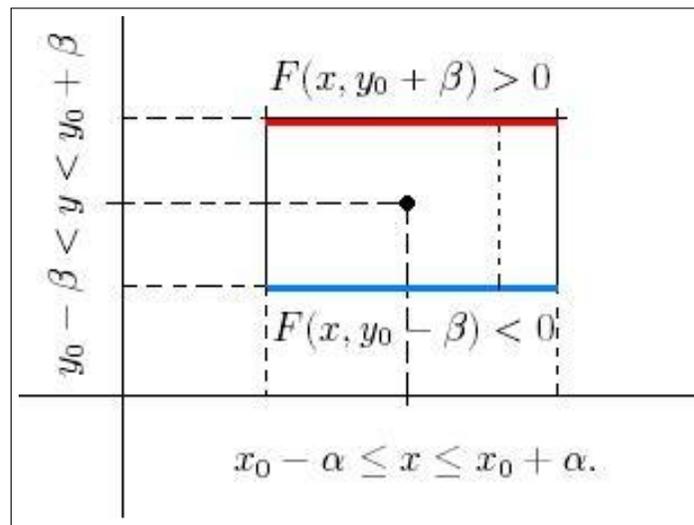


FIGURA 11.  $F < 0$  sul lato blu sotto e  $F > 0$  su quello rosso sopra: teorema d'esistenza degli zeri su ogni segmento verticale...

Analogamente segue da  $F_y \geq m/2$  che

$$F(x, y_0 + \beta) = [F(x, y_0 + \beta) - F(x, y_0)] + F(x, y_0) > \frac{1}{2}m\beta - M\alpha$$

$$F(x, y_0 - \beta) = -[F(x, y_0) - F(x, y_0 - \beta)] + F(x, y_0) < -\frac{1}{2}m\beta + M\alpha$$

Quindi scelto  $\alpha$  tale che

$$\alpha < a, \quad \alpha < \frac{m\beta}{2M}$$

riesce certamente

$$(57) \quad F(x, y_0 - \beta) < 0, \quad F(x, y_0 + \beta) > 0$$

per ogni  $x$  dell'intervallo  $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$ .

Il valore  $\alpha$  scelto dipende ovviamente, per via delle disequazioni che deve soddisfare, da  $\beta$  si tratta cioè di un  $\alpha_\beta$ : continueremo tuttavia, per semplicità a chiamarlo semplicemente  $\alpha$ .

Per ciascun  $x$  con  $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$  l'equazione  $F(x, y) = 0$  ha, teorema d'esistenza degli zeri, una ed una sola soluzione nell'intervallo  $y_0 - \beta < y < y_0 + \beta$ , soluzione che chiamiamo

$$y = f(x)$$

per la quale riesce ovviamente

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$$

La funzione  $f(x)$  di cui sopra é detta funzione implicita definita dall'equazione  $F(x, y) = 0$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

**5.1. Continuitá della funzione implicita.** Quanto detto sopra garantisce esistenza e unicitá della funzione implicita  $f(x)$ , non dá, per ora alcun requisito di regolaritá.

L'ipotesi invece  $F(x, y) \in C^1(\Omega)$  consente di applicare ad essa il teorema di Lagrange in due variabili e quindi di dedurre ottime informazioni riguardanti la funzione implicita.

Siano  $x, x + \Delta x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  riesce naturalmente

$$F(x, f(x)) = 0, \quad F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = 0$$

Da cui anche, teorema di Lagrange in due dimensioni,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) = \\ &= F_x(\xi, f(x))\Delta x + F_y(x + \Delta x, \eta)(f(x + \Delta x) - f(x)) \end{aligned}$$

Da tale relazione si ricava <sup>6</sup>

$$(58) \quad f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{F_x(\xi, f(x))}{F_y(x + \Delta x, \eta)}\Delta x$$

ovvero tenuto conto delle limitazioni verificate dalle derivate parziali  $F_x$  ed  $F_y$  nel rettangolo  $R$ ,

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = \frac{|F_x(\xi, f(x))|}{|F_y(x + \Delta x, \eta)|}|\Delta x| \leq \frac{2M}{m}|\Delta x|$$

Ne deriva quindi che la funzione implicita é continua, anzi Lipschitziana

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq L|\Delta x|$$

con

$$L = \frac{2M}{m}$$

**5.2. Derivabilitá della funzione implicita.** Riprendiamo la relazione (58) che riscriviamo nella forma tradizionale dei rapporti incrementali

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{F_x(\xi, f(x))}{F_y(x + \Delta x, \eta)}$$

Occorre riconoscere che esiste il limite per  $\Delta x \rightarrow 0$ : ma tenuto conto che

$$x \leq \xi \leq x + \Delta x, \quad f(x) \leq \eta \leq f(x + \Delta x)$$

---

<sup>6</sup>La divisione per  $F_y(x + \Delta x, \eta)$  é lecita, si ricordi che  $F_y \geq m/2$ .

e che la funzione implicita  $f(x)$  é stata già riconosciuta continua possiamo osservare che

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \xi \rightarrow x, \quad \eta \rightarrow f(x)$$

Quindi, tenuto sempre conto della continuità delle derivate  $F_x$  ed  $F_y$  si ha

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{F_x(\xi, f(x))}{F_y(x + \Delta x, \eta)} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

ovvero

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

**5.3. La relazione differenziale.** Tenuto conto che

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$$

ci si attende, (se  $f(x)$  é derivabile) dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$(59) \quad F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

da cui l'espressione per

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

ricavata nel precedente teorema.

Formalmente si possono scrivere (se  $f(x)$  é derivabile due volte) le formule della derivata seconda

$$\frac{\partial}{\partial x^2} F(x, f(x))$$

anch'essa identicamente nulla essendo identicamente nulla  $F(x, f(x))$ ,

$$F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, f(x)) \cdot f'(x) + F_{yy}(x, f(x)) f'^2(x) +$$

$$+ F_y(x, f(x)) \cdot f''(x) \equiv 0$$

dalla quale tenuta presente l'espressione di  $f'(x)$  ricavare quella di  $f''(x)$ , ecc. ecc.

### 6. Serviamoci della formula di Taylor

Le precedenti regole di derivazione, vedi (56), sono utili praticamente in un solo *punto speciale*:  $x_0$  perché solo in  $x_0$  conosciamo il valore  $f(x_0) = y_0$  della funzione implicita.

In altri termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = \frac{-1}{F_y(x_0, y_0)} F_x(x_0, y_0) \\ f''(x_0) = \frac{-1}{F_y^3(x_0, y_0)} \{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}\} \\ f^{[k]}(x_0) = \text{ecc.} \end{array} \right.$$

Si noti che a denominatore si incontra sempre una potenza di  $F_y(x_0, y_0)$ , una quantità quindi che... sta bene<sup>7</sup> a denominatore !

Un suggerimento: possiamo approssimare  $f(x)$  con la formula di Taylor

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

potremmo determinarne i coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = y_0 \\ a_1 = \frac{-1}{F_y(x_0, y_0)} F_x(x_0, y_0) \\ a_2 = \frac{-1}{2F_y^3(x_0, y_0)} \{F_y F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}\} \\ a_k = \text{ecc.} \end{array} \right.$$

ESEMPIO 6.1. *Sia*

$$F(x, y) = y^2 - 5y + x$$

*il punto (6, 3) soddisfa l'equazione  $F(x, y) = 0$  e soddisfa la condizione  $F_y(6, 3) = 1 \neq 0$ . La funzione implicita definita da tale equazione é, ovviamente, data dalla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado*

$$f(x) = \frac{1}{2} (5 + \sqrt{25 - 4x})$$

*La scomparsa della nota ambiguitá del segno prima della radice é dovuta al fatto che cerchiamo la soluzione che nel punto  $x = 6$  valga 3.*

<sup>7</sup>Ricordate che lavoriamo con l'ipotesi  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor di ordine  $n = 2$  della funzione implicitamente definita da tale equazione, calcolando i coefficienti con le formule offerte dal Teorema di Dini

- $a_0 = 3$
- $F_x + F_y f' = 0 \rightarrow f'(6) = -1$
- $F_{xx} + 2F_{xy}f' + F_{yy}f'^2 + F_y f'' = 0 \rightarrow f''(6) = -2$

$$P_2(x) = 3 - (x - 6) - (x - 6)^2$$

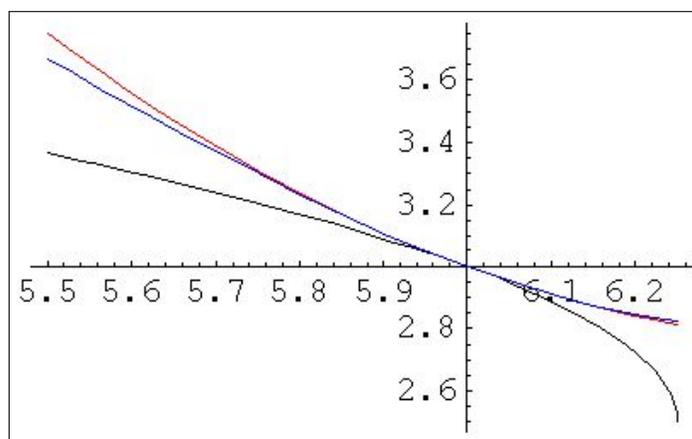


FIGURA 12. La funzione implicita vera, in nero, l'approssimata  $P_2(x)$  in rosso, l'approssimata  $P_3(x)$  in blu.

Calcoliamo ora direttamente lo sviluppo in formula di Taylor della funzione  $f(x) = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{25 - 4x})$  di punto iniziale  $x = 6$

$$f(6) = 3, f'(6) = -1, f''(6) = -2 \quad P_2(x) = 3 - (x - 6) - \frac{2}{2}(x - 6)^2$$

### 6.1. Retta tangente.

Sia  $y = f(x)$  la funzione implicita definita in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$  dall'equazione  $F(x, y) = 0$ : l'equazione della retta tangente al grafico di  $y = g(x)$  nel punto  $(x_0, y_0)$  si scrive, tenuta presente l'espressione di  $f'(x)$  come

$$y = y_0 - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

e si può scrivere anche direttamente con la formula

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

## 7. Usiamo GnuPlot

### 7.1. Le linee di livello con GNUPLOT.

GNUPLOT é in grado di disegnare le linee di livello di una funzione di due variabili.

Ad esempio, scelta  $F(x, y) = x^2 + y^2$ , per disegnare, vedi Figura 13, le linee di livello

$$F(x, y) = k, \quad k = 0, 5, 10, 15, 20, 25$$

includere nel quadrato  $x \in [-10, 10]$ ,  $y \in [-10, 10]$  si può usare il seguente programma,

```
gnuplot> F(x,y) = x**2 + y**2
gnuplot> set contour base
gnuplot> set nosurface
gnuplot> set xrange [-10:10]
gnuplot> set yrange [-10:10]
gnuplot> set cntrparam levels incremental 0,5,25
gnuplot> splot F(x,y)
```

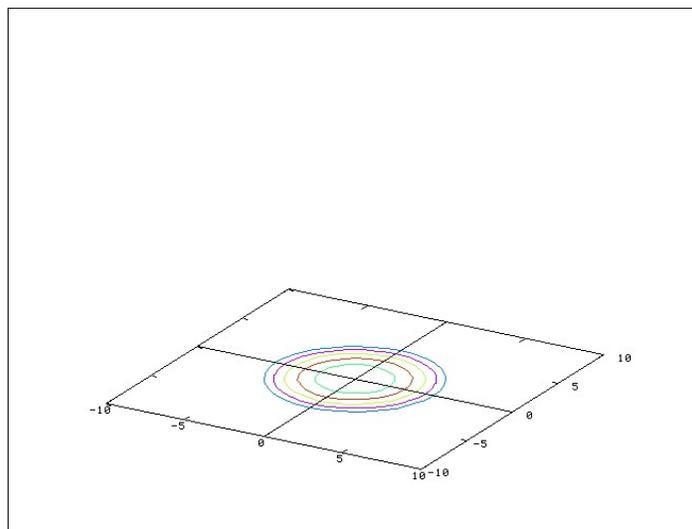


FIGURA 13. Le linee di livello con GNUPLOT

Si noti il comando `set nosurface` che elimina il disegno prospettico della superficie  $z = F(x, y)$ .

Il comando `set cntrparam levels incremental 0,5,25` precisa quali linee di livello si vogliono disegnare.

### 7.2. Un secondo esempio.

Il seguente listato suggerisce come servirsi di GnuPlot per disegnare, vedi Figura 14, grafici di funzioni  $z = f(x, y)$  incluse le linee di livello.

```
gnuplot> set contour base
gnuplot> set cntrparam levels 10
gnuplot> f(x,y) = sin(x*y)
gnuplot> set isosamples 20, 20
gnuplot> set yrange [-2:2]
gnuplot> set xrange [-2:2]
gnuplot> set contour both
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> splot f(x,y)
```

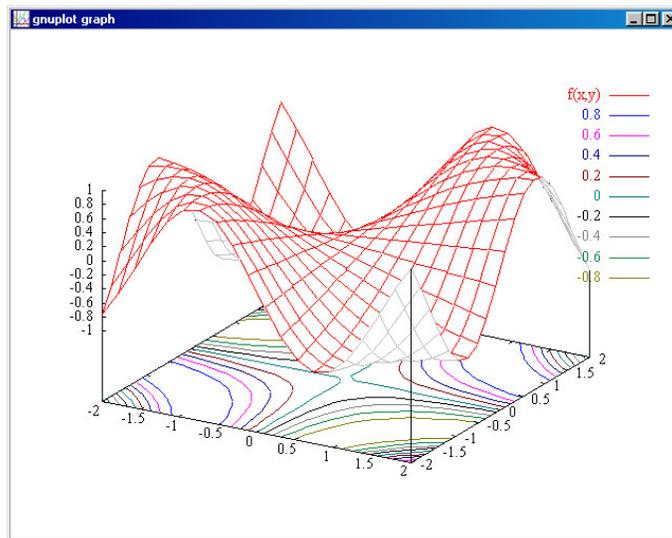


FIGURA 14. Il grafico di  $z = \sin(xy)$  prodotto da GnuPlot

Notate che GnuPlot colora linee di livelli diversi in colori diversi, indicando a destra i valori usati e aiutando quindi la lettura del grafico prodotto.

## 8. Usiamo *Mathematica*

La formula di derivazione delle funzioni implicite  $y = f(x)$  dedotte dall'equazione  $F(x, y) = 0$  offerta dal Teorema 4.1 di Dini

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

consente come é stato osservato, di calcolare, ove l'equazione  $F(x, y) = 0$  sia sufficientemente regolare, anche derivate  $f^{[k]}(x)$  di ordine superiore.

Purtroppo le formule per tali derivate di ordine superiore lievitano, dal punto di vista della complessit , assai rapidamente.

Se é pensabile di scrivere la formula per la derivata seconda, lo é assai meno per la terza e ancora meno per le successive . . .

  pertanto giusto servirsi del computer per dominare calcoli lunghi e quindi soggetti ad errore umano.

Il calcolo delle derivate é un calcolo che comporta quella che si dice

*manipolazione algebrica*

Esistono numerosi software in grado di eseguire *manipolazioni algebriche*: il pi  diffuso é *Mathematica*, che é disponibile in numerosi laboratori di calcolo della Sapienza <sup>8</sup>.

Il comando

```
D[F[x, f[x]], x]
```

produce la regola di derivazione del prodotto

$$f'(x) F^{(0,1)}(x, f(x)) + F^{(1,0)}(x, f(x))$$

Se indichiamo per brevita  con  $(a, b)$  il punto  $(x_0, y_0)$  possiamo ricavare la derivata della funzione implicita  $y = f(x)$  nel punto  $x = a$  con il comando

```
Solve[D[F[x, f[x]], x] == 0, f'[x]] /. {x -> a, f[x] -> b}
```

che produce la risposta

$$f'(a) \rightarrow -\frac{F^{(1,0)}(a, b)}{F^{(0,1)}(a, b)}$$

Gli indici in alto, tipo  $F^{(1,0)}$ , rappresentano ovviamente le derivate parziali di  $F$  rispetto alla prima e/o alla seconda variabile.

Il calcolo della derivata seconda  $f''(a)$  si ottiene con il comando seguente

```
Solve[
{D[F[x, f[x]], x] == 0, D[F[x, f[x]], {x, 2}] == 0},
{f'[x], f''[x]}
] /. {x -> a, f[x] -> b}
```

che produce la risposta per  $f''(a)$  oltre quella gi  nota per  $f'(a)$

---

<sup>8</sup>Le istruzioni per l'uso di questo importante strumento non sono ovviamente incluse in queste dispense ma possono essere trovate direttamente nei Corsi di laboratorio

$$f''(a) \rightarrow \frac{-F^{(0,2)} F^{(1,0)^2} + 2 F^{(0,1)} F^{(1,0)} F^{(1,1)} - F^{(0,1)^2} F^{(2,0)}}{F^{(0,1)^3}}$$

Esempi di derivate d'ordine superiore possono essere proposti riferendosi a espressioni  $F(x, y)$  concrete, per evitare illeggibili lungaggini. Sia ad esempio

$$F(x, y) = e^y - \frac{1}{2} \sin(y) - 1 - x^2, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Indicata con  $y = f(x)$  la funzione implicita, il calcolo delle sue derivate in  $x = 0$  fino all'ordine 3 si fa, con *Mathematica* al modo seguente

```
F[x_, y_] := Exp[y] - Sin[y]/2 - - x^2
```

```
Solve[{D[F[x, f[x]], x] == 0,
       D[F[x, f[x]], {x, 2}] == 0,
       D[F[x, f[x]], {x, 3}] == 0},
       {f'[x], f''[x], f'''[x]}]
 /. {x -> 0, f[x] -> 0}
```

Le risposte che si ottengono sono

$$\{\{f^{(3)}(0) \rightarrow 0, f''(0) \rightarrow -4, f'(0) \rightarrow 0\}\}$$

Chi desiderasse le espressioni delle tre derivate esplicite non ha che da eliminare la richiesta sostituzione di  $x$  e  $y$  con  $(0, 0)$ : il risultato, ad esempio per  $f^{[3]}(x)$  non é entusiasmante... ( $y$  rappresenta  $f(x)$ )

$$f^{(3)}(x) = 4x \left\{ \frac{12e^y + 96e^{3y} + 32x^2 + 128e^{2y}x^2 - 96e^{2y} \cos(y)}{(-2e^y + \cos(y))^5} \right. \\ \left. + \frac{+12e^y \cos(2y) - 16x^2 \cos(2y) + 3 \sin(y) + 48e^{2y} \sin(y)}{(-2e^y + \cos(y))^5} \right. \\ \left. + \frac{+192e^y x^2 \sin(y) - 24e^y \sin(2y) + 3 \sin(3y)}{(-2e^y + \cos(y))^5} \right\}$$

ESEMPIO 8.1. *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) := -1 + x^4 + 5x^3y + 5x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

*Nel punto  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Dini, pertanto tale equazione definisce in un intorno di  $x = 0$  una funzione implicita  $f(x)$  con  $f(0) = 1$ . Si possono determinare inoltre le prime due derivate di tale  $f(x)$  in corrispondenza di  $x = 0$ :*

$$f'(0) = -\frac{1}{4}, \quad f''(0) = -\frac{37}{16}$$

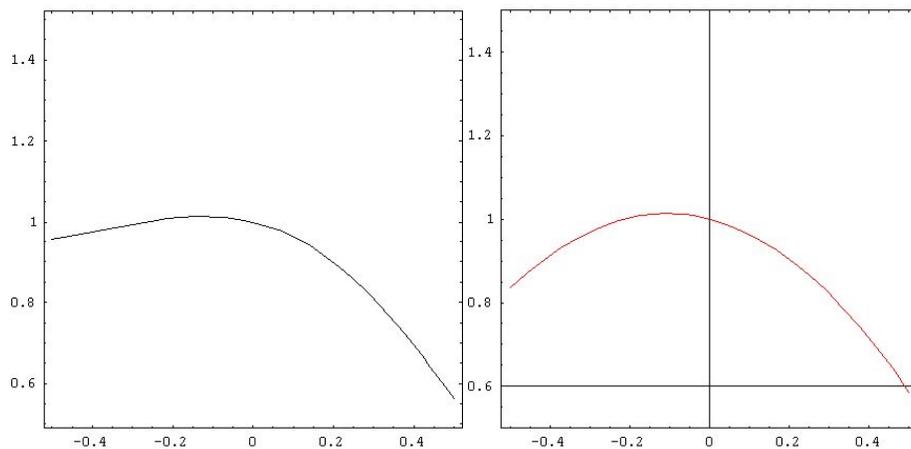


FIGURA 15.  $F(x, y) = 0, f(x) \simeq 1 - \frac{1}{4}x - \frac{37}{32}x^2$

Nella Figura 15 si riconoscono

- a sinistra la linea di livello  $F(x, y) = 0$  passante per  $(0, 1)$
- a destra il grafico della funzione implicita  $f(x)$  ottenuto approssimandola con la formula di Taylor di ordine 2.

Il calcolo delle derivate é stato eseguito tramite Mathematica, come si puó leggere nella Figura 16.

```

Dini_es1.nb
In[48]:= F[x_, y_] := x^4 + 5 x^3 * y + 5 * x^2 * y^2 +
          x * y^3 + y^4 - 1;
In[49]:= f[0] = 1;
In[50]:= Solve[{D[F[x, f[x]], x] == 0, D[F[x, f[x]], {x, 2}] == 0},
              {f'[x], f''[x]}] /. {x -> 0}
Out[50]= {{f''[0] -> -37/16, f'[0] -> -1/4}}
  
```

FIGURA 16. Il calcolo delle derivate con Mathematica

## Equazioni in piú incognite

### 1. Introduzione

All'equazione  $F(x, y) = 0$  si possono affiancare altre equazioni simili ma piú generali

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z, u) = 0, \quad \text{ecc.}$$

equazioni da risolvere rispetto ad una delle variabili che in esse figurano, per esempio la  $z$  nella prima, la  $u$  nella seconda, ecc.

Teoremi di Dini analoghi a quello relativo al caso  $F(x, y) = 0$  richiedono le seguenti, analoghe condizioni sufficienti

- esistenza di un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  o  $(x_0, y_0, z_0, u_0)$

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0$$

soluzione,

- derivata rispetto alla variabile che si vuole esplicitare

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad F_u(x_0, y_0, z_0, u_0) \neq 0$$

diversa da zero in tale punto.

Consideriamo in generale

$$(60) \quad F(x, y, \dots, u) = 0$$

$u$  l'incognita e  $x, y, \dots$  i parametri: il teorema di Dini si estende a questo caso in modo naturale

- regolarit   $C^1$  della  $F$  (rispetto a tutte le variabili),
- esistenza di un punto  $(x_0, y_0, \dots, u_0)$  soluzione dell'equazione,
- $F_u(x_0, y_0, \dots, u_0) \neq 0$ .

La funzione implicita  $u = f(x, y, \dots)$  riesce:

- definita in un intorno (rettangolare) di  $(x_0, y_0, \dots)$  e a valori in un intorno di  $u_0$ ,
- $f(x_0, y_0, \dots) = u_0$ ,
- la funzione  $f(x, y, \dots)$    continua e derivabile

$$f_x = -\frac{F_x(x, y, \dots, u)}{F_u(x, y, \dots, u)}, \quad f_y = -\frac{F_y(x, y, \dots, u)}{F_u(x, y, \dots, u)}, \dots$$

## 2. La formula di Taylor

Consideriamo l'equazione

$$(61) \quad F(x, y, z) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$$

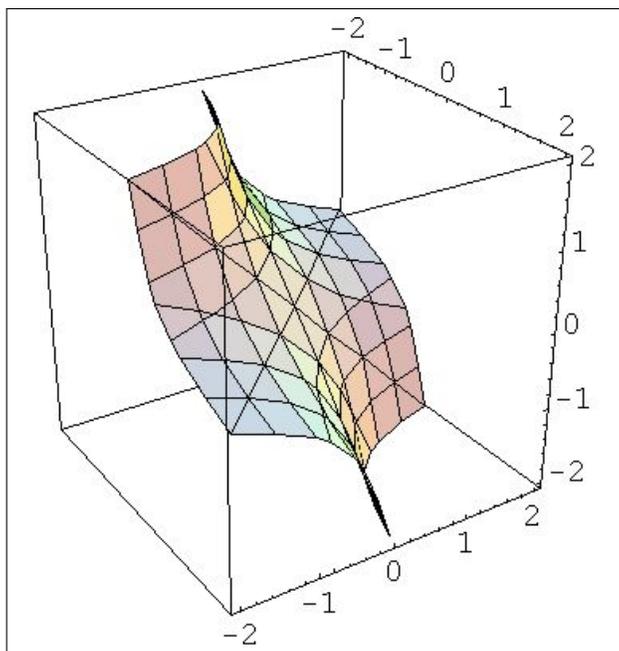


FIGURA 1.  $x + y + z - \sin(xyz) = 0$

Il punto  $(0, 0, 0)$  é soluzione dell'equazione (61) e riesce  $F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$ : sono soddisfatte pertanto le condizioni del teorema di Dini.

Dalle derivate parziali prime

$$\begin{cases} 1 + z_x = \cos(xyz) \{yz + xyz_x\} \\ 1 + z_y = \cos(xyz) \{xz + xyz_y\} \end{cases}$$

segue, nel punto  $(0, 0, 0)$

$$z_x = -1, \quad z_y = -1$$

Le derivate parziali seconde<sup>1</sup>, sempre nell'origine, sono

$$z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 0$$

Le derivate terze nell'origine sono

$$z_{xxx} = 0, z_{xyy} = -2, z_{xyx} = -2, z_{yyy} = 0$$

<sup>1</sup>I risultati sono stati ottenuti in modo automatico tramite *Mathematica*, come indicato nel precedente Capitolo, vedi pagina 251.

Le derivate quarte sono tutte nulle, mentre ci sono due derivate quinte diverse da zero

$$z_{xyyy} = z_{xxyy} = -12$$

Le informazioni raccolte producono la seguente formula di Taylor

$$P(x, y) = 0 - x - y + \frac{1}{2}(0x^2 + 0xy + 0y^2) + \frac{1}{3!}(0x^3 - 6x^2y - 6xy^2 + 0y^3) + \\ + \frac{1}{4!}(0 + 0 + 0 + 0) + \frac{1}{5!}(-120x^2y^3 - 120x^3y^2)$$

Ne segue

$$P(x, y) = -(x + y)(1 + xy + x^2y^2 + \dots)$$

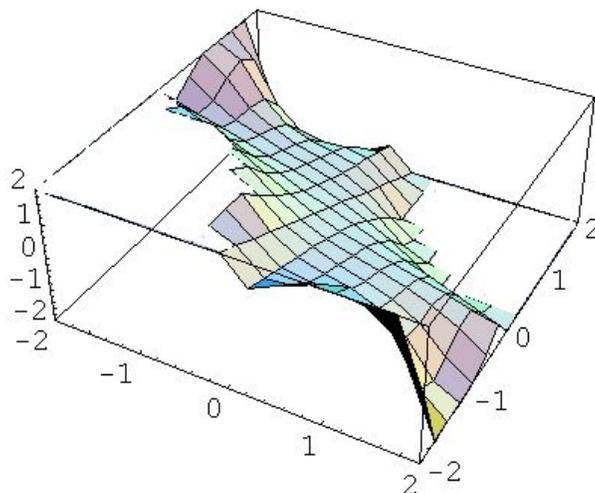


FIGURA 2.  $P(x, y) = -(x + y)(1 + xy + x^2y^2 + \dots)$

Chi avrebbe potuto prevedere che le soluzioni  $z$  dell'equazione (61) dipendessero dai due parametri  $x, y$  in tale modo?

**OSSERVAZIONE 2.1.** *La regola di derivazione della funzione implicita  $u = f(x, y, \dots)$  dedotta dall'equazione  $F(x, y, \dots, u) = 0$  si ricorda facilmente scrivendo la formula del differenziale*

$$(62) \quad dF = F_x dx + F_y dy + \dots + F_u du = 0$$

La relazione mostra come

$$\text{muovendosi sotto il vincolo } F(x, y, \dots, u) = 0$$

gli spostamenti  $dx, dy, \dots, du$  siano collegati fra loro dalla relazione (62).

ESEMPIO 2.2. *Supponiamo che l'equazione sia*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

*Quali spostamenti  $\{dx, dy, dz\}$  si possono compiere a partire da un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  della superficie sferica volendo restare il piú aderenti possibile ad essa ?*

*Risposta: il vettore  $\{dx, dy, dz\}$  deve riuscire ortogonale al vettore*

$$\{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

*Tenuto presente il caso scelto di una sfera,  $\{dx, dy, dz\}$  dovrà essere preso ortogonale a*

$$\{x_0, y_0, z_0\}$$

*ovvero*

$$x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz = 0$$

### 3. Tangenti, normali, curvatura

Il grafico  $y = f(x)$ , con  $f(x)$  derivabile, possiede nel punto  $(\xi, \eta)$

- la retta tangente  $y - \eta = f'(\xi)(x - \xi)$
- la retta normale  $x - \xi = -f'(\xi)(y - \eta)$
- la curvatura

$$k(\xi) = \frac{|f''(\xi)|}{(1 + f'^2(\xi))^{3/2}}$$

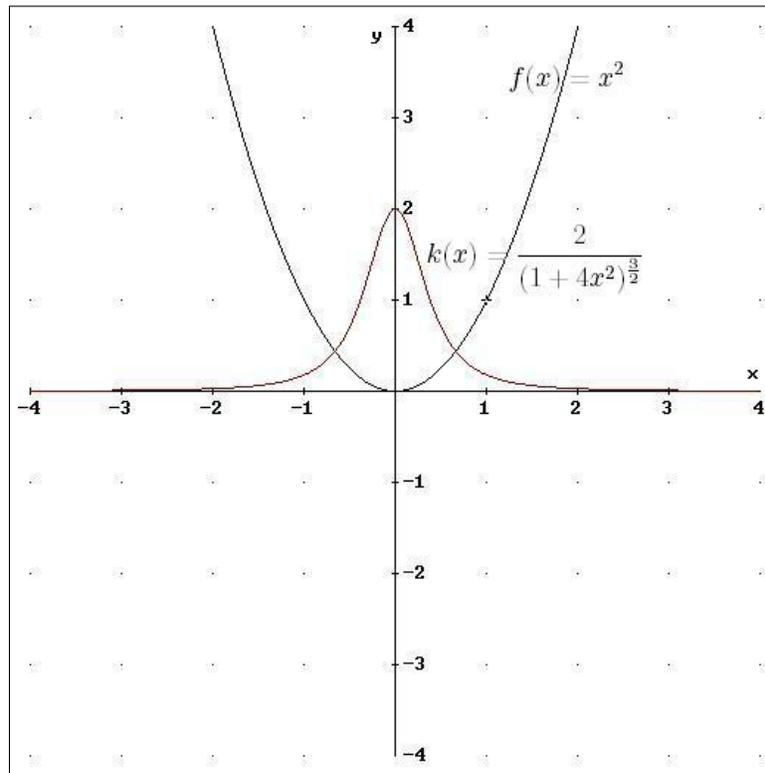


FIGURA 3. La parabola e la sua curvatura

$$f(x) = x^2, \quad k(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si noti come la curvatura <sup>2</sup>, in Figura (3) la linea a campana, sia massima nell'origine e vada smorzandosi mano mano che  $|x|$  diventa grande.

#### 4. Tangente per funzioni implicite

La  $y = f(x)$  sia definita implicitamente dall'equazione  $F(x, y) = 0$ , il punto  $(x_0, y_0)$  soddisfi l'equazione e in tale punto una almeno delle due derivate parziali sia diversa da 0, allora la tangente é data dall'equazione

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0$$

<sup>2</sup>Ricordate che il valore della curvatura rappresenta veramente una misura... della curvatura: pensate a quanto dovrebbe tenere girato il volante un automobilista che percorresse una autostrada disegnata a parabola. Vicino al vertice volante molto girato (pericolo di andare fuori strada...), lontano dal vertice si respira, sembra sempre piú quasi un rettilineo...

### 5. Normali per funzioni implicite

Il vettore

$$\{F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)\}$$

applicato nel punto  $(x_0, y_0)$  é perpendicolare al grafico della funzione implicita  $y = f(x)$  definita dall'equazione  $F(x, y) = 0$ .

Un versore normale a tale grafico é quindi

$$\left\{ \frac{F_x(x_0, y_0)}{\sqrt{F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0)}}, \frac{F_y(x_0, y_0)}{\sqrt{F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0)}} \right\}$$

La retta normale ha equazione

$$(x - x_0)F_y(x_0, y_0) - (y - y_0)F_x(x_0, y_0) = 0$$

### 6. Curvatura

Dalle due relazioni

$$F_x + F_y f' = 0, \quad F_{xx} + 2F_{xy}f' + F_{yy}(f')^2 + F_y f'' = 0$$

si ricava

$$k(x, y) = \left| \frac{F_{xx} + 2F_{xy}f' + F_{yy}(f')^2}{F_{yy}(1 + (f')^2)^{3/2}} \right|$$

ovvero sostituendo l'espressione di  $f'$  si ha

$$(63) \quad k(x, y) = \left| \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_x F_y + F_{yy}F_x^2}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2}} \right|$$

ESEMPIO 6.1. *Studiamo la curvatura dell'ellisse*

$$x^2 + 5y^2 = 1$$

Tenuto presente che

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 + 5y^2 - 1 \\ F_x(x, y) &= 2x \\ F_y(x, y) &= 10y \\ F_{xx} &= 2 \\ F_{xy} &= 0 \\ F_{yy} &= 10 \end{aligned}$$

Dalla (63) si ha

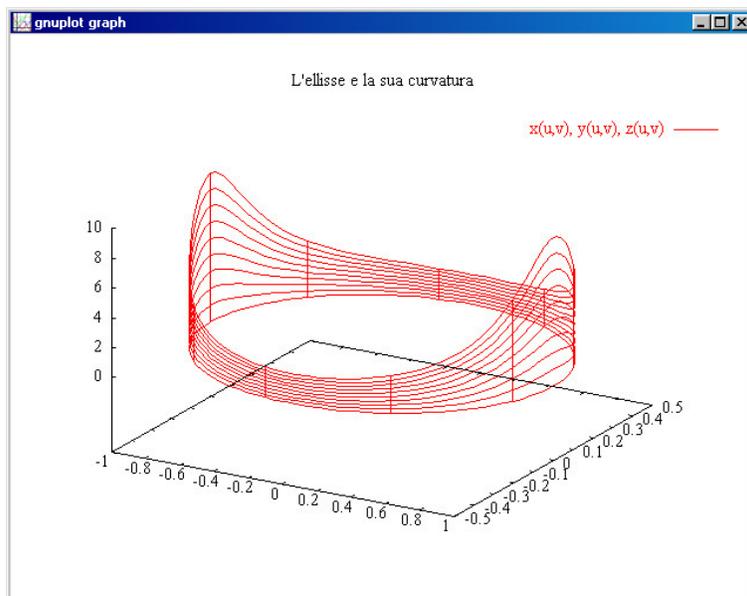


FIGURA 4.  $x^2 + 5y^2 = 1$ ,  $k(x, y) = \frac{200y^2 + 40x^2}{\sqrt{(100y^2 + 4x^2)^3}}$

$$k(x, y) = \left| \frac{200y^2 + 40x^2}{(100y^2 + 4x^2)^{3/2}} \right|$$

Calcoliamo l'espressione trovata nei 4 vertici:

$$k(\pm 1, 0) = \frac{40}{8} = 5, \quad k(0, \pm 1/\sqrt{5}) = \frac{40}{(20)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx 0.447$$

Curvatura molto piú grande nei due vertici sull'asse  $x$ , assai minore su quelli sull'asse  $y$ .

Nella Figura 4 l'altezza del muro fantasioso elevato sull'ellisse simula il valore della curvatura.



## Il caso dei sistemi

Invece di un'equazione si possono considerare sistemi

$$(64) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni geometricamente rappresentano l'intersezione delle due superfici

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

Si vorrebbe poter riconoscere che le soluzioni del sistema coincidano con una curva di equazioni parametriche

$$y = Y(x), \quad z = Z(x)$$

La costruzione é teoricamente semplicissima:

- supponiamo di conoscere un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  soluzione
- supponiamo che riesca  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- dalla prima equazione  $f(x, y, z) = 0$  ricaviamo la funzione implicita  $z = \varphi(x, y)$
- sostituiamo la  $z = \varphi(x, y)$  nella seconda equazione del sistema  $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ ,
- supponiamo che riesca

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, \varphi(x, y)) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \neq 0$$

- da essa ricaviamo la  $y = Y(x)$
- sostituiamo la  $y = Y(x)$  nella  $z = \varphi(x, Y(x)) = Z(x)$

Le funzioni  $y = Y(x)$ ,  $z = Z(x)$  sono le funzioni implicitamente definite dal sistema (64).

### 1. Il Teorema di Dini per i sistemi

I sistemi (64) piú semplici sono quelli lineari:

$$(65) \quad \begin{cases} ax + by + cz = h \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \kappa \end{cases}$$

geometricamente l'intersezione di due piani.

La condizione di risolvibilità,  $y$  e  $z$  in funzione di  $x$  ben nota é

$$\det \begin{pmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \neq 0$$

Tale condizione corrisponde, nel caso generale, alla

$$\det \begin{pmatrix} f_y(x, y, z) & f_z(x, y, z) \\ g_y(x, y, z) & g_z(x, y, z) \end{pmatrix} \neq 0$$

Il precedente determinante si indica in modo abbreviato con la notazione:

$$(66) \quad J(x, y, z) = \det \left( \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right) \neq 0$$

Il determinante (66) si dice lo *Jacobiano* di  $f$  e  $g$  rispetto ad  $y$  e  $z$ . Tenuto presente che il determinante jacobiano  $J(x, y, z)$  é una funzione di  $(x, y, z)$  la condizione di determinabilità delle funzioni implicite  $y = Y(x)$ ,  $z = Z(x)$  definite dal sistema (64) sarà presumibilmente, per analogia con il caso lineare,

$$(67) \quad J(x_0, y_0, z_0) = \det \begin{pmatrix} f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

dalla quale, per continuità discende che il determinante si conserverá diverso da zero in tutto un intorno di tale punto  $(x_0, y_0, z_0)$  e quindi....

**TEOREMA 1.1** (Teorema di Dini per i sistemi). *Le funzioni  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  siano di classe  $C^1$  (continue con derivate parziali prime continue) e riesca*

$$f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$J(x_0, y_0, z_0) = \det \begin{pmatrix} f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora esiste un dominio rettangolare tridimensionale

$$x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \quad y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta, \quad z_0 - \gamma \leq z \leq z_0 + \gamma$$

tale che

- $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  il sistema

$$(68) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

nelle incognite  $y, z$  ha una ed una sola coppia soluzione

$$y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta), \quad z \in (z_0 - \gamma, z_0 + \gamma),$$

coppia naturalmente dipendente da  $x$ ,

- detta  $y = Y(x)$ ,  $z = Z(x)$  tale coppia soluzione, le funzioni  $Y, Z$  definite in  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  si dicono funzioni implicite definite dal sistema (68),
- $y = Y(x)$ ,  $z = Z(x)$  sono funzioni continue e derivabili,
- applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte alle due relazioni

$$f(x, Y(x), Z(x)) \equiv 0, \quad g(x, Y(x), Z(x)) \equiv 0$$

si ricava

$$(69) \quad \begin{cases} f_x + f_y Y'(x) + f_z Z'(x) = 0 \\ g_x + g_y Y'(x) + g_z Z'(x) = 0 \end{cases}$$

essendo le derivate parziali della  $f$  e della  $g$  calcolate in  $(x, Y(x), Z(x))$ .

- risolvendo con le formule di Cramer il sistema lineare (69) nelle incognite  $Y'(x)$  e  $Z'(x)$  si ottiene

$$Y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -f_x & f_z \\ -g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}, \quad Z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_y & -f_x \\ g_y & -g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}$$

### 1.1. Lo jacobiano $\neq 0$ . Osserviamo come la condizione

$$J(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

garantisca la possibilità di applicare due volte il Teorema di Dini, come accennato precedentemente.

Se riesce  $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  allora una delle due derivate parziali  $f_y$  o  $f_z$  è diversa da zero nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Supponiamo che sia  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ : allora dalla prima equazione si ricava

$$z = \varphi(x, y)$$

Si sostituisce nella seconda

$$g(x, y, \varphi(x, y))$$

per ricavare  $y$  da quest'ultima che ora è diventata una funzione  $F(x, y)$  basta riconoscere che la derivata  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ : ovvero

$$0 \neq |g_y + g_z \varphi_y| = \left| g_y + g_z \left( -\frac{f_y}{f_z} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{g_y f_z - g_z f_y}{f_z} \right| = \left| \frac{1}{f_z} \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \right| \neq 0$$

OSSERVAZIONE 1.2. Anche nel caso dei sistemi, naturalmente riferiti a funzioni di regolarità adeguata, si possono determinare oltre alle derivate prime  $Y'(x)$  e  $Z'(x)$  le derivate seconde, terze, ecc.

La complicazione del calcolo è naturalmente evidente.

Valori espliciti delle derivate  $Y^{[k]}(x)$  e  $Z^{[k]}(x)$  possono comunque essere ricavati nel punto  $x = x_0$

OSSERVAZIONE 1.3. L'osservazione precedente suggerisce, come nel caso unidimensionale, la possibilità di approssimare le funzioni implicite tramite la formula di Taylor

$$Y(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k, \quad Z(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k$$

stante la possibilità (abbastanza teorica) di calcolare i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$ .

OSSERVAZIONE 1.4. Un vettore  $\vec{t}$  tangente nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  alla curva determinata dal sistema (68) può essere ottenuto anche come prodotto vettoriale

$$\vec{t} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

avendo tenuto presente che i due gradienti sono ortogonali alle due superfici  $f(x, y, z) = 0$  e  $g(x, y, z) = 0$ .

Riesce quindi

$$(70) \quad \vec{t} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

Il risultato

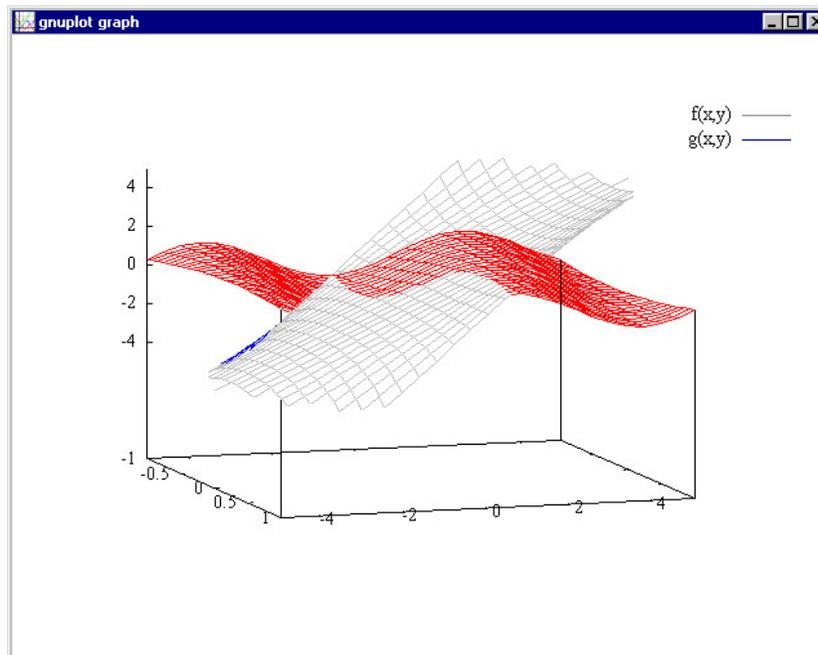
$$\vec{t} = \left\{ \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \right\}$$

ovviamente non contraddice le formule trovate nel precedente teorema... ma anzi fornisce una formula di uso automatico particolarmente semplice.

ESEMPIO 1.5. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \sin(x + y) - z = 0 \\ g(x, y, z) = x - z \cos(y) = 0 \end{cases}$$

I grafici delle due superfici  $f(x, y, z) = 0$  e  $g(x, y, z) = 0$  sono disegnati in Figura 1.

FIGURA 1.  $f(x, y, z) = 0$  e  $g(x, y, z) = 0$ 

La matrice (70) é la seguente

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) & -1 \\ 1 & z \sin(y) & -\cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'origine  $(0, 0, 0)$  soddisfa il sistema e il vettore  $\vec{t}$  tangente nell'origine alla curva intersezione delle due superfici é

$$\vec{t} = \{-1, 0, -1\}$$



## Funzioni implicite e punti uniti

### 1. Equazioni, punti uniti, contrazioni

Risolvere l'equazione

$$f(x, y) = 0$$

nell'incognita  $y$  equivale a risolvere l'equazione

$$y = y - f(x, y)$$

o anche, scelto un coefficiente  $\lambda \neq 0$  a risolvere l'equazione

$$(71) \quad y = y - \lambda f(x, y)$$

Indicato con  $C^0(I)$  lo spazio vettoriale, vedi pagina 389, delle funzioni continue definite in  $I$  consideriamo la trasformazione  $T$  che ad ogni  $v \in C^0(I)$  fa corrispondere la funzione  $w(x)$

$$w(x) = v(x) - \lambda f(x, v(x))$$

Risolvere la (71) corrisponde a trovare  $y \in C^0(I)$  unita per la  $T$  :  $y(x) = Ty(x)$

$$y(x) = y(x) - \lambda f(x, y(x))$$

L'esempio 4.8 di pagina 396, con il suo grafico di Figura 4 si riferisce al caso

$$f(x, y) = y - \frac{1}{2} \sin(x + y)$$

Il grafico é quello della funzione implicita definita da  $f(x, y) = 0$ .

Indicata con

$$\Phi(x, y) = y - \lambda f(x, y)$$

si riconosce che

$$\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2) = (1 - \lambda f_y(x, \eta)) (y_1 - y_2)$$

Supponiamo che in corrispondenza del punto  $(x_0, y_0)$  riesca,

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

e supponiamo di lavorare con punti  $(x, y_1)$ ,  $(x, y_2)$  vicini a  $(x_0, y_0)$  : scelto

$$\lambda = \frac{1}{f_y(x_0, y_0)}$$

si ha

$$\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2) = \left(1 - \frac{f_y(x, \eta)}{f_y(x_0, y_0)}\right) (y_1 - y_2)$$

Il coefficiente

$$L = \left|1 - \frac{f_y(x, \eta)}{f_y(x_0, y_0)}\right|$$

che assume se  $x = x_0, y_1 = y_2 = y_0$  il valore 0, si manterrà in modulo minore di 1 nei punti vicini.

La trasformazione  $T : y \rightarrow \Phi(x, y)$  ha quindi le proprietà di una contrazione.

Fissato  $x$  e scelto un  $y = y_0$  consideriamo la successione, dipendente da  $x$

$$(72) \quad \begin{aligned} y_1 &= y_0 - \frac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x, y_0), \\ &\dots \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x, y_n) \end{aligned}$$

Se la successione  $\{y_n\}$  converge allora il suo limite  $y(x)$  soddisfa l'equazione

$$y(x) = y(x) - \frac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x, y(x)) \Leftrightarrow f(x, y(x)) = 0$$

Il metodo usato nella costruzione della successione precedente (72) si dice *metodo di Newton*.

**ESEMPIO 1.1.** *Un esperimento con Mathematica : consideriamo l'equazione*

$$y^2 + 3xy + x^2 = 1$$

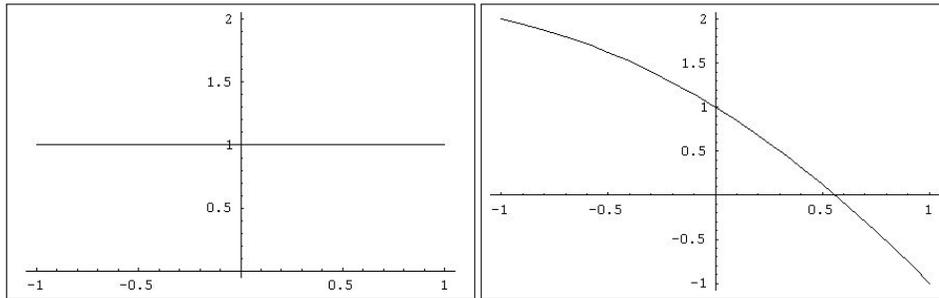
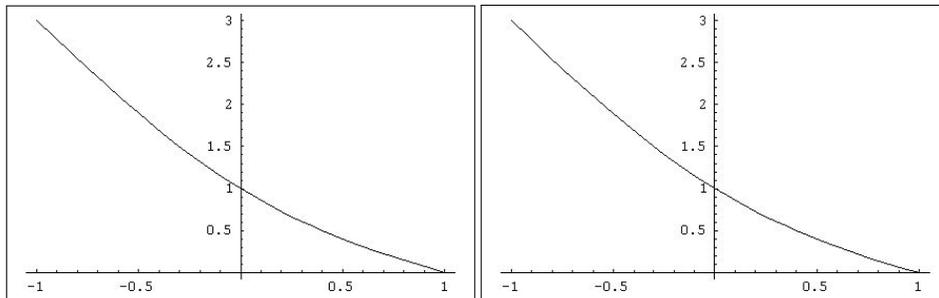
*in un intorno del punto  $(0, 1)$  sua soluzione.*

*La funzione implicita corrispondente al passaggio per tale punto é naturalmente ricavabile direttamente tenuto conto che si tratta di un'equazione di secondo grado,*

$$y(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{5x^2 + 4} - 3x \right)$$

*Riesce*

$$f_y(x, y) = 2y + 3x, \quad f_y(0, 1) = 2 \neq 0$$

FIGURA 1.  $y_0 = 1$ ,  $y_1(x) = 1 - \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2}$ FIGURA 2.  $y_2(x) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{x^4}{8}$ ,  $y_3(x) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{25x^4}{128} + \frac{5x^6}{64} - \frac{x^8}{128}$ 

La successione (72) proposta precedentemente é la seguente

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 - \frac{1}{2}f(x, y_0) = 1 - \frac{1}{2}(1 + 3x + x^2 - 1) \\ y_2 &= y_1 - \frac{1}{2}f(x, y_1) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{x^4}{8} \\ y_3 &= y_2 - \frac{1}{2}f(x, y_2) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{25x^4}{128} + \frac{5x^6}{64} - \frac{x^8}{128} \end{aligned}$$

Lo sviluppo in formula di Taylor della soluzione esatta precedentemente osservata é

$$1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{25x^4}{128} + \frac{125x^6}{1024} - \frac{3125x^8}{32768} + \frac{21875x^{10}}{262144}$$

la prima differenza con la  $y_3(x)$  precedente si incontra, come si vede, sulla potenza  $x^6$ .

## 2. Il caso di un sistema

Il precedente approccio, teorema del punto unito per una trasformazione che sia una contrazione,

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = y - \frac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x, y)$$

si adatta anche alla risoluzione di un sistema in  $x, y, z$  ad esempio rispetto a  $y$  e  $z$  in funzione di  $x$ .

Sia  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto che soddisfi il sistema

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases},$$

risolvere rispetto ad  $y$  e  $z$  il sistema significa determinare due funzioni  $y(x)$  e  $z(x)$  che lo soddisfino per  $x$  in un intorno di  $x_0$ .

Il sistema si può considerare nelle due seguenti espressioni equivalenti

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y - \{a_{11}f(x, y, z) + a_{12}g(x, y, z)\} \\ z = z - \{a_{21}f(x, y, z) + a_{22}g(x, y, z)\} \end{cases}$$

essendo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

invertibile, cioè a determinante diverso da zero.

Indicata con  $T$  la trasformazione

$$T : \{y(x), z(x)\} \rightarrow \begin{cases} y(x) - \{a_{11}f(x, y(x), z(x)) + a_{12}g(x, y(x), z(x))\} \\ z(x) - \{a_{21}f(x, y(x), z(x)) + a_{22}g(x, y(x), z(x))\} \end{cases}$$

vogliamo che  $T$  si comporti da contrazione.

È evidente che una condizione favorevole al riguardo sarà scegliere (se possibile) la matrice  $A$  in modo che nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  riesca

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \{y(x) - \{a_{11}f(x, y(x), z(x)) + a_{12}g(x, y(x), z(x))\}\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \{y(x) - \{a_{11}f(x, y(x), z(x)) + a_{12}g(x, y(x), z(x))\}\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \{z(x) - \{a_{21}f(x, y(x), z(x)) + a_{22}g(x, y(x), z(x))\}\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \{z(x) - \{a_{21}f(x, y(x), z(x)) + a_{22}g(x, y(x), z(x))\}\} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} a_{11}f_y + a_{12}g_y = 1 \\ a_{11}f_z + a_{12}g_z = 0 \\ a_{21}f_y + a_{22}g_y = 0 \\ a_{21}f_z + a_{22}g_z = 1 \end{cases}$$

Cosa che si realizza se

$$A = \begin{pmatrix} f_y(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}^{-1}$$

l'inversa della matrice jacobiana.

**ESEMPIO 2.1.** *Illustriamo il procedimento appena accennato su un esempio concreto.*

*Il sistema da risolvere sia il seguente*

$$(73) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

*intersezione della sfera di centro l'origine e raggio 2 con un piano per l'origine.*

*Il punto  $(0, 1, -1)$  soddisfa il sistema.*

*Le soluzioni del sistema (73) sono, ovviamente,*

$$y(x) = \frac{1}{2} \left( -x + \sqrt{4 - 3x^2} \right), \quad z(x) = \frac{1}{2} \left( -x - \sqrt{4 - 3x^2} \right)$$

*Nel punto  $(0, 1, -1)$  la matrice jacobiana  $J$  è la seguente*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*La sua inversa è*

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*La trasformazione di cui cercare il punto unito è pertanto*

$$\{y(x), z(x)\} \rightarrow \begin{cases} y(x) - \frac{1}{4} \{x^2 + y^2(x) + z^2(x) - 2\} - \frac{1}{2} \{x + y(x) + z(x)\} \\ z(x) + \frac{1}{4} \{x^2 + y^2(x) + z^2(x) - 2\} - \frac{1}{2} \{x + y(x) + z(x)\} \end{cases}$$

*Cominciamo il procedimento delle approssimazioni successive partendo da  $y_0(x) = 1$ ,  $z_0(x) = -1$ : si ottiene, servendosi di Mathematica,*

$$y_1(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}, \quad z_1(x) = -1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

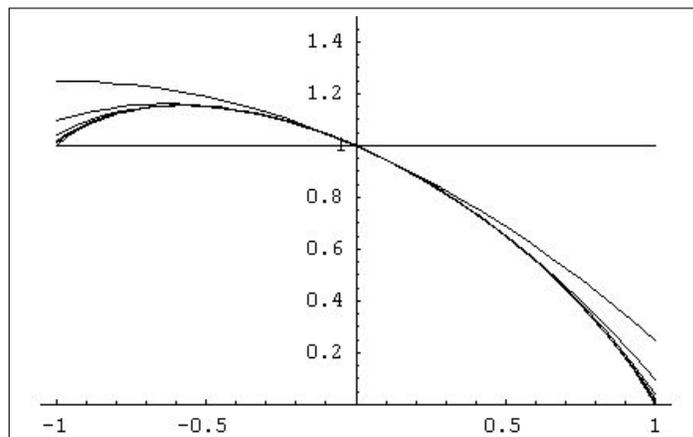
$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{32}, \quad z_2(x) = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{x^4}{32}$$

*ecc. ecc.*

*Nella Figura 3 si riconosce lo stabilizzarsi delle  $\{y_n(x)\}$  sulla funzione implicita*

$$y(x) = \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

*soluzione esatta.*

FIGURA 3. La successione  $\{y_n(x)\}$

## Un'applicazione: le trasformazioni del piano

Un'applicazione importante della teoria delle funzioni implicite é l'inversione di una trasformazione

$$(74) \quad (x, y) \in R^2 \quad \rightarrow \quad (\xi, \eta) \in R^2$$

$$(75) \quad \begin{cases} \xi = \phi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

### 1. Esempi fondamentali

- il caso lineare  $\phi(x, y) = ax + by$ ,  $\psi(x, y) = cx + dy$
- il caso dell'inversione rispetto alla circonferenza

$$\phi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- il caso iperboli-parabole  $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $\psi(x, y) = 2xy$

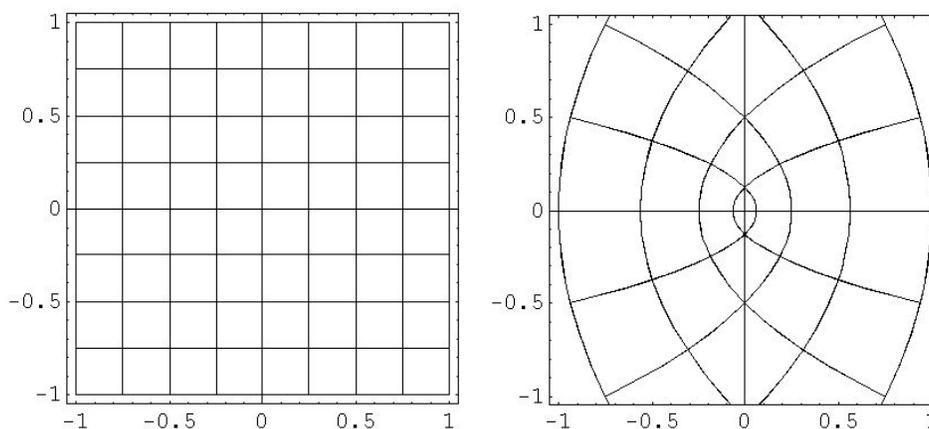


FIGURA 1. Il caso iperboli-parabole

Le rette verticali  $x = h$  del piano  $(x, y)$  sono trasformate, nel

piano  $(u, v)$  in parabole

$$x = h \quad \Leftrightarrow \quad u = h^2 - \frac{v^2}{4h^2}$$

le orizzontali  $y = k$  invece

$$y = k \quad \Leftrightarrow \quad u = k^2 + \frac{v^2}{4k^2}$$

Viceversa, come si legge dalla trasformazione, le rette verticali e orizzontali del piano  $(u, v)$  provengono dalle iperboli  $x^2 - y^2 = h$  o  $2xy = k$  del piano  $(x, y)$ .

Il nome di iperbole-parabole dato allude appunto al fatto che le rette orizzontali e verticali vengono trasformate in parabole dalla trasformazione diretta, in iperboli da quella inversa.

*OSSERVAZIONE 1.1. La trasformazione iperboli-parabole, vedi Figura 1, produce deformazioni profonde: una cosa non deforma, gli angoli retti. Rette orizzontali e rette verticali che si incrociavano ad angolo retto si trasformano in parabole ed iperboli che continuano ad incrociarsi ad angolo retto...*

## 2. Il teorema di Dini e le trasformazioni

Proviamo a leggere il sistema

$$\begin{cases} \xi = \phi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

che definisce la trasformazione  $T$  della (74) nella forma tradizionale dei problemi di funzioni implicite

$$(76) \quad \begin{cases} f(\xi, \eta, x, y) = 0 \\ g(\xi, \eta, x, y) = 0 \end{cases}$$

- Dire che il punto  $(x_0, y_0)$  viene trasformato in  $(\xi_0, \eta_0)$  equivale a dire che il punto  $(\xi_0, \eta_0, x_0, y_0)$  soddisfa il sistema (76),
- Dire che nel punto  $(x_0, y_0)$  riesce

$$\det \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \neq 0$$

equivale a dire che nel punto  $(\xi_0, \eta_0, x_0, y_0)$  riesce

$$\det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \neq 0$$

- Applicare quindi il teorema di Dini, caso dei sistemi, significa poter esplicitare nel sistema (76)  $x$  e  $y$  come funzioni di  $\xi$  e  $\eta$  in un intorno di  $(\xi_0, \eta_0)$ .

Quanto detto sopra significa che

- se  $(\xi_0, \eta_0) = T(x_0, y_0)$
- e se

$$\det \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \neq 0$$

allora tutti i punti di un *conveniente intorno* di  $(\xi_0, \eta_0)$  appartengono all'immagine di  $T$ , sono cioè i trasformati di punti  $(x, y)$  prossimi a  $(x_0, y_0)$ .

TEOREMA 2.1. *Se*

$$\det \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \neq 0$$

*allora l'immagine tramite  $T$  di un aperto  $\Omega$  del piano  $(x, y)$  è un aperto  $\Phi$  del piano  $(\xi, \eta)$ .*

Dimostrazione implicita in quanto osservato sopra.

ESEMPIO 2.2 (Un contreesempio). *Consideriamo la trasformazione*

$$T: \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = y \end{cases}$$

*Riesce  $T(0, 0) = (0, 0)$  ma non è vero che tutti i punti di un cerchietto di centro l'origine del piano  $(u, v)$  siano immagini tramite  $T$  di punti di  $(x, y)$ : la  $T$  produce infatti solo punti  $(u, v)$  con  $u \geq 0$ .*

*Quindi i punti del piano  $(u, v)$   $(-1/n, 0)$  certamente molto vicini all'origine non appartengono all'immagine di  $T$ .*

*Cosa è mancato? Provate a calcolare lo jacobiano per  $x = 0, y = 0$  riesce*

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x$$

*valore 0 appunto se  $x = 0$ .*

*Non c'è da stupirsi se l'immagine di  $T$  non sia venuta un aperto...!*

**2.1. Le formule di derivazione.** Supponiamo che la trasformazione (75) verifichi le condizioni (sufficienti) del teorema di Dini in corrispondenza al punto

$$(\xi_0, \eta_0, x_0, y_0)$$

allora esistono, localmente le inverse,  $g$  ed  $h$  continue e derivabili,

$$(77) \quad \begin{cases} x = g(\xi, \eta) \\ y = h(\xi, \eta) \end{cases}$$

e, principalmente, le derivate parziali di  $g$  e di  $h$  si ottengono, (cfr (75)), dal sistema ottenuto con la regola di derivazione delle funzioni composte

$$(78) \quad \begin{cases} 1 = \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi \\ 0 = \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta \\ 0 = \psi_x g_\xi + \psi_y h_\xi \\ 1 = \psi_x g_\eta + \psi_y h_\eta \end{cases}$$

Vedi Courant-John, II, pag. 261 f)

### 3. Le coordinate curvilinee

Il precedente sistema (75)

$$\begin{cases} \xi = \phi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

puó essere interpretato in due modi

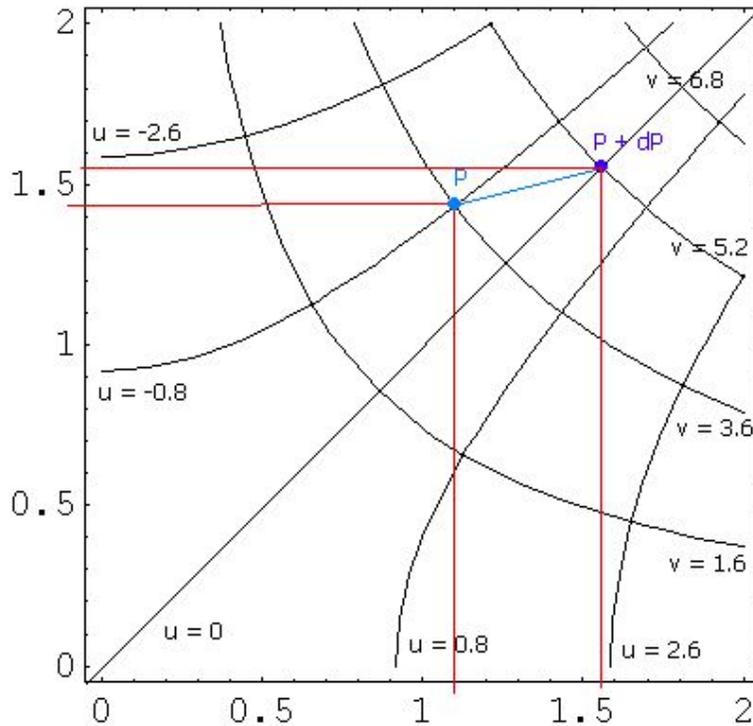
- Il primo come una trasformazione

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = \{\phi(x, y), \psi(x, y)\}$$

- Il secondo, aggiungendo l'ipotesi che il sistema (75) sia univocamente invertibile come un *cambio di coordinate curvilinee* nel piano: a ciascun punto  $P(x, y)$  del piano possiamo associare la coppia di numeri  $(\xi, \eta) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$  che rappresenta le (nuove) coordinate (curvilinee) di  $P$ .

ESEMPIO 3.1. Consideriamo, come caso particolare del sistema (75) il caso

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

FIGURA 2.  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ 

Uno stesso punto (fisico) del piano viene individuato da coppie diverse di numeri: ad esempio il punto  $P$  in Figura (2) è individuato da  $(1.1, 1.4)$  nelle coordinate cartesiane e da  $(-0.8, 3.6)$  in quelle curvilinee.

Lo spostamento  $dP$  conduce al punto  $P + dP$  di coordinate cartesiane  $(1.55, 1.55)$  e curvilinee  $(0, 5.2)$ : in altri termini lo spostamento  $dP$  si esprime in coordinate cartesiane con

$$dx = 0.45, \quad dy = 0.15$$

e in coordinate curvilinee con

$$du = 0.8, \quad dv = 1.6$$

Controlliamo le stime ricavate dalle espressioni

$$du \simeq u_x dx + u_y dy = 2x dx - 2y dy = 2 \times 1.55 \times 0.30 = 0.93$$

$$dv \simeq v_x dx + v_y dy = 2y dx + 2x dy = 2 \times 1.55 \times 0.60 = 1.86$$

*Come si vede tra il vero valore  $du = 0.8$  e la stima di  $0.93$  non c'è grande differenza, come pure tra il vero valore  $dv = 1.6$  e la stima  $1.86$  trovata.*

#### 4. Un contreesempio fondamentale

Nei paragrafi precedenti abbiamo riconosciuto l'invertibilità (locale) di ogni trasformazione

$$T : \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

che abbia Jacobiano diverso da zero.

Invertibilità locale o... globale ?

Solo locale: per convincersene, senza illudersi di provare un miracoloso teorema generale basta esibire il seguente contreesempio

$$T : \begin{cases} \xi = e^x \cos(y) \\ \eta = e^x \sin(y) \end{cases}$$

La trasformazione, per chi conosce l'esponenziale nel campo complesso, è semplicemente

$$\zeta = e^z$$

Si tratta di una trasformazione che stante la periodicità nelle  $y$  non è iniettiva, quindi non può essere invertibile.

Calcoliamo lo jacobiano

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} = e^x \neq 0$$

Lo jacobiano è sempre diverso da zero eppure la trasformazione non è globalmente iniettiva e quindi non è globalmente invertibile.

## Massimi e minimi vincolati

### 1. Introduzione

Il titolo si riferisce ad un problema di massimo o di minimo per una funzione reale  $u = f(x, y)$  su un insieme definito da una (o piú) equazioni  $\phi(x, y) = 0$ .

Si ricordi che le tecniche di ricerca dei punti stazionari

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0$$

e la loro classificazione tramite il determinante hessiano sono indirizzate alla ricerca dei punti di massimo o di minimo in un aperto, si parla nel loro caso di massimi o minimi relativi o locali: gli insiemi definiti da condizioni  $\phi(x, y) = 0$  non sono (quasi mai) aperti, si tratta il piú delle volte di linee del piano o anche di punti isolati.

**1.1. Un esperimento.** Cerchiamo il massimo della funzione  $u = x$  sull'ellisse

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$$

Qual'è l'ascissa maggiore dei punti dell'ellisse assegnata ?

Ovvio: l'ascissa 2 corrispondente al punto  $(2, 0)$ , estremo destro dell'asse orizzontale.

Il massimo della funzione  $u = y$  vale 3, ordinata del punto superiore sull'asse delle ordinate dell'ellisse.

Meno ovvio é il massimo, sempre sui punti della stessa ellisse, della funzione  $u = x + y$ .

**1.2. Le linee di livello.** Disegniamo le linee di livello della funzione  $u = x + y$ , tutte rette parallele del piano  $(x, y)$  : alcune intersecano l'ellisse altre no.

Se mettiamo su ognuna di tali rette il valore di  $u$  che gli corrisponde possiamo intuire quale sia il massimo sull'ellisse, vedi Figura 1.

Occorre individuare quale tra tali rette che intersecano l'ellisse corrisponda al valore piú alto...

*...sará per forza tangente all'ellisse !*

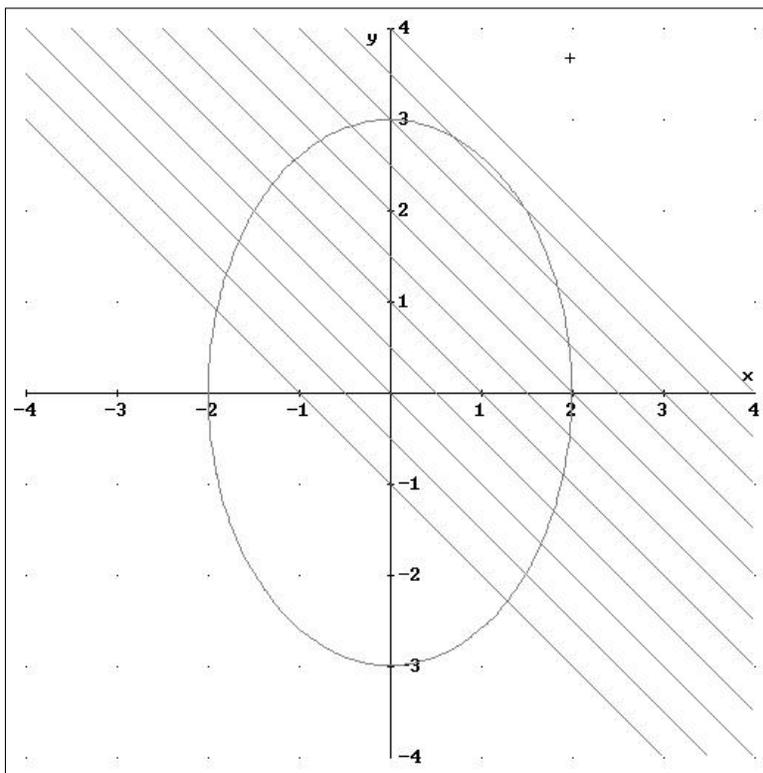


FIGURA 1. Il massimo di  $u = x + y$  sull'ellisse  $9x^2 + 4y^2 = 36$

**1.3. La ricerca dei punti di tangenza.** Per determinare i punti in cui le linee di livello della funzione  $u = f(x, y)$  siano tangenti alla linea  $\phi(x, y) = 0$  basta vedere in che punti abbiano lo stesso vettore perpendicolare.

Tenuto presente che i vettori perpendicolari alle linee

$$f(x, y) = c, \quad \phi(x, y) = 0$$

sono, rispettivamente

$$\nabla f = (f_x, f_y), \quad \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y)$$

ne deriva che dobbiamo individuare i punti di  $\phi(x, y) = 0$  in cui tali due vettori sono paralleli

$$f_x : \phi_x = f_y : \phi_y$$

La ricerca equivale a risolvere il sistema in  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$ :

$$\begin{cases} f_x + \lambda \phi_x = 0 \\ f_y + \lambda \phi_y = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$(79) \quad \begin{cases} \det \begin{vmatrix} f_x & \phi_x \\ f_y & \phi_y \end{vmatrix} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

**1.4. I casi di minore regolarità.** Quanto detto precedentemente perde di valore se ad esempio una delle due curve (quelle delle linee di livello o quella determinata dal vincolo) presenta punti angolosi. Pensate di cercare il massimo della funzione  $u = x + y$  sul quadrato (i 4 lati, non l'interno)  $(0, 0) - (1, 1)$ .

## 2. La dimostrazione

Il fenomeno necessario, il parallelismo dei due gradienti  $\nabla f$ ,  $\nabla \phi$ , intuito nella (79) si riconosce tramite il ricorso alle funzioni implicite.

Sia  $\phi(x, y) = 0$  il vincolo e sia  $y = g(x)$  la funzione implicita da esso determinata in un intorno del punto di massimo.

Studiare  $u = f(x, y)$  sul vincolo, in un intorno di tale punto di massimo, equivale a studiare la funzione composta

$$u = f[x, g(x)]$$

Nei punti di estremo riesce

$$(f[x, g(x)])' = 0, \quad \Rightarrow f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot g'(x) = 0$$

Tenuto conto del resto che per la funzione implicita  $g(x)$  riesce altresì

$$\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y)g'(x) = 0$$

si riconosce che

$$\det \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \phi_x & \phi_y \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} f_x & \phi_x \\ f_y & \phi_y \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto il sistema lineare omogeneo di matrice

$$\begin{vmatrix} f_x & \phi_x \\ f_y & \phi_y \end{vmatrix}$$

ha soluzioni non nulle, ovvero, esiste  $\lambda$  tale che sia soddisfatto il sistema

$$(80) \quad \begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \cdot \phi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \cdot \phi_y(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

**2.1. Esistono il minimo e il massimo ?** La risposta é SÍ se

- la funzione  $u = f(x, y)$  é continua,
- e l'insieme determinato dal vincolo é chiuso e limitato.

Gli insiemi assegnati da equazioni  $\phi(x, y) = 0$  con  $\phi$  continua sono sempre chiusi, ma possono essere non limitati.

Il massimo e il minimo di  $u = xy$  sull'ellisse  $3x^2 + 5y^2 = 20$  esistono certamente perché l'ellisse é un insieme chiuso e limitato.

Se avessimo proposto come vincolo  $3x^2 - 5y^2 = 20$ , un'iperbole, chiusa ma non limitata il massimo e il minimo si sarebbero persi...!

**ESEMPIO 2.1.** *Determinare il massimo e il minimo della funzione  $u = xy$  sui punti  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ .*

*L'insieme assegnato, la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 é un insieme chiuso e limitato, quindi la richiesta di massimo e minimo per la funzione continua  $u = xy$  é ben posta. Il sistema da risolvere é*

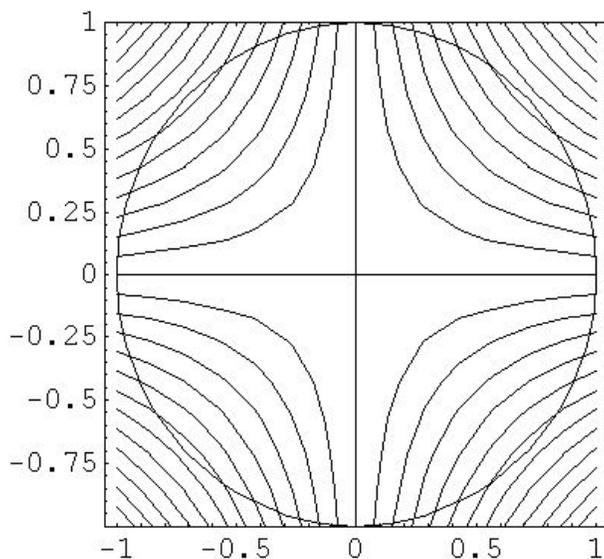


FIGURA 2.  $xy, \quad x^2 + y^2 = 1$

*il seguente*

$$\begin{cases} y + 2\lambda.x & = 0 \\ x + 2\lambda.y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$$

*Sistema soddisfatto dai 4 punti  $x = \pm 1/\sqrt{2}, \quad y = \pm 1/\sqrt{2}$ . Dalla Figura (3) si riconosce come il massimo sia raggiunto nei due punti  $x = 1/\sqrt{2}, y = 1/\sqrt{2}$  e  $x = -1/\sqrt{2}, y = -1/\sqrt{2}$  e il minimo negli altri due.*

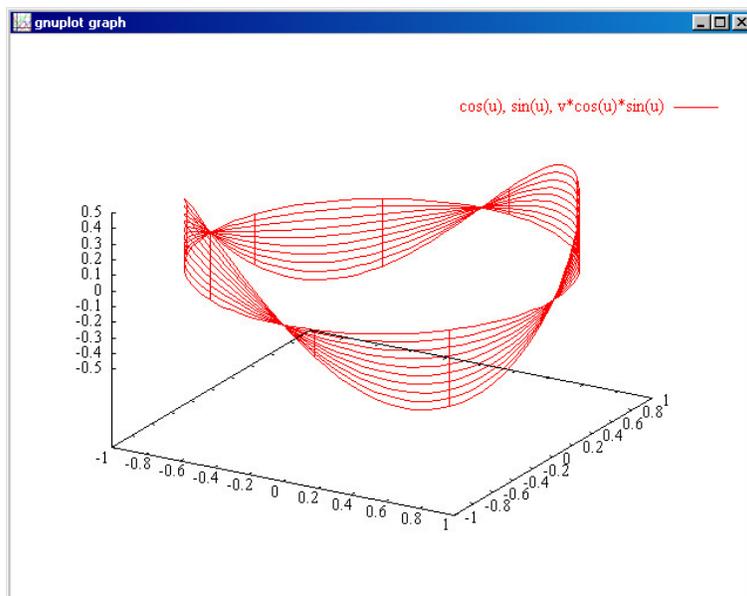


FIGURA 3. Il grafico della  $u = xy$  sui punti del vincolo, la circonferenza

ESEMPIO 2.2 (Esercizio 4 di pag. 334). *Determinare il minimo della somma dei quadrati delle distanze del punto  $X$  da  $n$  punti assegnati, vincolando  $X$  su una retta assegnata.*

*Indichiamo con  $X = (x, y)$ , con  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  i punti assegnati e con  $ax + by + c = 0$  la retta vincolo.*

*La funzione da rendere minima é*

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$$

*ovvero svolti i calcoli*

$$u(x, y) = n(x^2 + y^2) - 2xM - 2yN + S$$

*avendo indicato con*

$$M = \sum_{i=1}^n x_i, \quad N = \sum_{i=1}^n y_i, \quad S = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2).$$

*Il sistema da risolvere é pertanto*

$$\begin{cases} 2nx - 2M + a\lambda = 0 \\ 2ny - 2N + b\lambda = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$x = \frac{1}{n} \left( M - \frac{1}{2} a \lambda \right), y = \frac{1}{n} \left( N - \frac{1}{2} b \lambda \right)$$

e quindi, sostituendo nella terza equazione

$$\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2} (aM + bN + nc)$$

Sostituendo il valore di  $\lambda$  trovato nelle precedenti si ottiene il punto cercato.

Calcolando in esso la  $u(x, y)$  si conoscerà il minimo richiesto.

Qualche riflessione

Aveva senso cercare il minimo richiesto? Attenzione la regione definita dal vincolo non è chiusa e limitata, quindi il teorema di Weierstrass non può essere invocato...

A priori il minimo richiesto potrebbe anche mancare: ma potrebbe anche esserci...!

La funzione  $u(x, y)$  è non negativa: quindi la domanda

Determinate l'estremo inferiore di  $u(x, y)$  per  $(x, y)$   
sulla retta assegnata

è perfettamente legittima, non c'è infatti alcun rischio di finire a  $-\infty$ . Sia  $\ell \geq 0$  tale estremo inferiore. Sia inoltre  $\{(x_n, y_n)\}$  una successione di punti della retta assegnata sui quali riesca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n, y_n) = \ell$$

Tenuto conto che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} u(x, y) = +\infty$$

si riconosce che i punti della successione  $\{(x_n, y_n)\}$  stanno necessariamente su un segmento limitato.

Allora  $\{(x_n, y_n)\}$  contiene una sottosuccessione  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$  convergente al punto  $(x_0, y_0)$  della retta.

Poiché  $u(x, y)$  è continua riesce

$$\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x_{n_k}, y_{n_k}) = u(x_0, y_0)$$

Pertanto  $\ell = u(x_0, y_0)$  è quindi minimo e non solo estremo inferiore.

Cercate la soluzione di questo esercizio tra le soluzioni riportate in fondo al Courant<sup>1</sup> II B, pag.876: troverete un approccio elegante che

<sup>1</sup>Potete leggerlo nella nuova bellissima Biblioteca del Dipartimento

permette di riconoscere una interessante proprietà fisica del punto di minimo studiato.

ESEMPIO 2.3. Consideriamo la funzione  $u(x, y) = x^2$  e cerchiamo il massimo e il minimo sul vincolo  $\sum : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Le linee di livello  $u(x, y) = c$  sono le rette verticali  $x = \sqrt{c}$ : il valore minimo su  $\sum$  è ovviamente  $u = 0$  mentre il massimo è  $u = 1$ .

Il minimo viene raggiunto nei due punti  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ , il massimo in  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ : nei due punti di massimo si riconosce il fenomeno geometrico

*linea di livello  $u(x, y) = 1$  tangente al vincolo,*

*mentre tale fenomeno non si riconosce nei due punti di minimo nei quali, anzi la linea di livello  $u(x, y) = 0$  taglia decisamente il vincolo.*

*Che fine ha fatto il parallelismo*

$$\{u_x, u_y\} // \{g_x, g_y\} ?$$

*Semplicemente nei due punti di minimo riesce  $\{u_x, u_y\} = \{0, 0\}$  : quindi tali punti di minimo pur sfuggendo all'immagine geometrica*

*vincolo e linea di livello tangenti,*

*non sfugge alla condizione analitica*

$$\det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 0$$

Una buona spiegazione

(anche geometrica) del fenomeno osservato nel precedente esempio si trova sul libro di Courant , II A, pag. 336

*In order for the function  $f(x, y)$ ...*

*Affinché la funzione  $f(x, y)$  abbia un valore estremo nel punto  $(\xi, \eta)$  soggetto al vincolo  $\phi(\xi, \eta) = 0$  il differenziale  $df$  deve annullarsi nel punto se si considerano  $dx$  e  $dy$  non indipendenti (cioé qualsiasi) ma legati tra loro dalla relazione*

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy = 0$$

*dedotta dall'equazione  $\phi = 0$*

*ecc. ecc.*



## L'interpretazione di Lagrange

### 1. Introduzione

I punti di massimo e/o di minimo di  $u = f(x, y)$  sull'insieme determinato dal vincolo regolare  $g(x, y) = 0$ , tale che in ogni punto una almeno delle due derivate parziali  $g_x$  o  $g_y$  sia diversa da zero, verificano la condizione

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 0, \quad g(x, y) = 0$$

che esprime il parallelismo tra  $\nabla f$ , e  $\nabla g$  in un punto del vincolo.

Posto

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

detta FUNZIONE LAGRANGIANA, le due condizioni sono equivalenti alle

$$(81) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} L(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

È evidente che la condizione  $g(x, y) = 0$  è la terza equazione del sistema (81), mentre le prime due corrispondono a dire che il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} \alpha f_x + \beta g_x &= 0 \\ \alpha f_y + \beta g_y &= 0 \end{aligned}$$

ammette la soluzione  $(1, \lambda)$ , fenomeno che implica che  $J(x, y) = 0$ . Viceversa se  $J(x, y) = 0$  allora il sistema, tenuto conto che la colonna delle derivate  $g_x$  e  $g_y$  non è nulla, ammette certamente una soluzione del tipo  $(1, \lambda)$

#### 1.1. Esempio.

Trovare il massimo della funzione  $u = xy$  nell'insieme

$$3x^2 + 5y^2 - 20 = 0$$

Lagrangiana:

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x^2 + 5y^2 - 20)$$

Sistema delle tre derivate parziali:

$$\begin{cases} y + 6\lambda x & = 0 \\ x + 10\lambda y & = 0 \\ 3x^2 + 5y^2 - 20 & = 0 \end{cases}$$

dividendo membro a membro si ottiene

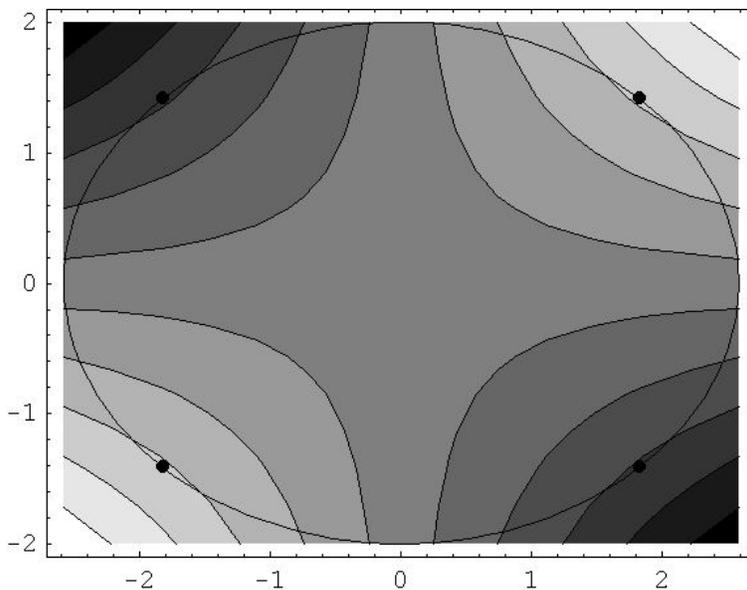


FIGURA 1. Linee livello  $u = xy$ , vincolo  $3x^2 + 5y^2 = 20$

$$\frac{y}{x} = \frac{3x}{5y}, \quad \rightarrow 5y^2 = 3x^2$$

sostituendo nella terza si ottiene

$$3x^2 + 3x^2 = 20, \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$$

I punti estremi di  $u = xy$  sul vincolo ellisse assegnata cadono nei 4 punti

$$\left(\sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{2}\right)$$

I valori di  $u$  nei quattro punti sono

$$\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$$

uno ovviamente il massimo, l'altro il minimo.

## 2. La condizione sufficiente

I conti precedenti per la ricerca del massimo di  $u = F(x, y)$  sul vincolo determinato da  $G(x, y) = 0$  sono condotti sul seguente filo logico:

- La regolarità del vincolo  $G(x, y) = 0$  ci autorizza a ritenere che esso sia, localmente, sostituibile da  $y = g(x)$  ovvero  $x = h(y)$
- Studiare la  $F(x, y)$  su tale vincolo equivale, nel primo caso  $y = g(x)$ , a studiare la funzione composta

$$f(x) = F(x, g(x))$$

- i massimi si cercano tra i punti critici:  $f'(x) = 0$
- tale derivata, a conti fatti, vale

$$f'(x) = \frac{1}{G_y} (F_x G_y - F_y \cdot G_x)$$

- da cui l'equazione da risolvere

$$F_x G_y - F_y \cdot G_x = 0$$

Si sa che nei punti critici possono cadere: massimi, minimi o flessi. Una condizione che esclude i flessi é fornita dalla derivata seconda diversa da zero.

Si può (con una certa fatica) calcolare la derivata seconda della funzione composta  $f(x) = F(x, g(x))$  :

$$f''(x) = (F_x + F_y \cdot g')' = F_{xx} + 2F_{xy}g' + F_{yy}(g')^2 + F_y g''$$

a  $g'$  e a  $g''$  debbono ora essere sostituite le espressioni

$$G_x + G_y g' \equiv 0$$

$$G_{xx} + 2G_{xy}g' + G_{yy}(g')^2 + G_y g'' \equiv 0$$

Ne segue

$$f''(x) = F_{xx} - 2F_{xy} \frac{G_x}{G_y} + F_{yy} \left( \frac{G_x}{G_y} \right)^2 - F_y \frac{G_{xx} - 2G_{xy} \frac{G_x}{G_y} + G_{yy} \left( \frac{G_x}{G_y} \right)^2}{G_y}$$

Ridotto tutto allo stesso denominatore si ottiene, a numeratore,

$$G_y F_{yy} G_x^2 - F_y G_{yy} G_x^2 - 2 G_y^2 G_x F_{xy} + \\ + 2 F_y G_y G_x G_{xy} + G_y^3 F_{xx} - F_y G_y^2 G_{xx}$$

Quindi le condizioni sufficienti perché un punto  $(x, y)$  sia di massimo e/o minimo relativamente a un vincolo regolare, sono le seguenti:

•

$$F_x \cdot G_y - F_y \cdot G_x = 0$$

•

$$G(x, y) = 0$$

•

$$G_y F_{yy} G_x^2 - F_y G_{yy} G_x^2 - 2 G_y^2 G_x F_{xy} + \\ + 2 F_y G_y G_x G_{xy} + G_y^3 F_{xx} - F_y G_y^2 G_{xx} \neq 0$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Come si vede la terza condizione é tremenda e quindi probabilmente non vantaggiosa nel calcolo.*

*Tenuto presente del resto che se*

- $F(x, y)$  é regolare, di classe  $C^1$
- il vincolo  $G(x, y) = 0$ , di classe  $C^1$  ha una almeno delle due derivate diversa da 0 in ogni punto,
- L'insieme determinato dal vincolo é chiuso<sup>1</sup> e limitato,

*allora esistono un punto di massimo e uno di minimo e cadono fra i punti critici, conviene calcolare il valore di  $F(x, y)$  su ciascuno dei punti critici trovati e selezionare il valore piú alto e il piú basso trovati.*

OSSERVAZIONE 2.2. *La complessa espressione della derivata seconda  $f''(x)$  é stata calcolata con Mathematica.*

### 3. Un caso intermedio

Il problema precedente puó essere generalizzato nel caso tridimensionale seguente:

- Massimi e minimi di  $u = F(x, y, z)$
- Vincolo:  $G(x, y, z) = 0$

---

<sup>1</sup>se  $G$  é una funzione continua, come stiamo ammettendo, l'insieme  $G = 0$  é necessariamente chiuso, ma potrebbe essere non limitato....

Nell'ipotesi solita che le derivate parziali  $G_x, G_y, G_z$  non siano mai tutte e tre contemporaneamente nulle.

Supponendo  $G_z \neq 0$  i punti del vincolo sono, localmente, descritti dalla funzione

$$z = g(x, y)$$

Introdotta la funzione composta

$$f(x, y) = F[x, y, g(x, y)]$$

i suoi punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F_x + F_z g_x = 0 \\ F_y + F_z g_y = 0 \end{cases}$$

Tenuto presente che  $g_x$  e  $g_y$  soddisfano il sistema

$$\begin{cases} G_x + G_z g_x = 0 \\ G_y + G_z g_y = 0 \end{cases}$$

si riconosce che la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

ha rango 1.

I punti di massimo e di minimo si trovano quindi

- cercando i punti in cui la matrice Jacobiana ha rango 1
- scegliendo quelli tra tali punti che soddisfano le equazioni del vincolo.

### 3.1. L'interpretazione di Lagrange.

**TEOREMA 3.1.** *I punti di massimo e di minimo di  $u = F(x, y, z)$  sull'insieme determinato dal vincolo regolare  $G(x, y, z) = 0$  si trovano tra i punti che soddisfano il sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (F + \lambda G) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (F + \lambda G) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (F + \lambda G) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (F + \lambda G) = 0 \end{cases}$$

La giustificazione e l'interpretazione geometrica (superfici di livello in luogo di linee di livello) sono analoghe al caso bidimensionale: le prime tre equazioni corrispondono al parallelismo

$$\nabla F // \nabla G$$

la quarta all'equazione  $G(x, y, z) = 0$ .

**OSSERVAZIONE 3.2. Vincoli lisci, reazioni vincolari.**

*Vettori del tipo*

$$\{\lambda G_x, \lambda G_y, \lambda G_z\}$$

*saranno incontrati per descrivere le reazioni vincolari  $\vec{R}$  espresse da un vincolo privo di attrito su un punto  $P$  vincolato a muoversi sulla superficie di equazione  $G(x, y, z) = 0$ .*

*L'assenza di attrito corrisponde infatti alla possibilità di muoversi*

$$\{x_0, y_0, z_0\} \rightarrow \{x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz\}$$

*sulla superficie vincolante senza eseguire lavoro.*

*Tenuto conto che gli spostamenti sul vincolo soddisfano la condizione*

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0$$

*ne deriva che le reazioni vincolari devono essere proporzionali al gradiente*

$$\vec{R} = \lambda \nabla G$$

#### 4. Estremi vincolati: il caso generale

Estremi di  $u = f(x, y, z, t)$  sui punti vincolati dalle due equazioni

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0$$

Supponiamo che in un intorno del punto di estremo il vincolo equivalga alle due funzioni implicite

$$z = g(x, y), \quad t = h(x, y)$$

Si tratta allora degli estremi della funzione composta

$$u = f[x, y, g(x, y), h(x, y)]$$

Le derivate parziali sono:

$$(82) \quad \begin{cases} f_x + f_z g_x + f_t h_x = 0 \\ f_y + f_z g_y + f_t h_y = 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che le derivate delle funzioni implicite che figurano in (82) soddisfano il sistema

$$(83) \quad \begin{cases} \varphi_x + \varphi_z g_x + \varphi_t h_x = 0 \\ \varphi_y + \varphi_z g_y + \varphi_t h_y = 0 \\ \psi_x + \psi_z g_x + \psi_t h_x = 0 \\ \psi_y + \psi_z g_y + \psi_t h_y = 0 \end{cases}$$

si ricava

$$(84) \quad \begin{cases} f_x = -f_z g_x - f_t h_x \\ \varphi_x = -\varphi_z g_x - \varphi_t h_x \\ \psi_x = -\psi_z g_x - \psi_t h_x \end{cases} \quad \begin{cases} f_y = -f_z g_y - f_t h_y \\ \varphi_y = -\varphi_z g_y - \varphi_t h_y \\ \psi_y = -\psi_z g_y - \psi_t h_y \end{cases}$$

Ovvero si ricava che nella matrice jacobiana

$$(85) \quad \frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z & f_t \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & \varphi_t \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & \psi_t \end{pmatrix}$$

le prime due colonne sono combinazione lineare delle altre due, condizione che implica che la matrice ha rango 2.

Le condizioni espresse dal sistema 85 e dall'appartenenza alla regione delimitata dai due vincoli  $\varphi(x, y, z, t) = 0$ ,  $\psi(x, y, z, t) = 0$  equivalgono al sistema relativo alle 6 derivate parziali della funzione

$$L(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \psi(x, y, z, t)$$

derivate rispetto a  $x, y, z, t, \lambda, \mu$ .



Parte 7

Equazioni differenziali



## CAPITOLO 30

### Introduzione

Un'equazione differenziale é un'equazione - una formula - che lega tra loro  $t$ ,  $y$ ,  $y'$ , ecc.

La lettera  $y$  indica una funzione  $y(t)$  incognita.

Ad esempio

$$(86) \quad y' + y + t = 0$$

$$(87) \quad y'' + 3y' + 5y + t = 0$$

$$(88) \quad y' = f(t, y)$$

*Alcuni interessanti esempi* di applicazione di equazioni differenziali si trovano nel COURANT JOHN, Volume I § 3.4 pag. 223.

*Una buona prima trattazione* delle equazioni differenziali ordinarie si trova nel CORSO DI MATEMATICHE SUPERIORI di V.SMIRNOV, Vol. II.

*Un'ottima introduzione* delle equazioni differenziali ordinarie si trova nel libro EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE IN  $R^n$  di G.Stampacchia (e altri), pubblicato da Liguori.

#### 1. Risolvere un'equazione differenziale

Significa, riferiamoci all'equazione (88), trovare funzioni derivabili  $\varphi(t)$  tali che sostituendo nell'equazione differenziale al posto della  $y$  la  $\varphi(t)$  e al posto della  $y'$  la derivata  $\varphi'(t)$  l'equazione

$$\varphi'(t) = f[t, \varphi(t)]$$

sia soddisfatta per ogni  $t$  di un intervallo  $(\alpha, \beta)$ .

Ad esempio per l'equazione differenziale del primo esempio (86) si può prendere

$$\varphi(t) = 1 - t$$

La funzione proposta non é l'unica: anche le funzioni

$$1 - t + ce^{-t}$$

soddisfano la (86), qualunque sia la costante  $c$ .

Il fenomeno osservato non é affatto raro: la maggior parte delle volte infatti troveremo che risolvono un'equazione differenziale tutte le funzioni di una famiglia contenente un parametro arbitrario.

La ricerca delle soluzioni di un'equazione differenziale puó, in prima istanza essere fatta con mezzi euristici, provando e riprovando, in modo analogo alla ricerca delle primitive che si deve fare nel calcolo degli integrali.

## 2. Il problema di Cauchy

Il problema piú importante collegato ad un'equazione differenziale é il seguente:

$$(89) \quad \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

detto *problema di Cauchy*, ricerca di una (o piú) funzioni che

- siano di classe  $C^1$  per  $t$  in un intorno  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  di  $t_0$
- soddisfino, in tale intervallo l'equazione differenziale assegnata  $y' = f(t, y)$
- prendano nel punto  $t_0$  il valore assegnato  $y_0$ .

La conoscenza di una famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale che includa un parametro libero, aiuta la soluzione del problema di Cauchy.

Sapere ad esempio che tutte le funzioni

$$1 - t + c e^{-t}$$

soddisfano l'equazione differenziale  $y' + y + t = 0$  ci permette di risolvere qualunque problema di Cauchy ad essa associato

$$(90) \quad \begin{cases} y' + y + t = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Basta infatti scegliere  $c$  in modo che

$$1 - t_0 + c e^{-t_0} = y_0$$

ovvero

$$c = e^{t_0}(y_0 - 1 + t_0)$$

La soluzione é pertanto

$$g(t, t_0, y_0) = 1 - t + (e^{t_0}(y_0 - 1 + t_0)) e^{-t}$$

semplificando

$$g(t, t_0, y_0) = 1 - t + (y_0 - 1 + t_0) e^{t_0-t}$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Si noti la regolarità della soluzione trovata, regolarità rispetto alle tre variabili  $t, t_0, y_0$  da cui dipende.*

*Questo significa che problemi di Cauchy (90) relativi, ad esempio, a valori iniziali  $y_1$  e  $y_2$  diversi ma vicini avranno soluzioni*

$$g(t, t_0, x_1) \quad g(t, t_0, x_2)$$

*...vicine.*

### 3. Un'equivalenza

Il problema di Cauchy (89) equivale al seguente altro problema di natura integrale:

*Trovare una funzione  $y(t)$  continua<sup>1</sup> in un intorno  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  di  $t_0$  tale che*

$$(91) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f[\tau, y(\tau)] d\tau \quad t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$$

Infatti:

- se  $y(t)$  soddisfa (89) allora, integrando membro a membro su  $[t_0, t]$  si perviene alla (91),
- viceversa se  $y(t)$  soddisfa la (91) riesce  $y(t_0) = y_0$  e, derivando, come insegna il teorema di Torricelli o teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$y'(t) = f[t, y(t)]$$

ovvero il sistema (89)

OSSERVAZIONE 3.1. *Stabilire l'equivalenza di due problemi consente di trovare la soluzione di uno risolvendo l'altro: quale in effetti dei due problemi (89) o (91) sia piú facile é soggettivo sostenerlo.*

OSSERVAZIONE 3.2. *Supponiamo di saper risolvere il problema (89) o l'equivalente problema (91) in un certo intervallo  $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$ . Sia  $t_1 \in (t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$  : da cosa dipende il valore  $y(t_1)$  della soluzione nel punto  $t_1$  ?*

- dai dati del problema stesso
  - la funzione  $f(t, y)$
  - il tempo  $t_0$  iniziale
  - il valore  $y_0$  iniziale
- dai valori della funzione stessa  $y(t)$  in tutti i tempi di  $(t_0, t_1)$

---

<sup>1</sup>Tale funzione riesce necessariamente, teorema di Torricelli, anche derivabile

Infatti se pensate alla formulazione (91) avete

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f[\tau, y(\tau)]d\tau$$

dove l'integrale a secondo membro dipende, tramite la funzione  $f$  dai valori della stessa  $y$  in tutti i tempi  $\tau \in (t_0, t_1)$  precedenti.

In altri termini la soluzione al tempo  $t_1$  dipende dalla STORIA della soluzione nel precedente periodo  $(t_0, t_1)$ .

## La dipendenza dal dato iniziale

### 1. Due problemi di Cauchy

Consideriamo i due problemi di Cauchy

$$(92) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_2 \end{cases}$$

che si traducono nelle due equazioni integrali equivalenti

$$\begin{aligned} u(t) &= y_1 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ v(t) &= y_2 + \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

avendo indicato con  $u(t)$  e  $v(t)$  loro soluzioni: sottraendo membro a membro si ottiene

$$u(t) - v(t) = y_1 - y_2 + \int_{t_0}^t [f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))] d\tau$$

da cui, passando ai moduli,

$$(93) \quad |u(t) - v(t)| \leq |y_1 - y_2| + \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| d\tau \right|$$

Se la funzione  $f$  é lipschitziana rispetto alla seconda variabile si ha

$$|f(t, A) - f(t, B)| \leq L|A - B|$$

e quindi dalla (93) segue

$$(94) \quad |u(t) - v(t)| \leq |y_1 - y_2| + L \left| \int_{t_0}^t |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \right|$$

**DOMANDA:** Cosa possiamo aspettarci dalla disuguaglianza (94) in termini di grandezza della differenza  $|u(t) - v(t)|$  ?

### 2. La stima di Gronwall

Consideriamo, in astratto, la disuguaglianza

$$(95) \quad |\varphi(t)| \leq c + L \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau, \quad \forall t > 0$$

con  $c$  ed  $L$  non negative, in qualche modo imparentata con l'equazione (94).

LEMMA 2.1 (Gronwall). *Sia  $\varphi(t)$  una funzione tale che*

$$|\varphi(t)| \leq c + L \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau, \quad \forall t > 0$$

con  $c$  ed  $L$  non negative: *riesce allora*

$$|\varphi(t)| \leq c e^{Lt} \quad \forall t > 0$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con

$$\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau$$

riesce

$$\Phi'(t) = |\varphi(t)| \leq c + L \Phi(t)$$

avendo tenuto conto della diseuguaglianza soddisfatta per ipotesi da  $|\varphi(t)|$ .

Ne segue

$$\Phi'(t) - L \Phi(t) \leq c \quad \rightarrow \quad \Phi'(t) e^{-Lt} - L e^{-Lt} \Phi(t) \leq c e^{-Lt}$$

Tenuto conto che

$$\Phi'(t) e^{-Lt} - L e^{-Lt} \Phi(t) = (\Phi(t) e^{-Lt})'$$

si ha

$$(\Phi(t) e^{-Lt})' \leq c e^{-Lt}$$

Integrando su  $[0, t]$ , tenuto conto che  $\Phi(0) = 0$  si ha

$$\Phi(t) e^{-Lt} \leq \frac{c}{L} (1 - e^{-Lt}) \quad \rightarrow \quad \Phi(t) \leq \frac{c}{L} (e^{Lt} - 1)$$

Sostituendo la maggiorazione ottenuta nella diseuguaglianza in ipotesi si ha

$$|\varphi(t)| \leq c + L \frac{c}{L} (e^{Lt} - 1) \quad \rightarrow \quad |\varphi(t)| \leq c + c(e^{Lt} - 1) = c e^{Lt}$$

□

Applicando il Lemma di Gronwall al caso della (94) si ricava

$$|u(t) - v(t)| \leq |y_1 - y_2| e^{L|t-t_0|}$$

che fornisce una stima di quanto le due funzioni  $u(t)$  e  $v(t)$ , soluzioni dei due problemi di Cauchy (92) possano differire fra loro.

Naturalmente la presenza del fattore  $e^{L|t-t_0|}$ , tanto piú grande quanto piú si prende  $t$  lontano da  $t_0$ , rende tale stima tanto piú irrilevante quanto piú si prende  $t$  lontano da  $t_0$ !

OSSERVAZIONE 2.2. *Pensate ad una diseguaglianza (95) con  $c = 0$*

$$|\varphi(t)| \leq L \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau, \quad \forall t > 0$$

*Il Lemma dimostrato riconosce che l'unica funzione che possa verificare una tale diseguaglianza é... la funzione nulla !*

### 2.1. Un'applicazione.

Consideriamo i due seguenti (tutt'altro che facili) problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \cos(t^2) \sin(y) \\ y(0) &= y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' &= \cos(t^2) \sin(y) \\ y(0) &= y_2 \end{cases}$$

riferiti alla stessa equazione differenziale. Supponiamo di voler stimare quanto possano differire tra loro due soluzioni  $u(t)$  e  $v(t)$  dei due problemi.

Consideriamo le (91) soddisfatte da  $u(t)$  e  $v(t)$

$$u(t) = y_1 + \int_0^t \cos(\tau^2) \sin(u(\tau)) d\tau, \quad v(t) = y_2 + \int_0^t \cos(\tau^2) \sin(v(\tau)) d\tau$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$u(t) - v(t) = y_1 - y_2 + \int_0^t \cos(\tau^2) [\sin(u(\tau)) - \sin(v(\tau))] d\tau,$$

e quindi

$$(96) \quad |u(t) - v(t)| \leq |y_1 - y_2| + \left| \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \right|,$$

avendo tenuto conto che

$$|\cos(\tau^2)| \leq 1, \quad |[\sin(u(\tau)) - \sin(v(\tau))]| \leq |u(\tau) - v(\tau)|$$

Applicando alla (96) il Lemma di Gronwall si ottiene

$$|u(t) - v(t)| \leq |y_1 - y_2| e^{|t|}$$

da cui, se ad esempio le due funzioni riuscissero definite per  $t \in [0, 1]$  la risposta

$$\max_{t \in [0, 1]} |u(t) - v(t)| \leq e |y_1 - y_2|$$

Risultato interessante, ottenuto quasi gratis: si pensi infatti alla atroce difficoltà di conoscere esplicitamente le funzioni  $u(t)$  e  $v(t)$ .

### 3. Il teorema d'unicità

Il Lemma di Gronwall permette di riconoscere l'unicità<sup>1</sup> della soluzione del problema di Cauchy

$$(97) \quad y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

riferito ad una  $f(t, y)$  lipschitziana rispetto ad  $y$ :

$$|f(t, A) - f(t, B)| \leq L|A - B|.$$

Siano infatti, per assurdo  $y_1(x)$  ed  $y_2(x)$  due soluzioni dello stesso problema (97), riesce allora, trascrivendolo nella forma integrale e sottraendo membro a membro,

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= \int_0^t \{f[\tau, y_1(\tau)] - f[\tau, y_2(\tau)]\} d\tau \quad \rightarrow \\ &\rightarrow |y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_0^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

avendo fatto uso della lipschitzianità per stimare la differenza  $f[\tau, y_1(\tau)] - f[\tau, y_2(\tau)]$ .

Il Lemma di Gronwall applicato alla disuguaglianza

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_0^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau$$

implica, naturalmente, essendo la costante  $c$  nulla,  $|y_1(t) - y_2(t)| = 0$  ovvero

$$y_1(t) = y_2(t)$$

Quindi non ci possono essere due funzioni  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  diverse che soddisfino lo stesso problema (97).

Problemi di Cauchy relativi a punti iniziali  $t_0 \neq 0$  si trattano in modo del tutto analogo, approdando allo stesso risultato di unicità.

*OSSERVAZIONE 3.1. La lipschitzianità della funzione  $f$  è stata determinante nel conto precedente che tramite la disuguaglianza di Gronwall ha portato al Teorema di unicità.*

*Si conoscono esempi, neanche molto complessi che portano il nome di G. Peano, in cui, a fronte di funzioni  $f$  non lip il relativo problema di Cauchy ha più soluzioni<sup>2</sup>.*

*Stiamo pur tranquilli che se  $f \in C^1$  allora è (localmente) anche lip e vale il teorema di unicità.*

<sup>1</sup>Non dimentichiamo che non abbiamo ancora provato alcun teorema d'esistenza...

<sup>2</sup>Stampacchia, Equazioni differenziali ordinarie in  $R^n$ , Cap.3

Il capostipite degli esempi di problemi di Cauchy che non godono del teorema di unicità, esempio dovuto a G. Peano, è il seguente:

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

per il quale si riconoscono le due soluzioni seguenti

$$u(t) \equiv 0, \quad v(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{se } t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 3.2. L'esempio precedente di non unicità dovuto a Peano avrebbe potuto essere osservato da qualunque studente di primo anno in base alla seguente fondamentale osservazione: consideriamo la funzione

$$y(t) = t^3$$

Si tratta di una funzione nulla per  $t = 0$ , diversa dalla funzione nulla, invertibile

$$t = y^{\frac{1}{3}}$$

Si ha

$$y'(t) = 3t^2 \Leftrightarrow y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

Ovvero la funzione  $y = t^3$  è soluzione non nulla del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

problema che pertanto si trova ad avere la soluzione nulla e la soluzione  $y = t^3$ .

Costruzioni analoghe si possono ottenere partendo da funzioni  $y = t^5, y = t^7, \dots$

Si noti che si arriva sempre ad equazioni differenziali del tipo

$$y' = \gamma y^\alpha$$

con  $\alpha < 1$ .

Si ricordi sempre che le potenze  $y^\alpha$  di esponente  $\alpha < 1$  non sono lipschitziane in un intorno dell'origine! (Si pensi al grafico di  $\sqrt{x}$ )



## Il teorema d'esistenza per il problema di Cauchy

### 1. Il Teorema d'esistenza

Supponiamo che:

- la funzione  $f(x, y)$  sia di classe  $C^1(P)$ , continua con le due derivate parziali prime continue in

$$P = \{(x, y) \mid |x| < a, |y| < b\}$$

- 

$$|f(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M_1 \quad \forall (x, y) \in P$$

- 

$$M a < b, \quad M_1 a < 1$$

condizioni queste ultime che possono richiedere di ridurre l'ampiezza  $a$  con un'altra piú piccola.

**TEOREMA 1.1.** *Sotto le ipotesi precedenti su  $P$  e su  $f(x, y)$  il problema di Cauchy:*

$$(98) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

*ammette una e una sola soluzione  $y(x)$  definita per  $|x| < a$  e a valori  $|y(x)| < b$ , continua e derivabile.*

**OSSERVAZIONE 1.2.** *L'unicità della soluzione é stata riconosciuta precedentemente tramite il Lemma di Gronwall, vedi pag 306.*

**OSSERVAZIONE 1.3.** *Trattiamo il problema di Cauchy (98) solo nel caso particolare  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ : gli altri casi sono sostanzialmente analoghi e ad essi si adatta lo stesso algoritmo proposto.*

L'esistenza della soluzione della (98) potrebbe essere stabilita con strategie diverse:

- una potrebbe essere quella di un ragionamento logico che provi la NECESSITÁ dell'esistenza della soluzione pena l'incorrere in contraddizioni,

- un'altra potrebbe essere quella di trovare esplicitamente tale soluzione pescandola in opportune famiglie di funzioni (strategia che é stata seguita in riferimento a numerose equazioni differenziali particolari, quelle via via proposte come esercizi),
- un'altra strategia puó essere quella di mostrare un

ALGORITMO UNIVERSALE,

naturalmente teorico, che costruisca la soluzione stessa.

Seguiremo questa ultima strategia tenendo ben presente l'equivalenza già osservata tra problema di Cauchy (89) di pagina 300, e equazione integrale (91) di pagina 301, che, nel caso scelto  $x_0 = y_0 = 0$  conduce all'equazione integrale

$$y(x) = \int_0^x f(t, y(t)) dt$$

**Il teorema d'esistenza puó essere suddiviso in :**

- costruzione di una successione  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$  opportuna di funzioni,
  - continue per  $|x| < a$ ,
  - nulle nell'origine,
  - a valori  $|y_n(x)| < b$ ;
- riconoscimento che tale successione é convergente, uniformemente;
- riconoscimento che il limite  $y(x)$  di tale successione é la soluzione del problema (98).

## 2. La successione

Costruiamo la successione di funzioni:  
la prima sia, per definizione, la seguente

$$y_0(x) = 0$$

La seconda

$$y_1(x) = \int_0^x f(t, y_0(t)) dt = \int_0^x f(t, 0) dt$$

$y_1(x)$  é definita, correttamente  $\forall |x| < a$  é continua e, per tali  $x$  prende valori

$$|y_1(x)| \leq \int_0^x |f(t, 0)| dt \leq M \cdot a < b$$

Il fatto che per  $|x| < a$  riesca  $|y_1(x)| < b$  autorizza a considerare la funzione composta  $f(x, y_1(x))$  e costruire la seguente successiva funzione

$$y_2(x) = \int_0^x f(t, y_1(t)) dt$$

sulla quale si possono riconoscere le stesse proprietà

- é definita correttamente  $\forall |x| < a$
- é continua
- prende valori

$$|y_2(x)| \leq \int_0^x |f(t, y_1(t))| dt \leq M.a < b$$

Si capisce quindi la liceità di considerare la successione definita ricorsivamente

$$(99) \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x f(t, y_n(t)) dt$$

di funzioni

- continue per  $|x| < a$ ,
- nulle per  $x = 0$
- a valori  $|y_n(x)| < b$ .

La successione (99) prende il nome di

SUCCESSIONE DELLE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE<sup>1</sup>.

**2.1. Un primo esempio:** Consideriamo la costruzione precedente riferita al problema di Cauchy

$$y' = y - x, \quad y(0) = 0$$

La prima funzione é

$$y_0(x) = 0$$

La seconda é

$$y_1(x) = \int_0^x \{y_0(t) - t\} dt \quad \rightarrow \quad y_1(x) = \frac{-x^2}{2}$$

La terza é

$$y_2(x) = \int_0^x \{y_1(t) - t\} dt \quad \rightarrow \quad y_2(x) = \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

La quarta é

$$y_3(x) = \int_0^x \{y_2(t) - t\} dt \quad \rightarrow \quad y_3(x) = \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$$

---

<sup>1</sup>Si tratta di una successione ricorsiva ( con memoria 1 ): noto un termine si costruisce il successivo.

Andando oltre é facile riconoscere le

$$y_n(x) = - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = 1 + x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$$

somme parziali della serie di  $1 + x - e^x$ .

OSSERVAZIONE 2.1. *La costruzione ricorsiva della successione  $\{y_n(x)\}$  precedente tramite MATHEMATICA:*

`y[x_, 0] := 0; y[x_, n_] := Integrate[y[t, n - 1] - t, {t, 0, x}]`

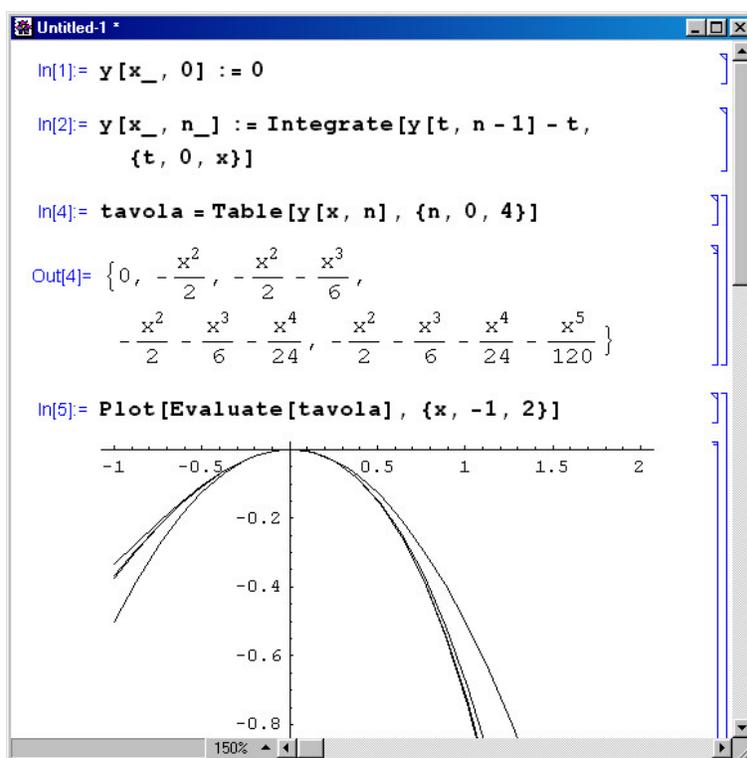


FIGURA 1. Le  $\{y_n(x)\}$  tramite MATHEMATICA:

**2.2. Un secondo esempio:** Consideriamo la costruzione precedente riferita al problema di Cauchy per l'equazione logistica

$$y' = y(1 - y), \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

come si riconosce stiamo studiando un problema di Cauchy già piú generale...  $y_0 = 1/2$ : tanto aiuta a riconoscere la generalitá del metodo.

La prima funzione é (naturalmente...)

$$y_0(x) = \frac{1}{2}$$

La seconda é

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x y_0(t)(1-y_0(t))dt \quad \rightarrow \quad y_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

La terza é

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x y_1(t)(1-y_1(t))dt \quad \rightarrow$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}t^2\right)dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$$

Andando un po' oltre si ricava

$$y_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{480} - \frac{x^7}{16128}$$

e cosí via proseguendo...

FIGURA 2. Le  $\{y_n(x)\}$  tramite MATHEMATICA:

OSSERVAZIONE 2.2. *Non illudersi troppo, i tempi impiegati dagli eleganti algoritmi ricorsivi sono quasi sempre proibitivi...*

*Il precedente algoritmo su un PC standard richiede quasi nulla per calcolare le prime 5 o 6 funzioni, richiede già 17 secondi per arrivare all'ottava, impiega piú di 2 minuti per calcolare la nona !*

Un algoritmo piú veloce é riportato nella seguente Figura 3 che suggerisce un uso di Mathematica piú vicino alla programmazione standard.

```

Il valore iniziale
In[1]= y[x_, 0] := 1 / 2

La costruzione ricorsiva delle approssimazioni successive:

In[2]= y[x_, n_] :=
  1 / 2 + Integrate[y[t, n - 1] * (1 - y[t, n - 1]), {t, 0, x}]

In[3]= itera = Block[{u = 1 / 2},
  {Do[{v = Expand[1 / 2 + Integrate[u * (1 - u), {x, 0, x}]];
    u = v;
    Print[" y[" , i, "]" (x) = " , u]}, {i, 1, 3}]}]

y[1] (x) = 1/2 + x/4

y[2] (x) = 1/2 + x/4 - x^3/48

y[3] (x) = 1/2 + x/4 - x^3/48 + x^5/480 - x^7/16128

```

FIGURA 3. Le  $\{y_n(x)\}$  tramite MATHEMATICA:

### 3. La convergenza

OSSERVAZIONE 3.1. *Successioni e serie sono cugini carnali: non é raro riconoscere la convergenza di una successione tramite la convergenza di una serie ad essa associata.*

Consideriamo infatti la successione

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

e la serie

$$a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots$$

le somme parziali della serie sono

$$S_1 = a_0, \quad S_2 = a_0 + (a_1 - a_0) = a_1, \dots, \quad S_n = a_{n-1}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$$

Se converge la successione ha somma la serie e viceversa. Dove sta il vantaggio ?

Sta nel fatto che la convergenza di una serie é garantita dalla convergenza assoluta e, quest'ultima é garantita dal fatto che i moduli

$$|(a_n - a_{n-1})|$$

siano abbastanza piccoli, ovvero che i termini della successione si stringano tra loro...!

Ci serviremo di questa osservazione proprio per riconoscere la convergenza della successione (99) delle approssimazioni successive.

Le funzioni della successione delle approssimazioni successive si

... stringono tra loro...

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \int_0^x |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq \\ &\leq M_1 \cdot |x| \cdot \max_{|t| < a} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \end{aligned}$$

disuguaglianza ottenuta applicando il teorema di Lagrange alla differenza

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| = |f_y(t, \eta)| |y_n(t) - y_{n-1}(t)|$$

tenuto conto che  $|f_y(t, \eta)| \leq M_1$

Ne segue

$$\max_{|x| < a} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq M_1 \cdot a \max_{|x| < a} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

Indicato con

$$\delta = \max_{|x| < a} |y_1(x) - y_0(x)|$$

riesce pertanto

(100)

$$\begin{aligned} \max_{|x| < a} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq M_1 \cdot a \delta \\ \max_{|x| < a} |y_3(x) - y_2(x)| &\leq M_1 \cdot a \max_{|x| < a} |y_2(x) - y_1(x)| \leq (M_1 \cdot a)^2 \delta \\ \dots \\ \max_{|x| < a} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq (M_1 \cdot a)^n \delta \end{aligned}$$

Tenuto conto che  $a$  é stato scelto cosí piccolo che

$$M_1 \cdot a < 1$$

allora la serie

$$(101) \quad y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x))$$

riesce maggiorata in modulo dalla serie geometrica convergente convergente

$$b + \delta \sum_{n=1}^{\infty} (M_1 \cdot a)^n$$

Quindi:

- la serie (101) é uniformemente convergente,
- la successione delle sue ridotte é esattamente la (99)
- la successione (99) converge uniformemente<sup>2</sup>.

**3.1. Verifichiamo la convergenza sul secondo esempio.** Consideriamo (approssimando le pesanti frazioni usate precedentemente) le differenze

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$$

riferite al secondo dei due esempi precedenti

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= 0.25x \\ |y_2(x) - y_1(x)| &= -0.0208333x^3 \\ |y_3(x) - y_2(x)| &= 0.00208333x^5 - 0.000062004x^7 \\ |y_4(x) - y_3(x)| &= -0.00014881x^7 + 0.0000130897x^9 + \dots \\ &\quad \dots - 6.29434 \cdot 10^{-7}x^{11} + 1.98731 \cdot 10^{-8}x^{13} - 2.56299 \cdot 10^{-10}x^{15} \end{aligned}$$

É abbastanza evidente che le differenze siano via via minori...

#### 4. La funzione limite

Si capisce<sup>3</sup> che, tenuto conto che la successione definita dalle relazioni (99) converge uniformemente ad una funzione  $y(x)$ , passando al limite nelle (99) si ottiene

$$y(x) = \int_0^x f(t, y(t)) dt \quad \rightarrow \quad y(0) = 0, \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

<sup>2</sup>L'attributo uniformemente che aggiungiamo alla convergenza significa che i risultati di convergenza ottenuti sono uguali - uniformi - per tutti gli  $x$  dell'intervallo  $(-a, a)$  considerato

<sup>3</sup>Il fenomeno vero e del resto molto plausibile indicato richiederebbe maggiore prudenza, sostanzialmente nel passaggio in cui riteniamo che la funzione limite delle  $\{y_n(x)\}$  sia continua.

## 5. Conclusioni

Il Teorema d'esistenza per il problema di Cauchy particolare

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

si riconosce valido, con semplici modifiche ortografiche nella dimostrazione, anche per il problema, generale, seguente

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

con il seguente enunciato

**TEOREMA 5.1.** *La funzione  $f(x, y)$  soddisfi le seguenti ipotesi di regolarità*

- *sia di classe  $C^1(P)$ , continua con le due derivate parziali prime continue nel dominio rettangolare*

$$P = \{(x, y) \mid \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta\}$$

- *riesca  $|f(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M_1 \quad \forall (x, y) \in P$*

*Il problema di Cauchy:*

$$(102) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in P$$

*ammette una e una sola soluzione  $y(x)$  continua e derivabile definita per  $|x - x_0| < a$  essendo  $a$  tanto piccolo da soddisfare le diseguaglianze seguenti*

$$M a < \min(|y_0 - \gamma|, |y_0 - \delta|), \quad M_1 a < 1$$

**OSSERVAZIONE 5.2.** *La costruzione delle approssimazioni successive effettuata, fondamentale nella prova del teorema d'esistenza (sia nel caso particolare esposto che in quello generale solamente annunciato) è una costruzione in piccolo*

*cioè l'algoritmo proposto funziona, la successione costruita converge, per  $x$  in un (piccolo) intorno del punto iniziale  $x_0$  : ricordate infatti che abbiamo dovuto probabilmente ridurre il valore  $a$  un paio di volte per garantirci che valesse sia la costruzione della successione sia la sua convergenza.*

*Un altro algoritmo famoso, stabilito in piccolo, è quello d'esistenza delle funzioni implicite del teorema di Dini.*

### 6. Una dimostrazione sintetica

Il problema di Cauchy

$$(103) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

equivale, com'è stato osservato nel paragrafo *Un'equivalenza*, a pagina 301, all'equazione integrale

$$(104) \quad y(t) = \int_0^t f[\tau, y(\tau)] d\tau \quad t \in (-a, a)$$

anch'essa nell'incognita  $y(t)$ .

Consideriamo lo spazio normato  $C^0([-a, a])$  delle funzioni  $v$  continue per  $t \in (-a, a)$  considerato a pagina 390 e consideriamo la trasformazione  $T$  che ad ogni funzione  $v \in C^0([-a, a])$  fa corrispondere la funzione  $w(t)$

$$w(t) = \int_0^t f[\tau, v(\tau)] d\tau$$

Le ipotesi fatte

- la funzione  $f(x, y)$  sia di classe  $C^1(P)$ , continua con le due derivate parziali prime continue in

$$P = \{(x, y) \mid |x| < a, |y| < b\}$$

- 

$$|f(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M_1 \quad \forall (x, y) \in P$$

- 

$$M a < b, \quad M_1 a < 1$$

garantiscono che la trasformazione

$$T : C^0([a, a]) \rightarrow C^0([a, a])$$

cioè se  $v \in C^0([-a, a])$  allora di conseguenza  $w \in C^0([-a, a])$  e che è una contrazione

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq L\|v_1 - v_2\|, \quad L < 1$$

Applicando alla trasformazione  $T$  il Teorema 2.4 di pagina 385 si deduce<sup>4</sup> l'esistenza di una e una sola funzione  $y \in C^0([-a, a])$  tale che

$$y = Ty$$

Tale funzione, tenuto conto dell'equivalenza osservata a pagina 301, rappresenta una soluzione del problema di Cauchy (161).

---

<sup>4</sup>Vedi anche l'Esempio 4.2 di pagina 394

### 7. Esistenza in grande...

Parlare di esistenza in grande per la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in P$$

con una  $f(x, y)$  definita in

$$P = \{(x, y) \mid \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta\}$$

vuol dire riconoscere l'esistenza di una soluzione definita per

$$\alpha < x < \beta$$

e non come annunciato nel precedente Teorema 5.1 solamente per  $x$  appartenente ad un intorno (forse anche molto piccolo) di  $x_0$ .

ESEMPIO 7.1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

problema nel quale la funzione  $f(x, y) = y^2$  é definita (e regolarissima) per

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

La soluzione, trovata empiricamente molto facilmente, é

$$y = \frac{1}{1-x}$$

definita in  $-\infty < x < 1$ , intervallo molto piú piccolo di quello in cui la semplice funzione  $f(x, y) = y^2$  era assegnata.

Le soluzioni di problemi analoghi

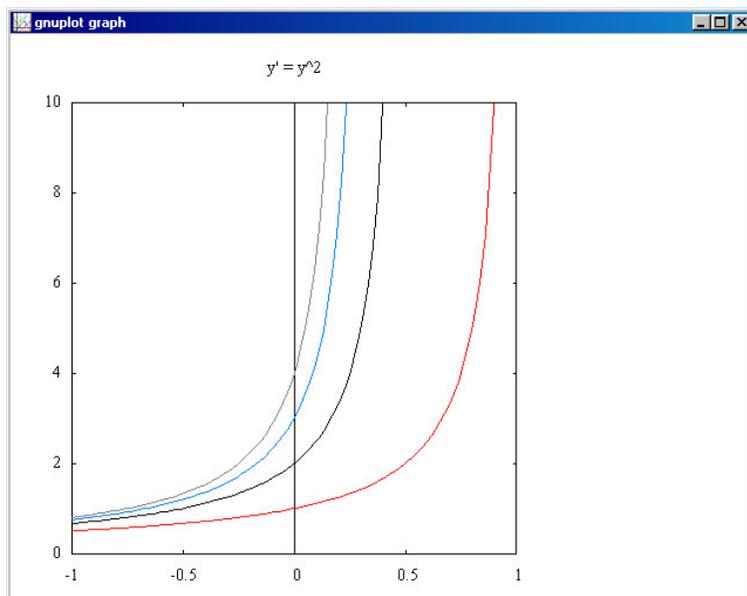
$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= n \end{cases} \quad n = 2, 3, \dots$$

sono

$$y(x) = \frac{1}{1/n - x}$$

funzioni definite in intervalli ancora piú piccoli;  $-\infty < x < 1/n$ . I loro grafici, riportati in Figura 4 illustrano il fenomeno

- $y' = y^2$  significa  $y'$  tanto piú grande quanto piú grande é  $y^2$ ...
- grafici in salita...
- salite cosí ripide da degenerare in un asintoto verticale ...

FIGURA 4. Alcune soluzioni di  $y' = y^2$ **DOMANDA:**

*Quali sono le condizioni favorevoli a che il piccolo, non sia tanto piccolo...? Ovvero, in quali casi si può riconoscere l'esistenza della soluzione in tutto l'intervallo delle  $x$  in cui l'equazione  $y' = f(x, y)$  era considerabile?*

Torniamo alle condizioni sotto le quali la costruzione delle approssimazioni successive  $\{y_n(x)\}$  e la loro convergenza era stata riconosciuta:  $f(x, y)$  definita per

$$P = \{(x, y) \mid \alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta\}$$

con  $|f(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M_1 \quad \forall (x, y) \in P$

Una condizione favorevole é che  $f(x, y)$  sia definita (e lipschitziana) per ogni  $y$  cosa che avviene, ad esempio con la linearità di  $f(x, y)$

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

In tal caso

$$|y_0 - \gamma| = |y_0 - \delta| = \infty$$

e almeno una delle due restrizioni

$$M a < \min(|y_0 - \gamma|, |y_0 - \delta|)$$

diventa irrilevante...

### 8. Step by step...

Supponiamo di aver risolto il problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

per  $|x - x_0| < a$

Se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0+a} y(x) = y_1$$

e se il punto  $(x_0 + a, y_1)$  é ancora interno al rettangolo  $P$  si può riproporre un nuovo problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0 + a) = y_1$$

La soluzione di questo nuovo problema andrà *un po' piú avanti* e cosí,

*passo dopo passo*

si prolunga la soluzione...

*OSSERVAZIONE 8.1. Una persona prudente deve sempre temere che i procedimenti passo dopo passo non portino lontano: infatti i passi potrebbero dover divenire sempre piú corti e quindi, anche se infiniti, non allontanarsi molto... (ricordate il paradosso di Zenone, uomo prudentissimo).*

**8.1. Quando ci si ferma ?** Ci sono due condizioni che possono fallire:

- l'esistenza del

$$\lim_{x \rightarrow x_0+a} y(x) = y_1$$

- l'appartenenza di  $(x_0 + a, y_1)$  all'interno di  $P$

### 9. La derivabilità rispetto al dato iniziale

La soluzione del problema di Cauchy

$$(105) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \lambda \end{cases}$$

é una funzione che dipende naturalmente oltre che da  $x$  anche dai due parametri,  $x_0$  e  $\lambda$ , che definiscono la condizione iniziale.

Supponiamo  $f \in C^2(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  in modo che in ogni rettangolo chiuso e limitato  $\Omega \subset A$  esista  $L_\Omega > 0$  rispetto al quale siano soddisfatte le limitazioni

$$|f_y(x, y)|, |f_{yy}(x, y)| \leq L_\Omega \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

In altri termini supponiamo che sia  $f$  che  $f_y$  siano lipschitziane rispetto ad  $y$  sui rettangoli chiusi e limitati interni ad  $A$ .

Supponiamo di riferirci al caso  $x_0 = 0$  : la soluzione del precedente problema di Cauchy (105) é una funzione

$$\varphi(x, \lambda)$$

Esaminiamo ora la derivabilit  di  $\varphi(x, \lambda)$  rispetto ad  $\lambda$  : consideriamo quindi il rapporto incrementale

$$(106) \quad r(x, h) = \frac{\varphi(x, \lambda + h) - \varphi(x, \lambda)}{h}$$

Tenuto conto dell'equazione integrale in tutto equivalente al problema di Cauchy (105) si ha

$$\begin{cases} \varphi(x, \lambda + h) &= \lambda + h + \int_0^x f(\tau, \varphi(\tau, \lambda + h)) d\tau \\ \varphi(x, \lambda) &= \lambda + \int_0^x f(\tau, \varphi(\tau, \lambda)) d\tau \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro e dividendo per  $h$  si ha

$$(107) \quad r(x, h) = 1 + \int_0^x \frac{f(\tau, \varphi(\tau, \lambda + h)) - f(\tau, \varphi(\tau, \lambda))}{h} d\tau$$

Tenuto conto che per  $x$  in un intorno limitato dell'origine le funzioni  $\varphi(x, \lambda + h)$  e  $\varphi(\tau, \lambda)$  si mantengono limitate e che la lipschitzianit  della  $f$  rispetto ad  $y$  sui limitati implica

$$\frac{1}{h} |f(\tau, \varphi(\tau, \lambda + h)) - f(\tau, \varphi(\tau, \lambda))| \leq L|r(x, h)|$$

si riconoscere che  $x \geq 0$  si ha

$$|r(x, h)| \leq 1 + L \int_0^x |r(\tau, h)| d\tau$$

da cui, per il Lemma di Gronwall si ha

$$|r(x, h)| \leq e^{Lx}$$

risultato gi  noto: la lipschitzianit  di  $\varphi(x, \lambda)$  rispetto a  $\lambda$

$$|r(x, h)| \leq e^{Lx} \Leftrightarrow |\varphi(\tau, \lambda + h) - \varphi(\tau, \lambda)| \leq e^{Lx} |h|$$

Rappresentando il numeratore della frazione integranda a secondo membro di (107) con il teorema di Lagrange si ha

$$(108) \quad r(x, h) = 1 + \int_0^x f_y(\tau, \chi_h(\tau)) r(\tau, h) d\tau$$

essendo  $\chi_h(\tau)$  un'opportuna funzione intermedia tra  $\varphi(\tau, \lambda)$  e  $\varphi(\tau, \lambda + h)$  :

$$(109) \quad |\chi_h(x) - \varphi(x, \lambda)| \leq e^{Lx} |h|$$

Osservato che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \chi_h(\tau) = \varphi(\tau, \lambda)$$

si riconosce, dalla (108) che, se il rapporto incrementale (106) ammette limite,  $u(x)$  tale limite non può che soddisfare l'equazione integrale

$$(110) \quad u(x) = 1 + \int_0^x f_y(\tau, \varphi(\tau, \lambda)) u(\tau) d\tau$$

cioè essere la soluzione del problema di Cauchy (lineare)

$$\begin{cases} u' = f_y(x, \varphi(x, \lambda)) u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la (108) e la (110) si ha

$$\begin{aligned} |r(x, h) - u(x)| &\leq \int_0^x |f_y(\tau, \chi_h(\tau)) r(\tau, h) - f_y(\tau, \varphi(\tau, \lambda)) u(\tau)| d\tau \leq \\ &\int_0^x |f_y(\tau, \chi_h(\tau)) - f_y(\tau, \varphi(\tau, \lambda))| |r(\tau, h)| d\tau + \\ &+ \int_0^x |f_y(\tau, \varphi(\tau, \lambda))| |r(\tau, h) - u(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Tenuto conto della maggiorazione  $|r(x, h)| \leq e^{Lx}$  e delle  $|f_y|, |f_{yy}| \leq L$  si ha

$$|r(x, h) - u(x)| \leq e^{Lx} L \int_0^x |\chi_h(\tau) - \varphi(\tau, \lambda)| + L \int_0^x |r(\tau, h) - u(\tau)| d\tau$$

da cui, tenuto conto della (109) si ha

$$|r(x, h) - u(x)| \leq L e^{2Lx} |h| + L \int_0^x |r(\tau, h) - u(\tau)| d\tau$$

maggiorazione che, per il Lemma di Gronwall implica

$$|r(x, h) - u(x)| \leq L e^{3Lx} |h|$$

da cui

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(x, h) = u(x)$$

ovvero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \lambda + h) - \varphi(x, \lambda)}{h} = \varphi_\lambda(x, \lambda) = u(x)$$

ESEMPIO 9.1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

La sua soluzione é, come ben noto,  $\varphi(x, \lambda) = \lambda e^x$ : riesce ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda e^x = e^x$$

Verifichiamo il risultato precedente: la derivata rispetto a  $\lambda$  dovrebbe essere la soluzione  $u(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases} \rightarrow u(x) = e^x$$

come infatti si é ottenuto per derivazione diretta della  $\varphi(x, \lambda)$ .

ESEMPIO 9.2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

relativo all'equazione logistica.

La sua soluzione, com'è noto é

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{e^x \lambda}{1 - \lambda + e^x \lambda}$$

La derivata rispetto a  $\lambda$  é, calcolata direttamente,

$$\varphi_{\lambda}(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{e^x \lambda}{1 - \lambda + e^x \lambda} \right) = -\frac{e^x (-1 + e^x) \lambda}{(1 - \lambda + e^x \lambda)^2} + \frac{e^x}{1 - \lambda + e^x \lambda}$$

che dovrebbe essere la soluzione del problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} u' = \left( 1 - 2 \frac{e^x \lambda}{1 - \lambda + e^x \lambda} \right) u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Verifichiamo:

$$-\frac{e^x (-1 + e^x) \lambda}{(1 - \lambda + e^x \lambda)^2} + \frac{e^x}{1 - \lambda + e^x \lambda} \Big|_{x=0} = 1$$

Per quanto concerne l'equazione occorre eseguire con cura il calcolo della

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{e^x (-1 + e^x) \lambda}{(1 - \lambda + e^x \lambda)^2} + \frac{e^x}{1 - \lambda + e^x \lambda} \right)$$

e quello del prodotto

$$\left( 1 - 2 \frac{e^x \lambda}{1 - \lambda + e^x \lambda} \right) \left( -\frac{e^x (-1 + e^x) \lambda}{(1 - \lambda + e^x \lambda)^2} + \frac{e^x}{1 - \lambda + e^x \lambda} \right)$$

e constatare la loro coincidenza. . .

### 10. La dipendenza da altri parametri

Consideriamo problemi di Cauchy

$$(111) \quad \begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

Le soluzioni naturalmente dipenderanno dal parametro  $\mu$  presente nell'equazione: saranno cioè funzioni

$$\varphi(x, \lambda, \mu)$$

La questione è riconoscere se tale dipendenza ha carattere di regolarità o meno: in altri termini se riesce ad esempio

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(x, y, \mu) = f(x, y, \mu_0)$$

riesce di conseguenza

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \varphi(x, \lambda, \mu) = \varphi(x, \lambda, \mu_0) \quad ?$$

ESEMPIO 10.1. Consideriamo ad esempio il problema

$$y' = y + \mu, \quad y(0) = 1$$

La soluzione è

$$\varphi(x, 1, \mu) = (1 + \mu)e^x - \mu$$

e riesce,

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} ((1 + \mu)e^x - \mu) = (1 + \mu_0)e^x - \mu_0$$

Consideriamo i problemi di Cauchy (111) relativi a due parametri  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , problemi presentati nella forma di equazione integrale

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda, \mu_1) &= \lambda + \int_0^x f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_1), \mu_1) d\tau \\ \varphi(x, \lambda, \mu_2) &= \lambda + \int_0^x f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_2), \mu_2) d\tau \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\begin{aligned} &|\varphi(x, \lambda, \mu_1) - \varphi(x, \lambda, \mu_2)| \leq \\ &\leq \int_0^x |f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_1), \mu_1) - f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_2), \mu_2)| d\tau \end{aligned}$$

Disuguaglianza che, con la proprietà triangolare si esprime anche come

$$\begin{aligned} &|\varphi(x, \lambda, \mu_1) - \varphi(x, \lambda, \mu_2)| \leq \\ &\leq \int_0^x |f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_1), \mu_1) - f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_1), \mu_2)| d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^x |f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_1), \mu_2) - f(\tau, \varphi(\tau, \lambda, \mu_2), \mu_2)| d\tau$$

Supposto che la  $f$  sia lipschitziana sia rispetto alla  $y$  che rispetto alla  $\mu$  si ha quindi

$$\begin{aligned} & |\varphi(x, \lambda, \mu_1) - \varphi(x, \lambda, \mu_2)| \leq \\ & \leq \int_0^x L |\mu_1 - \mu_2| d\tau + \int_0^x L |\varphi(\tau, \lambda, \mu_1) - \varphi(\tau, \lambda, \mu_2)| d\tau \end{aligned}$$

da cui, sempre per il Lemma di Gronwall si ha, per  $x \geq 0$

$$|\varphi(x, \lambda, \mu_1) - \varphi(x, \lambda, \mu_2)| \leq Lx |\mu_1 - \mu_2| e^{Lx}$$

Conclusione:

se  $f$  é lipschitziana sia rispetto ad  $y$  che rispetto al parametro  $\mu$  le soluzioni dipendono da tale parametro ancora con continuitá lipschitziana, per  $x$  in un intervallo positivo limitato.

## 11. Equazioni e sistemi

A fianco alle equazioni  $y' = f(t, y)$  possiamo immaginare sistemi

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

ad esempio di due equazioni in due incognite, come pure ovviamente di piú equazioni in piú incognite.

L'aspetto piú interessante, almeno inizialmente, consiste nella possibilitá di interpretare ogni equazione differenziale di ordine superiore al primo come un sistema di equazioni di ordine 1.

Consideriamo, ad esempio l'equazione del secondo ordine

$$(112) \quad y'' + y = \cos(t)$$

Indicata con  $y_1 = y$  la funzione incognita e con  $y_2 = y'$  la sua derivata, l'equazione del secondo ordine (112) equivale al sistema di primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + \cos(t) \end{cases}$$

Il trucco é evidente: basta dare il nome  $y_1$  alla funzione e  $y_2, y_3, y_4, \dots$  alle successive eventuali derivate coinvolte nell'equazione.

Cosí ad esempio, l'equazione di terzo ordine, non lineare  $y^{[3]} + y' + y^2 = 1$  si traduce nel sistema di primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_2 - y_1^2 + 1 \end{cases}$$

La possibilità di trasformare ogni equazione di ordine superiore in un sistema di primo ordine implica

- che si può optare tra studiare equazioni (scalari) di ordine superiore oppure studiare solo sistemi di primo ordine,
- é inutile una teoria dei sistemi di ordine superiore.

TEOREMA 11.1 (esistenza e unicità per i sistemi). *Il sistema differenziale*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots = \dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

sia composto da funzioni  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  di classe  $C^1$  nel dominio rettangolare

$$R = \{t \in (a, b), \quad y_1 \in (c_1, d_1), \quad y_2 \in (c_2, d_2) \dots \quad y_n \in (c_n, d_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Sia  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ,  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ,  $\{t_0, Y_0\} \in R$ , il problema di Cauchy

$$Y' = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0$$

ammette una e una sola soluzione

$$Y : t \rightarrow Y(t) \in \mathbb{R}^n$$

definita e di classe  $C^1$  per  $t \in (\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ .

La dimostrazione di questo teorema molto generale si ricava, ancora con semplici modifiche, poco piú che ortografiche, adattando il procedimento della successione delle approssimazioni successive incontrato nel caso del primo problema di Cauchy  $y' = f(x, y)$ ,  $y(0) = 0$ .

### 11.1. Le equazioni di ordine superiore, i sistemi,...

La possibilità osservata precedentemente di tradurre ogni equazione differenziale di ordine  $n$  superiore ad 1 in un sistema di  $n$  equazioni di ordine 1, unita al precedente Teorema 11.1 permettono di enunciare il seguente

TEOREMA 11.2 (esistenza e unicità per problemi di ordine superiore). *Sia  $f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  una funzione di classe  $C^1$  nel dominio rettangolare*

$$R = \{t \in (a, b), \quad y_1 \in (c_1, d_1), \quad y_2 \in (c_2, d_2) \dots \quad y_n \in (c_n, d_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

sia  $\{t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \in R$  allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n]} & = f(t, y, y', \dots, y^{[n-1]}), \\ y(t_0) & = x_0 \\ y'(t_0) & = x_1, \\ \dots & = \dots \\ y^{[n-1]}(t_0) & = x_{n-1} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione  $y(t)$  definita e di classe  $C^n$  per  $t \in (\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$

OSSERVAZIONE 11.3. Le soluzioni di un'equazione differenziale (di forma normale) di primo ordine sono determinate da un valore iniziale

$$y(t_0) = x_0$$

Le soluzioni di un'equazione del secondo ordine sono determinate da due valori iniziali

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1$$

e, così proseguendo, le soluzioni di un'equazione ad esempio di ordine 5 saranno determinate da 5 condizioni iniziali

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad y''(t_0) = x_2, \quad y^{[3]}(t_0) = x_3, \quad y^{[4]}(t_0) = x_4.$$

OSSERVAZIONE 11.4. Una domanda:

siano  $y_1(t)$  ed  $y_2(t)$  due soluzioni di una stessa equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' = f(t, y, y')$$

definite in uno stesso intervallo  $(\alpha, \beta)$ , i loro grafici possono intersecarsi?

Sì, ma con tangenti diverse! Riflettete sul teorema (11.2).

Pensate ad esempio alle soluzioni, ben note, dell'equazione  $y'' + y = 0$ , le funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$ : esse si intersecano in tanti punti, ma non sono mai tangenti tra loro...

In altri termini non ci sono punti  $x_0$  nei quali riesca

$$\sin(x_0) = \cos(x_0), \quad \cos(x_0) = -\sin(x_0)$$

## Equazioni lineari di primo ordine

Si chiamano equazioni lineari di primo ordine<sup>1</sup> le seguenti

$$y' + a(x)y = b(x)$$

con  $a(x)$  e  $b(x)$  funzioni continue, definite (almeno<sup>2</sup>) in uno stesso intervallo  $I = (\alpha, \beta)$ .

Il caso piú semplice é ovviamente quello a coefficienti  $a(x)$  e  $b(x)$  costanti.

### 1. Il caso omogeneo

Il caso  $y' + a(x)y = 0$ ,  $b(x) = 0$ , si chiama *caso omogeneo*.

**Il teorema di unicitá** permette di riconoscere che le soluzioni dell'equazione  $y' + a(x)y = 0$

- o sono identicamente nulle,
- o non si annullano mai.

Infatti sia  $y(x)$  una soluzione dell'equazione, se esiste un punto  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  in cui riesce  $y(x_0) = 0$  allora tale funzione  $y(x)$  é soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

che del resto ha anche come soluzione la funzione identicamente nulla. L'unicitá implica quindi che le due funzioni

- la nostra  $y(x)$
- e la funzione identicamente nulla

---

<sup>1</sup>Vol.II, pag. 680

<sup>2</sup> Naturalmente possono essere definite ciascuna in un intervallo diverso ma, per poterle considerare insieme, occorre che tali intervalli includano una parte  $(\alpha, \beta)$  comune.

siano la stessa funzione, donde

$$y(x) \equiv 0$$

Formalmente, il problema

$$(113) \quad \begin{aligned} y' &= -a(x)y \\ y(x_0) &= y_0 \neq 0 \end{aligned}$$

si traduce <sup>3</sup> in

$$y' + a(x)y = 0 : \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = - \int_{x_0}^x a(s) ds$$

ovvero

$$\ln(|y|) - \ln(|y_0|) = - \int_{x_0}^x a(s) ds = - (A(x) - A(x_0))$$

essendo  $A(x)$  una primitiva di  $a(x)$ , da cui, tenuto conto che  $y \neq 0$  cioè deve avere lo stesso segno di  $y_0$ , si ha

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = - \int_{x_0}^x a(s) ds = - (A(x) - A(x_0))$$

ovvero

$$y = y_0 e^{-(A(x)-A(x_0))}$$

La soluzione di (113) é quindi

$$y = c e^{-A(x)}$$

essendo:

- $A(x)$  una (qualsiasi) primitiva di  $a(x)$
- $c = y_0 e^{A(x_0)}$ .

## 2. Il caso non omogeneo

Consideriamo l'equazione non omogenea o completa

$$y' + a(x)y = b(x)$$

sue soluzioni possono essere trovate sotto la forma

$$(114) \quad y = u(x) e^{-A(x)}$$

essendo al solito  $A(x)$  una primitiva di  $a(x)$  e scegliendo opportunamente il fattore variabile  $u(x)$ .

Sostituendo la (114) nell'equazione completa si vuole avere

$$u'(x) e^{-A(x)} - a(x) u(x) e^{-A(x)} + a(x) u(x) e^{-A(x)} = b(x)$$

---

<sup>3</sup>Se  $y_0 = 0$  la soluzione é ovviamente  $y = 0$

ovvero

$$u'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

formula che indica quali siano i fattori

$$u(x) = \int b(s)e^{A(s)} ds + c$$

adatti.

Le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto

$$(115) \quad y = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int b(s)e^{A(s)} ds$$

formula che, se  $b = 0$  include quella già osservata per il caso omogeneo.

### 2.1. Riassumendo:

Le soluzioni di un'equazione lineare completa coinvolgono due integrazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = \int a(s) ds \\ \int b(s)e^{A(s)} ds \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE 2.1. *La formula (115) è scritta male... anzi malissimo: ma tuttavia è esatta !*

*L'abuso di scrittura sta in quell'integrazione senza estremi, operazione che produce l'ambiguità di una costante additiva  $k$ . Tuttavia quella costante dovrà essere moltiplicata per l'esponenziale  $e^{-A(x)}$ , e l'addendo  $ke^{-A(x)}$  che ne deriva è incluso nel primo addendo della (115), addendo che si riferisce appunto alla famiglia  $ce^{-A(x)}$ .*

OSSERVAZIONE 2.2. *Notate come i nomi attribuibili alla funzione cercata come pure alla variabile siano del tutto sostituibili: il nome di tempo  $t$  dato alla variabile negli esempi precedenti è stato, in questo paragrafo, sostituito con l'anonima  $x$ .*

### 2.2. Soluzioni in grande.

I problemi di Cauchy relativi a equazioni lineari (115) hanno soluzione *in grande*, ricorda pagina 319, cioè se i coefficienti  $a(x)$  e  $b(x)$  sono funzioni continue per  $x \in (\alpha, \beta)$  il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad x_0 \in (\alpha, \beta), \quad y_0 \in R$$

ammette una e una sola soluzione  $y(x)$  definita in tutto l'intervallo  $(\alpha, \beta)$ .

### 2.3. Riassumendo.

La soluzione del problema di Cauchy

$$(116) \quad \begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é

$$(117) \quad y(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds \right\}$$

Le soluzioni dell'equazione completa  $y' + a(x)y = b(x)$  sono composte di due addendi

- la famiglia delle soluzioni dell'equazione omogenea associata  $c e^{-\int a(t) dt}$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$
- una qualsiasi soluzione  $\bar{y}(x)$  dell'equazione completa.

ESEMPIO 2.3. Sia  $y' + 2y = 3$  allora la famiglia delle soluzioni dell'omogenea é  $c e^{-2x}$ , una soluzione dell'equazione completa é  $\bar{y}(x) = 3/2$ : quindi la famiglia delle soluzioni dell'equazione completa é

$$y(x) = 3/2 + c e^{-2x}$$

### 3. Le equazioni di Bernoulli

L'equazione

$$(118) \quad y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 1$$

non é lineare per via di quel termine  $b(x)y^m$ : tuttavia si può trasformare in un'equazione lineare con il semplice passaggio

$$y'y^{-m} + a(x)y^{1-m} = b(x), \quad (1-m)y'y^{-m} + (1-m)a(x)y^{1-m} = (1-m)b(x)$$

ovvero

$$(y^{1-m})' + (1-m)a(x)y^{1-m} = (1-m)b(x)$$

Detta  $z(x) = y^{1-m}$  la precedente equazione diventa

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x)$$

equazione lineare...

Le sue soluzioni sono (come visto precedentemente) esprimibili con due integrazioni.

Trovata  $z(x)$  si ricava naturalmente  $y(x)$  estraendo una radice  $(m-1)$ -esima.

OSSERVAZIONE 3.1. La piú nota equazione di Bernoulli é la logistica,  $y' = a y(1-y)$ , equazione relativa ad  $m = 2$ , a coefficienti costanti.

## Equazioni lineari di ordine $n$

Si chiamano equazioni differenziali lineari di ordine  $n$  le seguenti:

$$y^{[n]} + a_1(x)y^{[n-1]} + a_2(x)y^{[n-2]} + \dots + a_n(x)y = \psi(x)$$

con

$$a_1(x), a_2(x) \dots a_n(x)$$

continue in  $(\alpha, \beta)$ .

I casi piú importanti corrispondono al caso  $n = 1$  e al caso  $n = 2$ .

Gli unici casi nei quali esiste qualche algoritmo risolutivo efficace sono:  $n = 1$  oppure  $n > 1$  (ma non troppo alto...) e coefficienti  $a_1, a_2, \dots$  costanti, cioè non dipendenti da  $x$ .

### 1. Indipendenza lineare

DEFINIZIONE 1.1. *Le  $n$  funzioni*

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

*definite in uno stesso intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono  $n$  costanti  $c_1, c_2, \dots, c_n$  non tutte nulle tali che la somma*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

*sia la funzione identicamente nulla in  $I$ .*

*La condizione precedente equivale a riconoscere che una almeno delle funzioni si può esprimere come combinazione lineare delle altre.*

*$n$  funzioni  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti.*

ESEMPIO 1.2. *Le funzioni  $1, x, x^2$  sono linearmente indipendenti: infatti se fossero dipendenti dovrebbero esistere tre costanti  $a, b, c$  tali che*

$$ax^2 + bx + c$$

*sia identicamente nulla, ma si vede bene che quella somma é un polinomio di secondo grado che, se non ha tutti i coefficienti nulli, ha non piú di due radici.*

ESEMPIO 1.3. *Le funzioni*

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad (x - 17)^2$$

*sono linearmente dipendenti.*

*Infatti*

$$(x - 17)^2 = 289 \times 1 - 34 \times x + 1 \times x^2$$

*cioé la quarta di esse  $(x - 17)^2$  é combinazione lineare delle prime tre  $1, x, x^2$ .*

É molto difficile rispondere alla domanda se  $n$  funzioni assegnate siano o meno linearmente indipendenti.

TEOREMA 1.4 (Condizione necessaria per la dipendenza). *Condizione necessaria a che le funzioni*

$$f_1(x), \quad f_2(x), \dots, \quad f_n(x)$$

*sufficientemente derivabili siano linearmente dipendenti in un intervallo  $I$  é l'annullarsi del determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{[n-1]}(x) & f_2^{[n-1]}(x) & f_3^{[n-1]}(x) & \dots & f_n^{[n-1]}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I$$

Infatti se, ad esempio, le  $n = 3$  funzioni sono linearmente dipendenti esistono tre coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma$  non tutti e tre nulli tali che

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I$$

come pure, derivando una prima volta

$$\alpha f_1'(x) + \beta f_2'(x) + \gamma f_3'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I$$

e una seconda volta

$$\alpha f_1''(x) + \beta f_2''(x) + \gamma f_3''(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I$$

Ne segue che il sistema lineare omogeneo nelle incognite  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{cases} \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0 \\ \alpha f_1'(x) + \beta f_2'(x) + \gamma f_3'(x) = 0 \\ \alpha f_1''(x) + \beta f_2''(x) + \gamma f_3''(x) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle e, quindi, ha il determinante dei coefficienti nullo.

## 2. Il caso omogeneo

Le equazioni

$$y^{[n]} + a_1(x) y^{[n-1]} + a_2(x) y^{[n-2]} + \dots + a_n(x) y = 0$$

con il termine noto  $\psi(x) = 0$  si dicono *equazioni lineari omogenee*<sup>1</sup>.

Il risultato piú importante riguardo alle equazioni lineari omogenee é la proprietá di spazio vettoriale posseduta dalla famiglia delle funzioni soluzione

**TEOREMA 2.1.** *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$ , omogenea*

- *costituiscono uno spazio vettoriale  $V$ ,*
- *$V$  ha dimensione finita  $n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La prima tesi é ovviamente collegata alla linearitá: siano  $u(x)$  e  $v(x)$  due soluzioni della

$$y^{[n]} + a_1(x) y^{[n-1]} + a_2(x) y^{[n-2]} + \dots + a_n(x) y = 0$$

allora sono soluzioni anche le combinazioni lineari

$$y(x) = A u(x) + B v(x), \quad \forall A, B \in R$$

quindi la famiglia delle soluzioni ha la struttura di spazio vettoriale. Il fatto che tale spazio  $V$  delle soluzioni abbia dimensione  $n$ , pari all'ordine dell'equazione differenziale discende dal teorema d'esistenza e unicitá del problema di Cauchy.

Ragioniamo, per semplicitá pensando ad  $n = 3$ : sia  $y_1(x)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{[3]} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \end{cases}$$

sia  $y_2(x)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{[3]} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ y''(x_0) = 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>In alternativa, le equazioni relative a  $\psi(x) \neq 0$  si dicono equazioni complete.

e sia  $y_3(x)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{[3]} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 1 \end{cases}$$

Le tre funzioni  $y_1, y_2, y_3$  sono linearmente indipendenti: se infatti fossero linearmente dipendenti dovrebbe riuscire, necessariamente, vedi Teorema 1.4,

$$W(x_0) = \det \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Mentre, tenuto conto dei valori presi nel punto  $x_0$  dalle tre funzioni riesce  $W(x_0) = 1$

Per concludere che  $V$  ha dimensione  $n = 3$  occorre ora riconoscere che le tre funzioni linearmente indipendenti  $y_1, y_2, y_3$  costituiscono una base di  $V$ .

Sia  $y \in V$ , cioè sia  $y$  una soluzione dell'equazione

$$y^{[3]} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

riesca

$$y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta, y''(x_0) = \gamma$$

La combinazione lineare delle tre funzioni  $y_1, y_2, y_3$  fatta tramite i tre numeri  $\alpha, \beta, \gamma$

$$u(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) + \gamma y_3(x)$$

soddisfa lo stesso problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{[3]} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \\ y''(x_0) = \gamma \end{cases}$$

soddisfatto dalla funzione funzione  $y(x)$ : il teorema di unicità implica quindi che

$$y(x) = u(x)$$

ovvero che

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) + \gamma y_3(x)$$

È stato quindi riconosciuto che le tre funzioni  $y_1, y_2, y_3$  costituiscono una base di  $V$ .

□

**TEOREMA 2.2.** *Le funzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  siano soluzioni di una stessa equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $n$ , esse sono linearmente indipendenti se e solo se esiste un punto  $x_0$  in cui riesca*

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[n-1]}(x_0) & y_2^{[n-1]}(x_0) & y_3^{[n-1]}(x_0) & \dots & y_n^{[n-1]}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sono linearmente dipendenti riesce necessariamente

$$W(x) = 0 \quad \forall x$$

Viceversa se esiste un  $x_0$  in cui riesca  $W(x_0) \neq 0$  allora le combinazioni lineari

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

generano tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea.

Infatti, sia  $Y(x)$  una soluzione dell'equazione, il sistema nelle incognite  $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) & = Y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) & = Y'(x_0) \\ \dots & = \dots \\ c_1 y_1^{[n-1]}(x_0) + c_2 y_2^{[n-1]}(x_0) + \dots + c_n y_n^{[n-1]}(x_0) & = Y^{[n-1]}(x_0) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$ . In corrispondenza ad essa riesce quindi, per il teorema di unicit a,

$$Y(x) \equiv \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x)$$

In altri termini le  $n$  funzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  costituiscono una base dello spazio vettoriale  $V$  delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $n$ , spazio che sappiamo essere di dimensione  $n$ .

Quindi le  $n$  funzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sono linearmente indipendenti.  $\square$

### 3. Equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee

$$(119) \quad y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + a_2 y^{[n-2]} + \dots + a_n y = 0$$

spesso indicate brevemente con

$$L[y] = 0$$

Soluzioni dell'equazione (119) precedente si costruiscono con il seguente algoritmo (non facile appena  $n$  superiori 3 o 4):

- si determinano le radici  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  del polinomio caratteristico associato

$$(120) \quad P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

precisando di ognuna la relativa molteplicità  $r_1, r_2, \dots, r_m$ .

- Riesce<sup>2</sup>  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$
- le  $n$  funzioni

$$\begin{array}{l} e^{\mu_1 x}, \quad x e^{\mu_1 x}, \quad \dots, x^{r_1-1} e^{\mu_1 x}, \\ e^{\mu_2 x}, \quad x e^{\mu_2 x}, \quad \dots, x^{r_2-1} e^{\mu_2 x}, \\ \dots\dots\dots \\ e^{\mu_m x}, \quad x e^{\mu_m x}, \quad \dots, x^{r_m-1} e^{\mu_m x} \end{array}$$

sono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

L'algoritmo é ovvio se il polinomio caratteristico (120) ha tutte ed  $n$  le radici distinte. É infatti evidente che

$$y = e^{\lambda x} \rightarrow L[y] = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

ed é anche credibile che le  $n$  funzioni esponenziali costruite sulle  $n$  radici siano tra loro linearmente indipendenti.

**3.1. Il caso delle radici multiple.** Sia  $\alpha$  una radice e sia  $\omega(x)$  una funzione regolare, calcoliamo il primo membro  $L[y]$  dell'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  assegnata in corrispondenza alla funzione  $y(x) = \omega(x) e^{\alpha x}$

$$L[\omega(x) e^{\alpha x}] = \sum_{k=0}^n a_k (\omega(x) e^{\alpha x})^{[k]}$$

tenuto conto che

$$(\omega(x) e^{\alpha x})^{[k]} = e^{\alpha x} \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \omega(x)^{[h]} \alpha^{k-h}$$

---

<sup>2</sup> Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio a coefficienti reali di grado  $n$  possiede, nel campo complesso, soluzioni la cui somma delle molteplicità coincide col grado  $n$  del polinomio

riesce

$$L[\omega(x) e^{\alpha x}] = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^k a_k \binom{k}{h} \omega(x)^{[h]} \alpha^{k-h}$$

Tenuto conto inoltre che, vedi Figura 1, qualsiasi siano gli addendi riesce

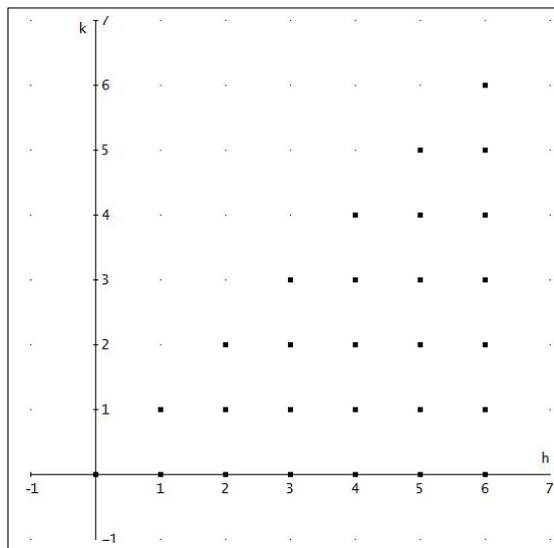


FIGURA 1.  $\sum_{k=0}^6 \sum_{h=0}^k = \sum_{h=0}^6 \sum_{k=h}^6$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^k = \sum_{h=0}^n \sum_{k=h}^n$$

si ha

$$L[\omega(x) e^{\alpha x}] = e^{\alpha x} \sum_{h=0}^n \frac{\omega(x)^{[h]}}{h!} \sum_{k=h}^n a_k k(k-1)\dots(k-h+1) \alpha^{k-h}$$

ovvero

$$(121) \quad L[\omega(x) e^{\alpha x}] = e^{\alpha x} \sum_{h=0}^n \frac{\omega(x)^{[h]} P^{[h]}(\alpha)}{h!}.$$

Guardando la (121) si riconosce che sono soluzioni dell'equazione

$$L[y] = 0$$

tutte le funzioni  $\omega(x) e^{\alpha x}$  per le quali risultino nulli gli addendi che compaiono nella sommatoria a secondo membro della (121):

- $P(\alpha)\omega(x) = 0 \iff P(\alpha) = 0$
- $P'(\alpha)\omega'(x) = 0 \iff P'(\alpha) = 0$  oppure  $\omega'(x) = 0$

- $P''(\alpha)\omega''(x) = 0 \Leftrightarrow P''(\alpha) = 0$  oppure  $\omega''(x) = 0$
- ecc.

In altri termini se  $\alpha$  é una radice multipla di ordine  $r$  del polinomio (120) allora oltre ad annullare il polinomio annulla le derivate

$$P', \quad P'', \dots, P^{[r-1]}$$

quindi la funzione

$$e^{\alpha x}\omega(x) : \quad \omega(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{r-1}x^{r-1}$$

soddisfa l'equazione omogenea: infatti

- i primi  $r - 1$  addendi della sommatoria (121) sono nulli perché sono nulli  $P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{[r-1]}(\alpha)$
- gli addendi successivi sono nulli perché sono nulle le derivate di ordine  $\geq r$  di  $\omega(x)$ , polinomio di grado  $r - 1$ .

**3.2. Soluzioni reali o complesse ?** La costruzione delle soluzioni dell'equazione omogenea mediante esponenziali

$$e^{\alpha x}$$

con  $\alpha$  radici del polinomio (120) espone al rischio di dover involontariamente lavorare con funzioni complesse.

Si tratta di un rischio apparente:

- se  $\alpha = \gamma + i\mu$  é una radice complessa, il polinomio (120) possiede ANCHE (riflettete sul motivo) l'altra radice  $\beta = \gamma - i\mu$
- quindi insieme alla soluzione

$$y_1(x) = e^{\gamma x} (\cos(\mu x) + i \sin(\mu x))$$

troviamo anche la soluzione

$$y_2(x) = e^{\gamma x} (\cos(\mu x) - i \sin(\mu x))$$

- possiamo SENZA PERDERE NULLA sostituire le due soluzioni complesse  $y_1(x), y_2(x)$  con le altre due, reali,

$$e^{\gamma x} \cos(\mu x), \quad e^{\gamma x} \sin(\mu x)$$

altrettanto indipendenti.

**3.3. La indipendenza...** Non abbiamo, né lo faremo, verificato che le  $n$  soluzioni, teoricamente costruibili tramite le radici del polinomio (120), siano linearmente indipendenti:

- se le radici sono tutte distinte il risultato é quasi evidente: una somma di esponenziali diversi

$$\sum_{k=1}^n c_k e^{\alpha_k x} \equiv 0$$

non può avere somma identicamente nulla a meno che non siano nulli tutti i coefficienti.

Si pensi ad esempio a una sommetta banale: se fosse

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in R$$

raccogliendo a fattor comune  $e^x$  si avrebbe anche  $c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} = 0$ , poi si fa tendere ad esempio  $x \rightarrow -\infty$  e si scopre che  $c_1 = 0$ , con trucchi analoghi si scopre che anche  $c_2 = 0$  e così via...

- se le radici non sono tutte distinte il risultato é ancora vero ma é meno evidente...
- si può comunque sempre ricorrere al Teorema 2.2.

#### 4. Non omogenee a coefficienti costanti

La determinazione di una soluzione di un'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti si può ottenere, in alcuni casi particolari in modo artigianale, per tentativi servendosi di pacchetti di funzioni molto comuni.

I casi di termine noto  $f(x)$  particolare che suggeriscono tali tentativi sono:

- (1) potenze  $x^m$
- (2) esponenziali  $e^{\lambda x}$
- (3) funzioni trigonometriche  $\sin(\omega x)$ ,  $\cos(\omega x)$
- (4) prodotti  $x^m e^{\lambda x}$
- (5) prodotti  $x^m \sin(\omega x)$ ,  $x^m \cos(\omega x)$

I pacchetti di funzioni nell'ambito dei quali cercare una soluzione dell'equazione completa sono, naturalmente in corrispondenza ai casi particolari indicati,

- (1) polinomi di grado  $m$  stesso, o in caso di fallimento, di grado maggiore,
- (2) funzioni  $A e^{\lambda x}$  determinando giudiziosamente la costante  $A$ , o, in caso di fallimento, funzioni del tipo  $A x e^{\lambda x}$  e così via aumentando il grado del polinomio usato,
- (3) funzioni  $A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$  o, in caso di fallimento  $x [A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)]$  e così via aumentando il grado del polinomio usato,
- (4) funzioni  $P(x) e^{\lambda x}$  con  $P(x)$  polinomio di grado  $m$  o superiore in caso di fallimento,
- (5) funzioni  $P(x) \sin(\omega x)$ ,  $P(x) \cos(\omega x)$  con  $P(x)$  polinomio di grado  $m$  o superiore in caso di fallimento.

### 5. Equazioni omogenee di Eulero

Sono equazioni lineari a coefficienti variabili di tipo.... molto particolare

$$(122) \quad x^n y^{[n]} + a_1 x^{n-1} y^{[n-1]} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

Soluzioni si possono trovare sotto forma di potenze  $y(x) = x^\lambda$ : sostituendo infatti (lavorando, solo per semplicità con  $n = 2$ ) si ha

$$x^2 \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda x^2 + a_2 x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

equazione di secondo grado in  $\lambda$ .

Il seguito è evidente, almeno se l'equazione ha radici reali distinte  $\lambda, \mu \dots$

l'integrale generale è

$$y(x) = a x^\lambda + b x^\mu.$$

OSSERVAZIONE 5.1. *Chi ritenesse l'equazione (122) troppo particolare per figurare come prototipo meritevole di segnalazione pensi che di equazioni lineari a coefficienti variabili se ne integrano talmente poche... che anche una superparticolare merita apprezzamento !*

## 6. Equazioni lineari non omogenee

$$(123) \quad y^{[n]} + a_1(x) y^{[n-1]} + a_2(x) y^{[n-2]} + \dots + a_n(x) y = \phi(x)$$

Esistono i seguenti risultati (ovvi ma importanti):

- (1) siano  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  due qualunque soluzioni della precedente equazione differenziale lineare completa (123), la loro differenza  $y_1(x) - y_2(x)$  é soluzione dell'equazione omogenea associata alla (123).

Infatti indicata la (123) con

$$L[y] = \phi(x)$$

riesce

$$L[y_1(x) - y_2(x)] = L[y_1(x)] - L[y_2(x)] = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

- (2) Viceversa sia  $y_1(x)$  una soluzione della precedente equazione differenziale lineare completa (123), e sia  $\varphi(x)$  una qualunque soluzione dell'equazione omogenea associata alla (123) allora

$$y_1(x) + \varphi(x)$$

é ancora soluzione dell'equazione completa (123)

Infatti

$$L[y_1(x) + \varphi(x)] = L[y_1(x)] + L[\varphi(x)] = \phi(x) + 0 = \phi(x)$$

Ne segue il seguente

**TEOREMA 6.1.** *Tutte le soluzioni dell'equazione (123) sono date dalle somme*

$$(124) \quad y(x) = \bar{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

essendo  $\bar{y}(x)$  una (qualsiasi) soluzione dell'equazione completa (123),  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$   $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (123) e  $c_1, c_2, \dots, c_n$   $n$  costanti arbitrarie.

**TEOREMA 6.2.** *Conosciute  $n$  soluzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (123) e una (qualsiasi) soluzione  $\bar{y}(x)$  dell'equazione completa (123), é possibile risolvere, risolvendo un sistema lineare, qualsiasi problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{[n]} + a_1(x) y^{[n-1]} + a_2(x) y^{[n-2]} + \dots + a_n(x) y = \phi(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{[n-1]}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La soluzione del problema di Cauchy sarà espressa tramite la (124) scegliendo le  $n$  costanti in modo da soddisfare le condizioni iniziali assegnate

$$(125) \quad \begin{aligned} \bar{y}(x_0) + c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ \bar{y}'(x_0) + c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= y_1 \\ \dots &= \dots \\ \bar{y}^{[n-1]}(x_0) + c_1 y_1^{[n-1]}(x_0) + c_2 y_2^{[n-1]}(x_0) + \dots + c_n y_n^{[n-1]}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Il precedente sistema nelle incognite  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ha come matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[n-1]}(x_0) & y_2^{[n-1]}(x_0) & \dots & y_n^{[n-1]}(x_0) \end{pmatrix}$$

che, proprio in quanto le  $n$  funzioni  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sono soluzioni linearmente indipendenti di una stessa equazione lineare omogenea, ha determinante diverso da 0.

Il sistema (125) ha pertanto una ed una sola soluzione per il teorema di Cramer sui sistemi lineari.

□

**6.1. La variazione delle costanti.** Esiste il seguente risultato generale:

*se conosciamo  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (123) allora una soluzione dell'equazione completa (123) si determina mediante il calcolo di un integrale.*

Il metodo con cui si ottiene il risultato enunciato ha, da secoli, l'assurdo nome di

*metodo della variazione delle costanti*

o **Method of Variation of Parameters** nell'inglese di COURANT, pag. 691, in fondo.

Illustriamo tale metodo nel caso, relativamente semplice, di  $n = 2$ : la determinazione di una funzione che soddisfi l'equazione completa

$$(126) \quad y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

a partire dalla conoscenza di due funzioni  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  linearmente indipendenti che soddisfino l'equazione omogenea associata

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Ci muoviamo in analogia a quanto fatto per le equazioni del primo ordine nelle quali soluzioni dell'equazione completa  $y' + a(x)y = b(x)$  si cercavano nella forma  $y(x) = H(x)y_0(x)$  essendo  $y_0(x) = e^{-\int a(t)dt}$

Nel caso  $n = 2$  proposto cerchiamo soluzioni dell'equazione (126) **completa** nella forma

$$(127) \quad y(x) = h_1(x)y_1(x) + h_2(x)y_2(x)$$

nella quale i due coefficienti  $h_1(x)$  e  $h_2(x)$  hanno il ruolo di

*variazione delle costanti  $c_1$  e  $c_2$*

che incontravamo quando si dovevano trovare tutte le soluzioni dell'equazione **omogenea**.

Scegliamo  $h_1(x)$  e  $h_2(x)$  tali che le loro derivate  $h'_1$  e  $h'_2$  soddisfino il sistema lineare

$$\begin{cases} h'_1 y_1 + h'_2 y_2 = 0 \\ h'_1 y'_1 + h'_2 y'_2 = f(x) \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di due equazioni in due incognite certamente risolubile in quanto il determinante dei coefficienti

$$\det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dalla formula di Cramer si ha pertanto

$$h'_1(x) = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}, \quad h'_2(x) = \frac{\det \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}$$

Naturalmente conosciute le espressioni di  $h'_1$  e di  $h'_2$  occorre poter ricavare  $h_1$  e  $h_2$ , eseguire cioè due integrazioni:

$$\begin{cases} h_1(x) = c_1 + \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}} f(t) dt \\ h_2(x) = c_2 + \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}} f(t) dt \end{cases}$$

La  $y(x)$  della (127), costruita mediante i coefficienti  $h_1(x)$  e  $h_2(x)$  precedenti verifica l'equazione completa come si riconosce preparandosi le derivate

$$y'(x) = h_1 y_1' + h_2 y_2', \quad y''(x) = h_1 y_1'' + h_2 y_2'' + f(x)$$

e sostituendo nell'equazione  $y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ .

La formula risolutiva, cioè l'integrale generale dell'equazione non omogenea (126), é pertanto la seguente

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t) dt$$

ESEMPIO 6.3. Cerchiamo soluzioni dell'equazione completa

$$y'' + y = f(x)$$

- due soluzioni dell'omogenea sono  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$
- Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$y(x) = h_1(x) \sin(x) + h_2(x) \cos(x)$$

- Il sistema che devono soddisfare le due derivate  $h_1'$  e  $h_2'$  é il seguente

$$\begin{cases} h_1'(x) \sin(x) + h_2'(x) \cos(x) = 0 \\ h_1'(x) \cos(x) - h_2'(x) \sin(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1'(x) = f(x) \cos(x) \\ h_2'(x) = -f(x) \sin(x) \end{cases}$$

- La funzione  $y(x)$  che soddisfa l'equazione completa é pertanto

$$\bar{y}(x) = \sin(x) \int_{x_0}^x f(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_{x_0}^x f(t) \sin(t) dt$$

- funzione che puó scriversi piú elegantemente come

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^x f(t) \sin(x-t) dt$$

- tutte le soluzioni dell'equazione completa  $y'' + y = f(x)$  sono pertanto

$$y(x) = A \sin(x) + B \cos(x) + \int f(t) \sin(x-t) dt \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

Si noti l'uso dell'integrale indefinito, uso grossolano... ma giusto...!

**6.2. Il caso  $n > 2$ .** Il caso di equazioni lineari complete di ordine  $n > 2$

$$y^{[n]} + a_1(x) y^{[n-1]} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

ha una trattazione del tutto analoga alla precedente relativa ad  $n = 2$  :  
supposto di conoscere  $n$  soluzioni dell'omogenea

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

linearmente indipendenti, le funzioni

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[n-2]}(t) & \dots & y_n^{[n-2]}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[n-2]}(t) & \dots & y_n^{[n-2]}(t) \\ y_1^{[n-1]}(t) & \dots & y_n^{[n-1]}(t) \end{vmatrix}} f(t) dt$$

sono tutte le soluzioni dell'equazione completa.



## A cosa servono le serie di potenze ?

### 1. Introduzione

La serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

rappresenta la funzione

$$\frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Solo un ingenuo può ritenere utile, interessante o vantaggioso un tale sforzo per rappresentare una funzione razionale tanto semplice.

Quindi la serie geometrica e le serie di potenze in generale devono soddisfare qualche altra esigenza.

Le serie di potenze sono un algoritmo tramite il quale costruire funzioni che soddisfino a requisiti particolari, quasi sempre equazioni differenziali.

Il procedimento che si segue è generalmente fatto di due passi

- si costruisce formalmente una serie di potenze prendendo i suoi coefficienti in modo da soddisfare l'equazione differenziale,
- si controlla che tale scelta dei coefficienti determini una serie convergente, che si possa quindi parlare della funzione da essa definita.

### 2. Un'equazione differenziale semplicissima

Trovare una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = y$$

- Costruzione formale di una serie di potenze che soddisfi quella equazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ovvero

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

ovvero ancora, uguagliando a primo e a secondo membro i coefficienti delle stesse potenze di  $x$

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad \dots, \quad ka_k = a_{k-1}$$

relazioni che corrispondono, a conti fatti a prendere

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_0}{3!}, \quad a_k = \frac{a_0}{k!}, \dots$$

- La serie di potenze formalmente costruita é pertanto

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

essa converge ?

Se la risposta é SI allora abbiamo costruito una funzione che soddisfa l'equazione differenziale assegnata <sup>1</sup> !

### 3. Un'equazione lineare del second'ordine

La seguente equazione differenziale <sup>2</sup>

$$(128) \quad y'' - x y = 0$$

lineare del second'ordine, a coefficienti non costanti non ha soluzioni particolarmente semplici: proviamo a costruire una soluzione, in un intorno  $I$  dell'origine, sotto forma di serie di potenze

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Derivando e sostituendo formalmente nella (128) si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0, \quad \forall x \in I$$

ovvero

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots - a_0 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 \dots = 0$$

<sup>1</sup>La libertà rimasta nella scelta di  $a_0$  corrisponde alla possibilità di soddisfare, insieme all'equazione differenziale, una condizione iniziale: ad esempio se volessimo  $y(0) = 17$  basterebbe scegliere  $a_0 = 17$

<sup>2</sup>cfr. SMIRNOV, Vol. II, Cap. II, Esempio II.2.2

da cui, annullando i coefficienti di ciascuna potenza di  $x$  si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 = a_0 \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 = a_1 \\ \dots \quad \dots \\ k(k-1)a_k = a_{k-3} \\ \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

La condizione  $a_2 = 0$  e il legame che lega ogni termine  $a_k$  a quello  $a_{k-3}$  permette di riconoscere il necessario annullamento non solo di  $a_2$  ma anche di  $a_5, a_8, a_{11}, \dots$

Tutti gli altri coefficienti dipendono dai valori dati ai primi due  $a_0$  e  $a_1$ .

Prendiamo, in prima scelta  $a_0 = 1, a_1 = 0$  ne segue

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\ a_7 &= 0 \\ a_8 &= 0 \\ a_9 &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Calcoliamo con *Mathematica* qualche coefficiente in piú

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6} &= 0.166667 \\ a_6 &= \frac{1}{180} &= 0.00555556 \\ a_9 &= \frac{1}{12960} &= 0.0000771605 \\ a_{12} &= \frac{1}{1710720} &= 5.84549 \cdot 10^{-7} \\ a_{15} &= \frac{1}{359251200} &= 2.78357 \cdot 10^{-9} \\ a_{18} &= \frac{1}{109930867200} &= 9.09663 \cdot 10^{-12} \\ a_{21} &= \frac{1}{46170964224000} &= 2.16586 \cdot 10^{-14} \\ a_{24} &= \frac{1}{25486372251648000} &= 3.92367 \cdot 10^{-17} \end{aligned}$$

Se riuscissimo a riconoscere che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.4.7\dots(3k-2)}{(3k)!} x^{3k}$$

converge in un intervallo  $I = (-R, R)$  con  $R > 0$  potremmo affermare che la funzione, vedi Figura 1,

$$(129) \quad y_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.4.7\dots(3k-2)}{(3k)!} x^{3k} \quad |x| < R$$

é soluzione dell'equazione differenziale (128).

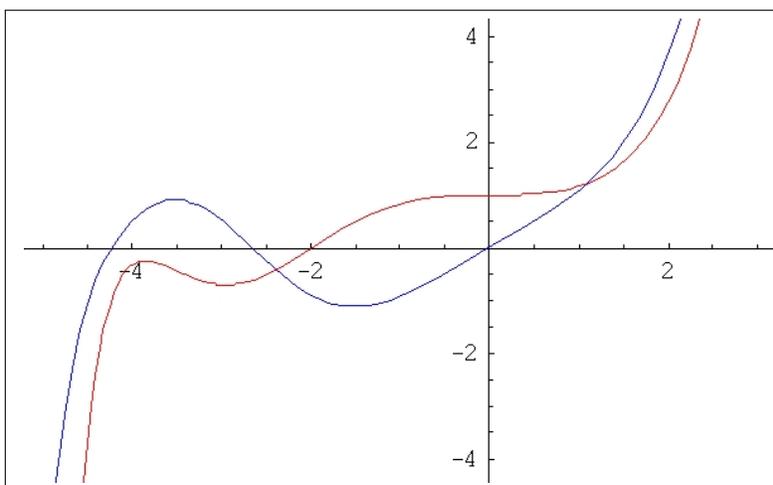


FIGURA 1. I grafici delle  $y_0(x)$  in rosso e  $y_1(x)$  in blue.

Prendiamo, ora in seconda scelta, coefficienti che chiamiamo, per distinguerli dai precedenti,  $b_n$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

ne segue

$$b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = \frac{1}{3.4}, b_5 = 0, a_6 = 0, b_7 = \frac{1}{3.4.6.7} \dots$$

riuscendo in generale

$$b_{3k+1} = \frac{2.5.8\dots(3k-1)}{(3k+1)!}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 &= 1. \\
b_4 &= \frac{1}{12} &= 0.0833333 \\
b_7 &= \frac{1}{504} &= 0.00198413 \\
b_{10} &= \frac{1}{45360} &= 0.0000220459 \\
b_{13} &= \frac{1}{7076160} &= 1.4132 \cdot 10^{-7} \\
b_{16} &= \frac{1}{1698278400} &= 5.88832 \cdot 10^{-10}
\end{aligned}$$

La funzione da essi definita mediante la serie é quindi

$$(130) \quad y_1(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

il suo grafico é riportato, in blue, ancora in Figura 1.

### 3.1. Un risultato fondamentale.

L'algoritmo con cui a fronte dell'equazione differenziale  $y'' - xy = 0$  abbiamo costruito le due serie di potenze (129) e (130), si può adattare ad equazioni anche piú generali

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

essendo  $P(x)$  e  $Q(x)$  polinomi assegnati.

Si possono costruire due serie di potenze e si può dimostrare che il loro intervallo di convergenza é...

*tutto l'asse reale !*

**OSSERVAZIONE 3.1.** *Le due soluzioni  $y_0(x)$  e  $y_1(x)$  trovate come somme di serie di potenze per l'equazione  $y'' - xy = 0$  sono linearmente indipendenti (basta eseguire il test d'indipendenza nell'origine...) e quindi producono, con le loro combinazioni lineari*

$$A y_0(x) + B y_1(x)$$

*tutte le soluzioni dell'equazione omogenea.*

*Notate, guardando i grafici di Figura 1, come i grafici delle due funzioni si intersechino ma non siano mai tangenti nei punti di intersezione (teorema d'unicità...).*

#### 4. La serie binomiale

Tra le serie offerte dalla formula di Taylor é una delle piú importanti e utili: ne vedremo ora una costruzione alternativa ottenuta pensando alla risoluzione di un'equazione differenziale (cfr. Vol. I pag. 547)

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \Rightarrow (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Cerchiamo una serie di potenze che soddisfi l'equazione

$$(131) \quad (1+x)y' = \alpha y$$

sia

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

la serie: sostituendo nell'equazione (131) si ha

$$(1+x) \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

da cui

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + \dots - \alpha c_0 - \alpha c_1 x - \alpha c_2 x^2 \dots = 0$$

Raccogliendo i coefficienti della stessa potenza di  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} c_1 - \alpha c_0 &= 0 \\ 2c_2 + c_1 - \alpha c_1 &= 0 \\ 3c_3 + 2c_2 - \alpha c_3 &= 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha c_0 \\ c_2 &= \frac{\alpha-1}{2} c_1 \\ c_3 &= \frac{\alpha-2}{3} c_2 \end{aligned}$$

Scelto, ad esempio  $c_0 = 1$  si hanno i seguenti valori

$$c_k = \frac{\alpha - k + 1}{k} c_{k-1}, \quad \Rightarrow c_k = \frac{\prod_{h=0}^{k-1} (\alpha - h)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

Riassumendo: una serie di potenze (formale) che soddisfi l'equazione (131) é la seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Qual'é il suo raggio di convergenza ?

Con il criterio del rapporto si cerca

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\binom{\alpha}{k+1}|}{|\binom{\alpha}{k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - k|}{k+1} = 1$$

Quindi la serie

$$(132) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

ha raggio di convergenza  $R = 1$ .

Quindi la somma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

- é definita in  $(-1, 1)$
- é continua
- é derivabile  $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}$
- soddisfa, in  $(-1, 1)$  l'equazione differenziale (131).

**4.1. Se  $\alpha = n \in \mathbf{N}$ :** Nel caso  $\alpha$  intero positivo la serie (132) si riduce a un polinomio...

Il raggio di convergenza é naturalmente infinito.

**4.2. Un problema di unicita.** La funzione  $f(x)$  espressa dalla serie (132) é la funzione

$$(1+x)^\alpha$$

che conoscevamo ?

Sí: consideriamo il quoziente per  $x \in (-1, 1)$

$$\left( \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0$$

avendo tenuto conto che  $f(x)$  verifica l'equazione (131), quindi tale quoziente é costante in  $(-1, 1)$ . Nel punto  $x = 0$  tale quoziente vale 1, quindi vale 1 in tutto  $(-1, 1)$ , quindi

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \forall x \in (-1, 1)$$

### 4.3. Alcune serie binomiali importanti.

- il caso  $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

- il caso  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \dots$$

- il caso  $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \dots$$

Notate che vengono serie a termini di segno alterno...!

ESEMPIO 4.1. Consideriamo la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\vartheta)}}$$

per  $k^2 = 1/2$ : le sue approssimazioni binomiali sono, vedi Figura(2),

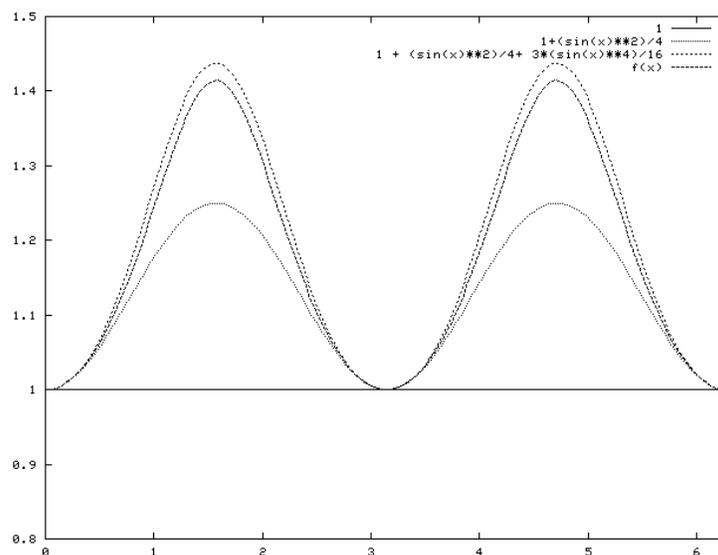


FIGURA 2.  $\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta)/2}}$ ,  $1$ ,  $1 + \frac{1}{4} \sin^2(\vartheta)$ ,  $1 + \frac{1}{4} \sin^2(\vartheta) + \frac{3}{16} \sin^4(\vartheta)$

- (1)  $1$
- (2)  $1 + \frac{1}{4} \sin^2(\vartheta)$
- (3)  $1 + \frac{1}{4} \sin^2(\vartheta) + \frac{3}{16} \sin^4(\vartheta)$
- (4) ecc.

## 5. Il calcolo di un integrale

Il seguente integrale prende il nome di integrale ellittico<sup>3</sup>

La funzione

$$F(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}}, \quad m^2 < 1$$

<sup>3</sup>Le funzioni ellittiche sono importanti funzioni complesse di una variabile complessa, spesso collegate a fenomeni periodici, cfr. SMIRNOV, Cours de Mathematiques Superieures, Vol. III, Cap. VI, § 4

si chiama *integrale ellittico di prima specie*.

Il caso particolare  $\varphi = \pi/2$

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}}, \quad m^2 < 1$$

ha il nome di *integrale ellittico completo*.

La  $F(\varphi, m)$  é implementata ad esempio nel software *Mathematica* con il nome *EllipticF*( $\varphi, m$ ).

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}}, \quad m^2 < 1$$

Forti della cultura relativa alla serie binomiale abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}} = 1 - \frac{1}{2}(-m^2 \sin^2(\psi)) + \frac{1.3}{2.4}(-m^2 \sin^2(\psi))^2 + \dots$$

ovvero,

$$(133) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}} = 1 + m^2 \frac{1}{2} \sin^2(\psi) + m^4 \frac{1.3}{2.4} \sin^4(\psi) + \dots$$

Tenuto presente che:

- la serie binomiale (della quale ci stiamo servendo) ha raggio di convergenza  $R = 1$
- i valori  $x$  sui quali la stiamo calcolando sono  $-m^2 \sin^2(\psi)$ , numeri appartenenti all'intervallo  $[-m^2, 0] \subset (-1, 1)$
- quindi la serie (133) é convergente uniformemente,
- quindi

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} 1 d\psi + m^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\psi) d\psi + m^4 \frac{1.3}{2.4} \int_0^{\pi/2} \sin^4(\psi) d\psi + \dots$$

•

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(\psi) d\psi &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i} \right)^{2m} d\psi = \\ &= \frac{1}{2^{2m} (-1)^m} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-1)^k \int_0^{\pi/2} e^{2(m-k)i\psi} d\psi = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si ricava l'espressione di  $K$  in serie

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1.3}{2.4} \right)^2 k^4 + \dots \right\}$$

**5.1. Il periodo del pendolo.** L'estremo di un pendolo di lunghezza  $L$  descrive un arco di circonferenza di raggio  $L$  e quindi ha equazioni parametriche

$$x = L \sin(\theta), \quad y = -L \cos(\theta)$$

essendo  $\theta$  l'angolo sulla verticale (non abbiamo detto come  $\theta$  vari nel tempo...).

Lasciato cadere il pendolo dall'angolo, sulla verticale,  $\theta_0$  con velocità nulla, supponendo che non ci siano attriti di sorta, si formano oscillazioni periodiche fra  $\theta_0$  e  $-\theta_0$  di periodo (cfr. Vol. I, pag 410 e precedenti...)

$$(134) \quad T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

Tenuto conto che

$$\cos(\theta) - \cos(\theta_0) = \frac{1}{2} \left( \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

servendosi della sostituzione

$$u = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}, \quad \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \Rightarrow u \in [-1, 1]$$

l'integrale (134) si trasforma in

$$(135) \quad T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2 \sin^2(\frac{\theta_0}{2}))}}$$

L'ulteriore sostituzione  $u = \sin(\psi)$  conduce a

$$(136) \quad T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}}, \quad k^2 = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

che, a parte il fattore a moltiplicare, é l'integrale del quale ci siamo occupati precedentemente.

La tradizionale dichiarazione per il periodo del pendolo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

corrisponde a ritenere

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} \simeq \frac{\pi}{2}$$

che, tenuto conto che  $k^2 = \sin^2(\frac{\theta_0}{2})$  corrisponde alla classica precisazione circa le *piccole oscillazioni*...

La tabella seguente, relativa a  $4\sqrt{\frac{L}{g}} = 1$ , mostra il divario tra il periodo approssimato come  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  e quello calcolato con maggiore precisione, in corrispondenza a diversi valori iniziali:

$\theta_0 = 30^\circ$	$T = 1.69056$
$\theta_0 = 60^\circ$	$T = 1.85407$
$\theta_0 = 90^\circ$	$T = 2.08597$

Il valore  $T$  fornito dall'approssimazione relativa alle piccole oscillazioni é invece solamente 1.5708

### 6. Le equazioni differenziali di Bessel

Le configurazioni di vibrazione di una membrana circolare di raggio 1 fissata al bordo, si pensi ad un tamburo, raggiunte in seguito a vibrazioni conducono <sup>4</sup> all'equazione differenziale di Laplace

$$(137) \quad \Delta v(x, y) = -\lambda v(x, y), \quad v(x, y) = 0 \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 = 1$$

intendendo con  $v(x, y)$  la quota raggiunta dalla membrana in corrispondenza al punto  $(x, y)$  e con  $\Delta v(x, y) = v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)$ .

Espressa  $v(x, y)$  in coordinate polari, l'equazione di Laplace diventa

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta} = -\lambda v$$

Se cerchiamo la  $v$  nella forma

$$v(r, \vartheta) = f(r) \cdot g(\vartheta)$$

si arriva alla formula

$$f'' \cdot g + \frac{1}{r}f' \cdot g + \frac{1}{r^2}f \cdot g'' = -\lambda f \cdot g$$

ovvero

$$\left( f'' + \frac{1}{r}f' + \lambda f \right) g = -\frac{1}{r^2}f \cdot g''$$

ovvero ancora

$$r^2 \frac{(f'' + \frac{1}{r}f' + \lambda f)}{f} = -\frac{g''}{g}$$

Tenuto conto che il primo membro dipende da  $r$  e il secondo da  $\vartheta$  la loro uguaglianza implica che siano entrambi uguali alla stessa costante. Le uniche funzioni periodiche di periodo  $2\pi$  che rendano costante il

quoziente a secondo membro sono  $\sin(n\vartheta)$  e  $\cos(n\vartheta)$  con  $n$  intero.

Quindi il quoziente a secondo membro vale  $n^2$ .

Ci sono funzioni  $f(r)$  che verifichino l'equazione

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \lambda f = \frac{n^2}{r^2} f$$

ovvero

$$(138) \quad f'' + \frac{1}{r} f' + (\lambda - n^2 \frac{1}{r^2}) f = 0 \quad ?$$

L'equazione può essere riscritta, cambiando variabile  $\rho = r\sqrt{\lambda}$  e avendo tenuto conto che

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{d\rho},$$

nella forma

$$y_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} y_{\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) y = 0$$

ovvero

$$(139) \quad \rho^2 y_{\rho\rho} + \rho y_{\rho} + (\rho^2 - n^2) y = 0$$

detta equazione di Bessel.

Proviamo a risolvere l'equazione (139) con una serie di potenze che cominci con la potenza  $n$ -esima

$$y(\rho) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rho^k$$

sostituendo formalmente si ha

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) a_k \rho^k + \sum_{k=n}^{\infty} k a_k \rho^k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rho^{k+2} - n^2 \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rho^k = 0$$

Raccogliendo i coefficienti delle stesse potenze di  $\rho$  si ottiene:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \{(k^2 - n^2) a_k \rho^k + a_k \rho^{k+2}\} = 0$$

ecc.

Risulta abbastanza evidente il legame tra i coefficienti  $a_k$  con indice della stessa parità:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2 - n^2}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 \\
a_{n+1} &= 0 \quad \text{essendo} \quad a_{n-1} = 0 \\
a_{n+2} &= -\frac{1}{2(2n+2)} \\
a_{n+3} &= 0 \\
a_{n+4} &= \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)} \\
a_{n+5} &= 0 \\
a_{n+6} &= -\frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)6(2n+6)}
\end{aligned}$$

La serie di potenze che sta nascendo é pertanto, la seguente

$$\begin{aligned}
\rho^n - \frac{1}{2(2n+2)}\rho^{n+2} + \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)}\rho^{n+4} \\
- \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)6(2n+6)}\rho^{n+6} + \dots
\end{aligned}$$

ovvero

$$\rho^n \left\{ 1 - \frac{1}{2(2n+2)}\rho^2 + \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)}\rho^4 + \dots \right\}$$

tutti termini della stessa paritá di  $n$

Per accettare tale serie formale come una funzione  $J_n(\rho)$  legittima occorre decidere se converge ovvero per quali  $\rho$  sia convergente.

Una semplicissima applicazione del criterio del rapporto conduce a

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{\rho^{2k}}{2^2 4^2 \dots (2k)^2}}{\frac{\rho^{2k-2}}{2^2 4^2 \dots (2k-2)^2}} = \frac{\rho^2}{(2k)^2} \rightarrow 0, \quad \forall \rho$$

Quindi le funzioni  $J_n(\rho)$  sono funzioni  $C^\infty$  definite per ogni  $\rho$

Nel caso  $n = 0$  l'espressione (formale) é

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{1}{2^2}\rho^2 + \frac{1}{2^2 4^2}\rho^4 + \dots$$

Le soluzioni della equazione (138) sono pertanto

$$f(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

Per quali  $\lambda$  riesca  $f(1) = 0$  conduce a determinare i  $\lambda$  per i quali riesca

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$$

**Conclusion:** se  $J_n(k_n) = 0$  allora le funzioni

$$y_{n,k_n}(r, \vartheta) = J_n(k_n r) [A \cos(n\vartheta) + B \sin(n\vartheta)]$$

verificano l'equazione

$$\Delta v = -k_n^2 v$$

**6.1. Un po' di disegni.** Scegliamo  $n = 0$ ,  $n = 1$  i grafici di  $J_0(\rho)$  e di  $J_1(\rho)$  sono riportati in Figura 3.

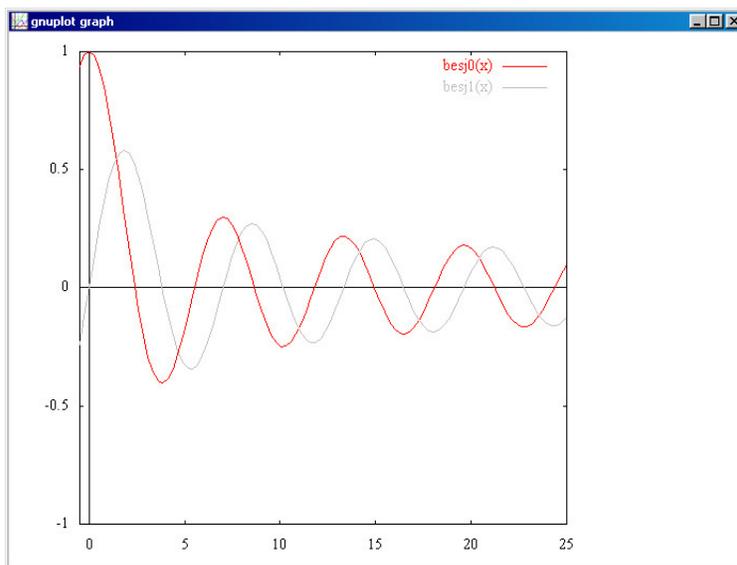


FIGURA 3.  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$

I primi 3 zeri della funzione  $J_0(\rho)$  sono, calcolati da *Mathematica*,

$$\{2.40483, 5.52008, 8.65373\},$$

quindi le funzioni

$$J_0(2.40483\rho), \quad J_0(5.52008\rho), \quad J_0(8.65373\rho)$$

soddisfano l'equazione (137).

I loro grafici sono riportati nelle figure 4 e 5

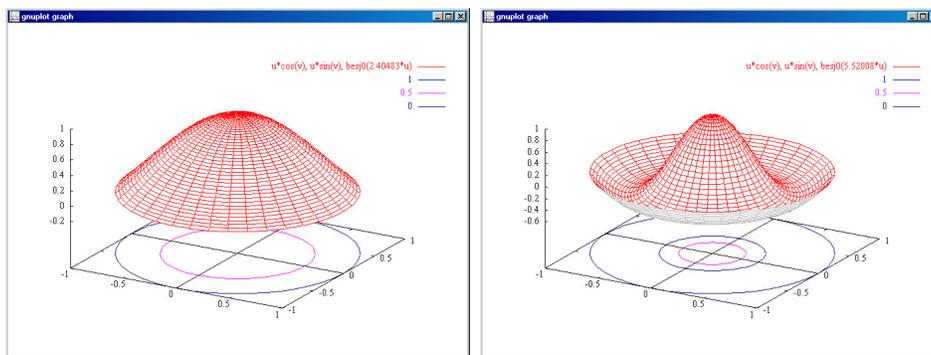
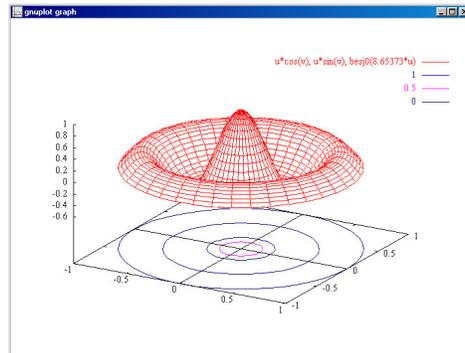


FIGURA 4.  $J_0(2.40483\rho)$ ,  $J_0(5.52008\rho)$

FIGURA 5.  $J_0(8.65373\rho)$ 

I primi tre zeri della funzione  $J_1(\rho)$  sono

$$3.83171, \quad 7.01559, \quad 10.1735$$

quindi le funzioni

$$\begin{aligned} &J_1(3.83171\rho) \cos(\theta) \\ &J_1(7.01559\rho) \cos(\theta) \\ &J_1(10.1735\rho) \cos(\theta) \end{aligned}$$

soddisfano l'equazione (137).

I grafici sono riportati nelle figure (6) e (7), Altre 3 funzioni si ottengono naturalmente moltiplicando per  $\sin(\theta)$ .

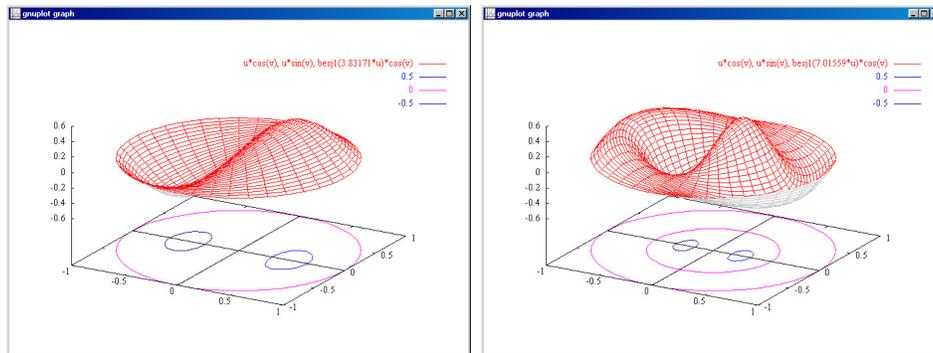


FIGURA 6. Le configurazioni del tamburo:  
 $J_1(3.83171\rho) \cos(\theta), \quad J_1(7.01559\rho) \cos(\theta)$

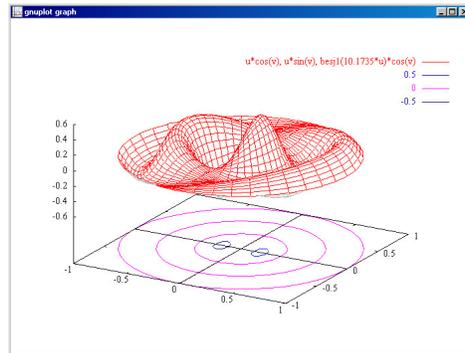


FIGURA 7. Altre configurazioni del tamburo:  $J_1(10.1735\rho) \cos(\theta)$

## Le equazioni autonome

### 1. Introduzione

Le equazioni differenziali

$$(140) \quad y' = f(y)$$

$f \in C^1(I)$ ,  $I$  intervallo dell'asse reale, spesso coincidente con tutto  $\mathbb{R}$ , si dicono AUTONOME.

La differenza con il caso generale  $y' = f(t, y)$  consiste nel fatto che la funzione a secondo membro nelle equazioni autonome non dipenda dalla variabile  $t$ .<sup>1</sup>

### 2. Un approccio formale

Scritta l'equazione (140) con la notazione

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{f(y)} = dt$$

si ottiene integrando

$$(141) \quad \int \frac{1}{f(y)} dy = \int dt \quad \rightarrow \quad F(y) = t + c$$

essendo  $F(y)$  una primitiva di  $1/f(y)$ .

Ogni funzione implicita  $y(t)$  dedotta dalla (141)

$$F[y(t)] - t + c = 0$$

ha come derivata

$$y'(t) = \frac{1}{F'[y]} = f(y)$$

e quindi risolve l'equazione (140).

**Riassumendo:** soluzioni della (140) si producono con due passaggi

- un'integrazione  $\int \frac{1}{f(y)} dy$
- una *esplicitazione*

---

<sup>1</sup>Casi di equazioni differenziali  $y' = f(t, y)$  in cui il secondo membro non dipenda da  $y$  sono... assai piú facili, si tratta del problema della primitiva:  $y(t) = c + \int_0^t f(\xi) d\xi$

se entrambe le operazioni sono andate a buon fine abbiamo costruito una soluzione dell'equazione differenziale (140).

**2.1. Un approccio piú preciso.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$(142) \quad \begin{cases} y' &= f(y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Se  $f(y_0) = 0$  la funzione  $y(t) \equiv y_0$ , costante, risolve sia l'equazione che la condizione iniziale assegnata, quindi risolve il problema (142).

Se  $f(y_0) \neq 0$  allora in un intorno di  $y_0$  riesce ancora  $f(y) \neq 0$  e quindi si può considerare la funzione reciproca

$$\frac{1}{f(y)}$$

e la primitiva

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds$$

che vale 0 in  $y_0$

L'equazione

$$g(t, y) = F(y) - (t - t_0) = 0$$

- é soddisfatta da  $(t_0, y_0)$
- in tale punto riesce

$$g_y(t_0, y_0) = \frac{1}{f(y_0)} \neq 0$$

- quindi per il teorema di Dini, vedi pag. 239, l'equazione definisce implicitamente una funzione  $y(t)$  tale che

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t) = -\frac{g_t(t, y(t))}{g_y(t, y(t))} \Rightarrow y'(t) = f(y(t))$$

- la funzione  $y(t)$  garantita dal teorema di Dini é pertanto soluzione del problema (142).

**2.2. Lo schema mnemonico.** La soluzione del problema di Cauchy (142) si esprime con la formula

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds = \int_{t_0}^t ds \quad \Rightarrow \quad F(y) - F(y_0) = t - t_0$$

sulla quale resta poi il problema di funzioni implicite per ricavare la  $y$  in funzione di  $t$ , in altri termini trovare l'inversa della funzione  $F(y)$ .

**2.3. Lemma sulle traslazioni.** Sia  $y' = f(y)$  un'equazione differenziale autonoma e sia  $y(t)$  una sua soluzione, una funzione cioè che verifica la relazione

$$y'(t) = f[y(t)] \quad t \in I$$

Le funzioni ottenute da  $y(t)$  per traslazione, ad esempio  $y(t - 1)$  o  $y(t - 13)$ , ecc. soddisfano ancora <sup>2</sup> l'equazione

$$y'(t) = f[y(t)] \quad \rightarrow \quad y'(t + h) = f[y(t + h)]$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Un contreesempio: pensate all'equazione non autonoma  $y' = 2ty$  le sue soluzioni sono  $y(t) = ce^{t^2}$ . La funzione traslata*

$$\eta(t) = y(t + 1) = ce^{(t+1)^2}$$

*non soddisfa affatto l'equazione. Infatti*

$$\eta'(t) = 2(t + 1)\eta(t) \neq 2t\eta(t)$$

Se  $y(t)$  é la soluzione del problema di Cauchy

$$(143) \quad \begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}$$

allora la funzione  $y(t - t_0)$  é la soluzione del problema di Cauchy

$$(144) \quad \begin{cases} y' &= f(y) \\ y(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 2.2. *La funzione  $\sin(t)$  é soluzione dell'equazione autonoma  $y' = \sqrt{1 - y^2}$  (provare per credere) allora anche  $\cos(t)$  é soluzione di quell'equazione...*

*...infatti  $\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$  !*

### 3. La teoria qualitativa

Il titolo *teoria qualitativa* si riferisce alle diverse proprietà qualitative (monotonia, limitatezza, positività, ecc.) che si possono riconoscere alle soluzioni di un'equazione differenziale senza conoscerle esplicitamente.

**3.1. Monotonia.** Se  $y' = f(y)$  e la funzione  $f(y)$  ha segno costante allora anche  $y'$  avrà segno costante,  $y(t)$  sarà cioè strettamente monotona.

**3.2. Le soluzioni d'equilibrio.** Ogni valore  $c$  per il quale riesca  $f(c) = 0$  produce una funzione  $y \equiv c$  costante che soddisfa l'equazione  $y' = f(y)$ .

Le soluzioni costanti prendono, naturalmente il nome di

*soluzioni d'equilibrio.*

---

<sup>2</sup>negli intervalli in cui sono definite...

**3.3. Diseguaglianze.** Supponiamo che  $f(y)$ , definita ad esempio per ogni  $y$ , si annulli nei punti

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

e in nessun altro.

Allora  $f(y)$  ha segno costante in ciascuno degli  $n + 1$  intervalli determinati da quegli  $n$  valori.

La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

é

- se  $x_0 = c_k$  :  $y(t) \equiv c_k$
- se  $c_{k-1} < x_0 < c_k$  riesce  $y(t) \in (c_{k-1}, c_k)$
- se nell'intervallo  $(c_{k-1}, c_k)$  la  $f$  é positiva allora la soluzione  $y(t)$  sará crescente, viceversa nell'altro caso.

**3.4. Flessi.** Dove si trovano i flessi del grafico delle soluzioni delle equazioni autonome  $y' = f(y)$  ?

$$y'' = f'(y) \cdot y' = f'(y)f(y) : \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow f'(y) = 0$$

Perché non consideriamo anche il caso  $f(y) = 0$  ?

**3.5. Un primo esempio:  $y' = ay$ .** Si tratta dell'equazione autonoma piú semplice <sup>3</sup> che consideriamo naturalmente per  $a \neq 0$ .

Rileggiamo su di essa i risultati qualitativi introdotti sopra:

- abbiamo una sola soluzione costante, la  $y = 0$ , le altre sono monotone.
- una soluzione, diversa da quella identicamente nulla, ha segno costante: infatti per il teorema di unicitá il suo grafico non puó intersecare quello della  $y \equiv 0$
- sono crescenti se il valore iniziale  $x_0$  é tale che  $a \cdot x_0 > 0$ , sono decrescenti nell'altro caso  $a \cdot x_0 < 0$ .
- Non hanno flessi:  $f(y) = ay$ ,  $f'(y) = a \neq 0$

**3.6. Un secondo esempio: la logistica.** Si tratta dell'equazione

$$(145) \quad y' = y(1 - y)$$

- due soluzioni d'equilibrio  $y = 0$ ,  $y = 1$
- i grafici delle altre soluzioni, tutte funzioni monotone sono
  - decrescenti se maggiori di 1
  - crescenti se comprese tra 0 e 1

---

<sup>3</sup>studiata nel modulo di Derivate e Integrali

- decrescenti se minori di 0.
- i flessi si possono avere solo se  $(y(1-y))' = 1 - 2y = 0$ : si trovano tutti e soli alla quota  $y = 1/2$ .

#### 4. Equazioni a variabili separabili

Quanto esposto per le equazioni

$$y' = f(y)$$

si estende<sup>4</sup> facilmente alle equazioni

$$y' = f(y)g(x)$$

La tecnica, formale, con la quale si costruiscono soluzioni del problema

$$(146) \quad \begin{cases} y' = g(x)f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é la seguente

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x) dx : \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds = \int_{x_0}^x g(s) ds$$

al calcolo dei due integrali deve seguire la possibilità di esplicitare  $y$  come funzione di  $x$ .

#### 5. Cambiare variabile

Sia

$$y' = f(x+y)$$

il cambio di variabile  $z = y + x$ ,  $\Rightarrow z' = y' + 1$  traduce l'equazione assegnata nella forma

$$z' = f(z) + 1$$

equazione autonoma...

Trovata la  $z(x)$  poi si può tornare indietro essendo  $y(x) = z(x) - x$

**ESEMPIO 5.1.** Consideriamo l'equazione  $y' = y + x$ , vedi precedente Figura 3, posto  $z = y + x$  si ha  $y' = z' - 1$  e quindi

$$z' - 1 = z, \quad \rightarrow \quad z(x) = ce^x - 1$$

donde

$$y(x) + x = z(x) = ce^x - 1 \quad \rightarrow \quad y(x) = ce^x - 1 - x$$

**OSSERVAZIONE 5.2.** Il caso  $y' = f(ax+by+c)$  é naturalmente la stessa cosa, sotto un'apparente maggiore generalità...

<sup>4</sup>Vol.II, pag. 679

## 6. Equazioni in forma omogenea

$$(147) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

La manipolazione *cambio di variabile*

$$y = zx : \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

porta la (147) alla forma di un'equazione a variabili separabili<sup>5</sup>.

OSSERVAZIONE 6.1. *Il titolo Equazioni in forma omogenea non deve essere confuso con quello di Equazioni lineari omogenee, usato piú frequentemente.*

### 6.1. Equazioni riducibili a omogenee.

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

Se fosse stato  $c = c' = 0$  allora l'equazione sarebbe stata omogenea: nel caso che ci interessa consideriamo le due nuove variabili

$$x_1 = x + h, \quad y_1 = y + k$$

Riesce ovviamente

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$$

e quindi, sostituendo

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + c - ah - bk}{a'x_1 + b'y_1 + c' - a'h - b'k}\right)$$

Se ora si fossero scelti  $h$  e  $k$  in modo che...

$$\begin{cases} -ah - bk = 0 \\ c' - a'h - b'k = 0 \quad \dots \end{cases}$$

## 7. Primitive di ordine superiore

Consideriamo equazioni della forma

$$(148) \quad y^{[n]} = f(x),$$

esiste una formula molto semplice per trovare, ovviamente tramite integrazioni, una funzione che soddisfi la (148), una funzione che potremo dire una primitiva  $n$ -esima di  $f(x)$ .

<sup>5</sup>Vol.II, pag. 679

L'idea naif che poiché per trovare una primitiva di  $f(x)$  si deve eseguire un'integrazione

$$\int f(x)dx$$

per trovare una primitiva di ordine 2 si debbano fare due integrazioni, ecc. é, appunto, un'idea naif.

Si può fare una sola integrazione, la seguente

$$(149) \quad y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

La verifica che tale funzione sia una primitiva  $n$ -esima si ottiene derivando e derivando

$$y'(x) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f(t) dt$$

$$y''(x) = \frac{1}{(n-3)!} \int_0^x (x-t)^{n-3} f(t) dt$$

fino alla derivata  $(n-1)$ -esima

$$y^{[n-1]}(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \rightarrow \quad y^{[n]}(x) = f(x)$$

Naturalmente le soluzioni della (148) sono tutte le funzioni

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Si riconosce quindi il seguente

**TEOREMA 7.1.** *La funzione*

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

*soddisfa il problema di Cauchy*

$$y^{[n]}(x) = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \dots \quad y^{[n-1]}(x_0) = 0$$

**7.1. Il resto della formula di Taylor.** Detto  $R(x)$  il resto di ordine  $n$  tra la funzione  $f(x)$  e il polinomio di Taylor di grado  $n-1$  ad essa associato nel punto  $x_0$

$$R(x) = f(x) - \left\{ f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0)(x-x_0)^{[n-1]} \right\}$$

si ha

$$\begin{aligned} R(x_0) &= 0 \\ R'(x_0) &= 0 \\ &\dots \\ R^{[n-1]}(x_0) &= 0 \\ R^{[n]}(x) &= f^{[n]}(x) \end{aligned}$$

Riesce quindi, tenuto conto del precedente Teorema 7.1

$$R(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{[n]}(t) dt$$

La formula di Taylor pertanto può essere scritta con la nuova espressione del resto

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{[n-1]}(x_0)(x-x_0)^{[n-1]} + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{[n]}(t) dt \end{aligned}$$

## Equazioni ai differenziali totali

### 1. Introduzione

Le equazioni a variabili separabili si scrivono spesso nella forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha(x)}{\beta(y)} = 0$$

ovvero

$$(150) \quad \alpha(x) dx + \beta(y) dy = 0$$

forma cui viene dato il nome di

*equazione differenziale esatta*

La strategia proposta per determinare soluzioni della (150) é quella di considerare l'equazione

$$A(x) + B(y) = c$$

con  $A(x)$  primitiva di  $\alpha(x)$  e  $B(y)$  di  $\beta(y)$  ed esplicitare la  $y$ .

La funzione  $F(x, y) = A(x) + B(y)$  si dice

*integrale primo dell'equazione (150)*

che può infatti essere letta come

$$dF(x, y) = 0$$

### 2. Una generalizzazione

La strategia precedente può essere estesa al caso di equazioni

$$(151) \quad y' + \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

cercando

- una funzione  $F(x, y)$  tale che

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = N(x, y)$$

- esplicitando la  $y$  dall'equazione  $F(x, y) = c$

OSSERVAZIONE 2.1. *Entrambi i due punti precedenti possono fallire:*

- il primo perché non è certo che le due funzioni  $M(x, y)$  ed  $N(x, y)$  siano le derivate parziali di una  $F(x, y)$  (ricorderete almeno le condizioni necessarie  $M_y = N_x$ , sufficienti solo in domini  $(x, y)$  di tipo particolare, quali i convessi, gli stellati, ecc.)
- La possibilità di esplicitare è senz'altro il punto più a rischio (anche in casi apparentemente semplici di  $F(x, y)$  polinomio in  $x$  e  $y$  la possibilità di esplicitare è bassissima... grado in  $y$  non maggiore di 2 o 3...)
- Attenzione: molti manuali di esercizi confondono spesso la determinazione della funzione  $F(x, y)$  con la soluzione dell'equazione differenziale, ricordiamo invece che da  $F(x, y)$  occorre esplicitare ancora  $y = y(x)$ .

ESEMPIO 2.2.

$$y' = -\frac{e^y}{xe^y + 2y} \Leftrightarrow e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

Si riconosce facilmente che la funzione  $F(x, y)$  cercata è

$$xe^y + y^2$$

Quindi l'equazione da esplicitare è

$$(152) \quad xe^y + y^2 = c$$

operazione tutt'altro che facile...

Il problema di Cauchy

$$y' = -\frac{e^y}{xe^y + 2y}, \quad y(x_0) = y_0$$

corrisponde naturalmente ad esplicitare la (152) prendendo

$$c = x_0 e^{y_0} + y_0^2$$

ESEMPIO 2.3. Il problema di Cauchy

$$y' + \frac{2xy^2 + 3}{4y^3 + 2x^2y} = 0, \quad y(0) = 1$$

$$(2xy^2 + 3)dx + (4y^3 + 2x^2y)dy = 0, \quad y(0) = 1$$

$$y^4 + x^2y^2 + 3x = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4(3x - 1)})$$

Tenuto conto della condizione iniziale si deve scegliere

$$y^2 = \frac{1}{2}(-x^2 + \sqrt{x^4 - 4(3x - 1)})$$

e, successivamente

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(-x^2 + \sqrt{x^4 - 4(3x - 1)})}$$

OSSERVAZIONE 2.4. I grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale (151) sono le linee di livello della funzione  $F(x, y)$ .

Nel caso dell'esempio precedente (2.2) le linee di livello della funzione  $xe^y + y^2$  si trovano facilmente esplicitando la  $x$

$$x = (c - y^2)e^{-y}$$

### 3. Fattore integrante.

L'equazione

$$y' + \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

é naturalmente perfettamente equivalente alle tante

$$y' + \frac{\rho(x, y)M(x, y)}{\rho(x, y)N(x, y)}$$

e non é escluso che la nuova coppia

$$\rho(x, y)M(x, y), \quad \rho(x, y)N(x, y)$$

costituisca le derivate parziali di una stessa  $F(x, y)$ : controlliamo infatti le derivate in croce

$$\frac{\partial}{\partial y} [\rho(x, y)M(x, y)], \quad \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, y)N(x, y)]$$

puó accadere, scegliendo bene il fattore  $\rho$  che riesca

$$\rho_y M + \rho M_y = \rho_x N + \rho N_x$$

anche in casi in cui invece  $M_y \neq N_x$ .

Il fattore  $\rho$  adatto si chiama *fattore integrante*.

ESEMPIO 3.1. Consideriamo l'equazione

$$(y - xy^2)dx + xdy = 0$$

Le due funzioni  $(y - xy^2)$ ,  $x$  non sono le derivate parziali di alcuna  $F(x, y)$  perché non hanno le derivate in croce uguali.

Moltiplichiamo membro a membro per

$$\rho(x, y) = -\frac{1}{(xy)^2}$$

si ottiene

$$\left(-\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx - \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

adesso le due funzioni

$$\left(-\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right), \quad -\frac{1}{xy^2}$$

hanno le derivate in croce uguali... quindi la  $F(x, y)$  c'è!

$$F(x, y) = -\frac{1}{x^2y} + \ln(x)$$

Ad esempio per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y - xy^2)dx + xdy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

basta saper esplicitare l'equazione

$$-\frac{1}{x^2y} + \ln(x) = -1$$

cioè

$$y(x) = \frac{1}{x^2(\ln(x) + 1)}$$

#### 4. Traiettorie ortogonali

Supponiamo di aver assegnato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \{M(x, y), N(x, y)\}$$

definito in un rettangolo aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e cerchiamo le curve  $\mathcal{C}$  tracciate in  $\Omega$  ortogonali, in ogni loro punto  $(x, y)$ , al campo  $\vec{F}(x, y)$ .

Sia  $y = f(x)$  una di tali curve: considerato che la retta tangente al grafico in ogni punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ovvero un vettore tangente nel punto  $(x_0, y_0)$  è

$$\vec{t}(x_0, y_0) = \{1, f'(x_0)\}$$

l'ortogonalità richiesta equivale a

$$\vec{F}(x_0, y_0) \times \vec{t}(x_0, y_0) = M(x_0, y_0) + f'(x_0)N(x_0, y_0) = 0$$

ovvero a riconoscere che la funzione  $y = f(x)$  soddisfa l'equazione differenziale

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

**4.1. Problema:** *Determinare le curve del piano che tagliano le parabole della famiglia  $y = C x^2$  ortogonalmente.*

Per ogni punto  $P = (x, y)$  del piano passa una ed una sola parabola  $y = C_P x^2$  della famiglia.

Un vettore tangente alla parabola  $y = C_P x^2$  nel punto  $P = (x, y)$  é il seguente

$$\vec{t} = \{1, 2 C_P x\}$$

Tenuto presente che  $y = C_P x^2$  si ha anche

$$C_P = \frac{y}{x^2}$$

e quindi

$$\vec{t} = \left\{1, 2 \frac{y}{x^2} x\right\} = \left\{1, 2 \frac{y}{x}\right\}$$

Le linee passanti per tale punto ortogonalmente saranno pertanto dedotte dall'equazione differenziale

$$dx + 2 \frac{y}{x} dy = 0$$

ovvero

$$(153) \quad x dx + 2 y dy = 0$$

Si riconosce facilmente nella (153)

$$d\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right) = 0$$

e quindi l'integrale primo

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$$

definisce le curve cercate, ellissi di centro l'origine e semiassi in proporzione  $\sqrt{2} : 1$

**4.2. Il problema duale...** *Determinare le curve del piano che tagliano le ellissi della famiglia*

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$$

*ortogonalmente.*

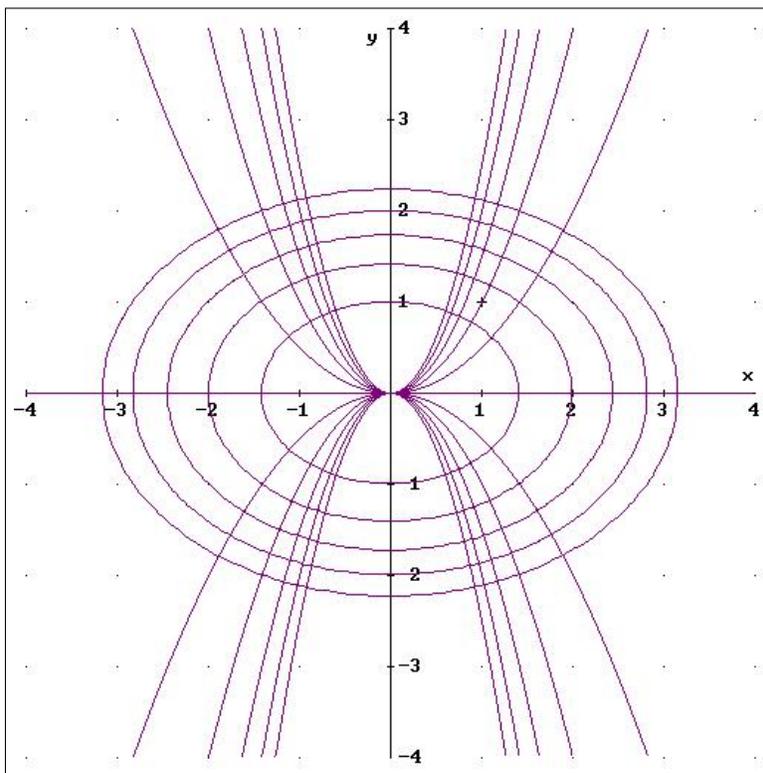


FIGURA 1.  $y = C_P x^2$ ,  $c \in [-2.5, 2.5]$ ,  $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$ ,  $k \in [1, 5]$

**4.3. Traiettorie di angolo assegnato.** Il problema della determinazione delle curve ortogonali ad un campo vettoriale  $\vec{F}$  assegnato può essere generalizzato in quello della ricerca di curve che formino con il campo  $\vec{F}$  un angolo  $\alpha$  assegnato.

Consideriamo il problema su un esempio:

determinare le curve che taglino le rette della famiglia  $y = Cx$  sotto l'angolo  $\alpha$ .

Sia  $P = (x_0, y_0)$  e sia  $y = C_P x$ ,  $C_P = y_0/x_0$  la retta della famiglia passante per  $P$ .

Sia  $y = f(x)$  una funzione il cui grafico tagli nel punto  $P = (x_0, y_0)$  la retta  $y = C_P x$  con un angolo  $\alpha$ .

Questo significa che le due rette

$$y = C_P x, \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si tagliano con un angolo  $\alpha$ .

Tenuto conto del significato trigonometrico dei due coefficienti angolari:

$$C_P = \frac{y_0}{x_0} = \tan(\varphi), \quad f'(x_0) = \tan(\psi), \quad \varphi = \psi - \alpha$$

si ha

$$\tan(\varphi) = \frac{\tan(\psi) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\psi) \cdot \tan(\alpha)}$$

ovvero, posto  $k = \tan(\alpha)$

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{f'(x_0) - k}{1 + k f'(x_0)}$$

La funzione  $y = f(x)$  deve pertanto soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{y}{x} = \frac{f'(x) - k}{1 + k f'(x)}$$

ovvero

$$(154) \quad y' = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}$$

La (154) é un'equazione di tipo omogeneo: la sostituzione  $y = z x$  conduce quindi all'equazione a variabili separabili

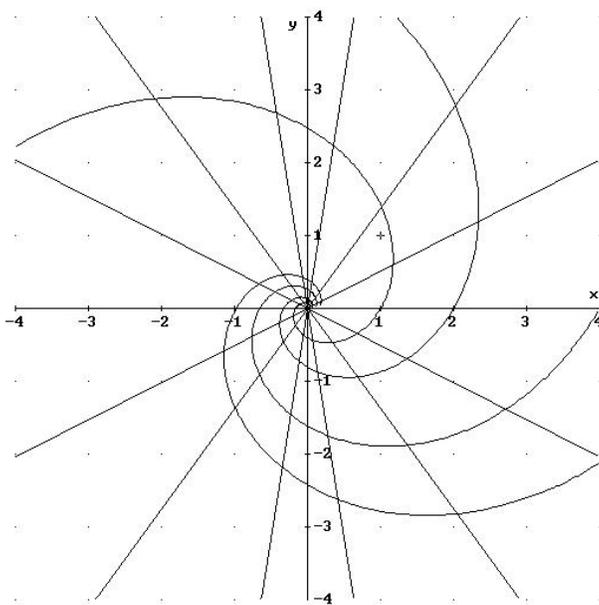


FIGURA 2. Spirali esponenziali: tagliano le rette  $y = Cx$  con un angolo  $\alpha = \pi/3$

$$z'x + z = \frac{k + z}{1 - kz} \quad \rightarrow \quad x z' = k \frac{1 + z^2}{1 - kz}$$

$$\frac{1}{k} \int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \arctan \left( \frac{y}{x} \right) + C$$

Equazione che si legge meglio in coordinate polari

$$\ln(\rho) = \frac{1}{k} \theta + C \quad \rightarrow \quad \rho = \gamma e^{\frac{\theta}{k}}$$

### 5. Le isocline

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y)$$

del tutto generale e consideriamo le linee definite dalle equazioni

$$f(x, y) = c$$

al variare di  $c$ .

Queste linee si chiamano *isocline* dell'equazione differenziale: le soluzioni  $y(x)$  dell'equazione differenziale passano sui tutti i punti di una stessa isoclina con la stessa pendenza.

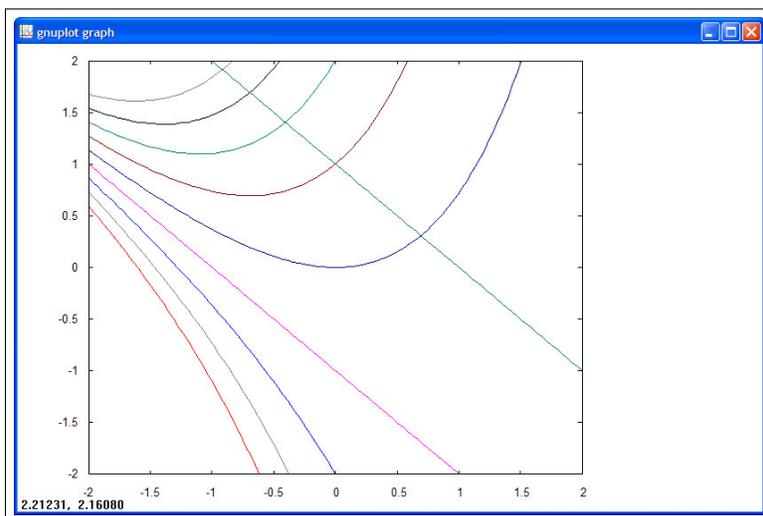


FIGURA 3. Le soluzioni  $y = ce^x - 1 - x$  dell'equazione  $y' = y + x$  e l'isoclina  $y + x = 1$

Il fenomeno é ovvio tenuto conto che se

$$P \in \mathcal{C}_c = \{(x, y) | f(x, y) = c\}$$

il grafico della soluzione passa per  $P$  con  $y' = f(x, y) = c$

OSSERVAZIONE 5.1. La parola *isoclina* deriva, naturalmente da **stessa** pendenza.

ESEMPIO 5.2. *Come attraversano la circonferenza  $x^2 + y^2 = \pi/4$  le soluzioni della (terribile) equazione differenziale*

$$y' = \tan(x^2 + y^2)$$

*Risposta: tutte con grafico inclinato a 45 gradi: capite perché ?*



## Il principio delle contrazioni

### 1. Punti uniti

Assegnata una trasformazione

$$T : X \rightarrow X$$

un punto  $y \in X$  si dice punto unito per la  $T$  se

$$Ty = y$$

L'esistenza (o meno) di punti uniti dipende (probabilmente)

- dal tipo di spazio  $X$
- dal tipo di trasformazione  $T$ .

Nel caso di  $X = \mathbb{R}$  le trasformazioni  $T$  si chiamano normalmente

$$y = f(x)$$

funzioni reali di una variabile reale: il problema dell'esistenza di soluzioni per l'equazione  $f(x) = 0$  equivale all'esistenza di punti uniti per qualche trasformazione

$$g_\lambda : x \rightarrow x + \lambda f(x)$$

infatti

$$f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_\lambda(x_0) = x_0$$

Si riconosce facilmente il seguente

**TEOREMA 1.1.** *Sia  $X = [0, 1]$  e sia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua: allora esistono punti uniti.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi é evidente: il grafico di  $f$  deve essere una linea non spezzata che congiunge un punto del segmento verticale  $[(0, 0) - (0, 1)]$  ad un punto dell'altro segmento verticale  $[(1, 0) - (1, 1)]$ . Quindi tale linea deve tagliare la diagonale  $[(0, 0) - (1, 1)]$ .  $\square$

Il precedente teorema cade se si rinuncia alla continuit : in tal caso il grafico pu  essere spezzato e quindi pu  non intersecare la diagonale.

ESEMPIO 1.2. Sia  $T$  la trasformazione di  $X = C^0([0, 1])$  in sé che fa corrispondere ad ogni  $f$  il suo quadrato: un punto unito di  $T$  deve soddisfare l'equazione

$$f(x) = f^2(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

quindi  $f(x)$  deve valere 0 o 1 ed essendo una funzione di  $x$  continua in  $[0, 1]$  non può che essere

- o la funzione costante  $f \equiv 0$
- o la funzione costante  $f \equiv 1$

La trasformazione  $T$  considerata ha pertanto due e solo due punti uniti, la  $f \equiv 0$  e la  $f \equiv 1$

ESEMPIO 1.3. La trasformazione

$$T : f \rightarrow f + 1$$

è una trasformazione continua di  $C^0([0, 1])$  in sé ma non ha punti uniti, infatti nessuna funzione  $f$  può soddisfare l'uguaglianza

$$f = Tf \quad \leftrightarrow \quad f(x) = f(x) + 1$$

## 2. Il principio delle contrazioni

DEFINIZIONE 2.1. Le trasformazioni  $T$  di uno spazio metrico  $X$  in sé che verificano la condizione

$$\|Tf - Tg\| \leq L\|f - g\|, \quad L < 1$$

si chiamano *contrazioni*.

In altri termini una trasformazione  $T$  è una contrazione se

*contrae la distanza*

trasforma cioè due elementi  $f$  e  $g$  in due altri  $Tf$  e  $Tg$  che sono

*tra loro più vicini*

di quanto non fossero  $f$  e  $g$ .

PROPOSIZIONE 2.2. Le contrazioni sono trasformazioni continue di  $X$  in sé.

DIMOSTRAZIONE. Sono infatti trasformazioni lipschitziane. □

ESEMPIO 2.3. La trasformazione  $Tf = 2f$  non è una contrazione, mentre la

$$Tf = \frac{1}{3}f$$

è una contrazione.

TEOREMA 2.4 (Banach). *Sia  $X$  uno spazio metrico completo, le contrazioni*

$$T : X \rightarrow X$$

*hanno sempre uno ed un solo punto unito  $y \in X$ , che coincide con il limite delle successioni*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0$$

*costruite a partire da un qualsiasi elemento  $x_0 \in X$ .*

DIMOSTRAZIONE.

Unicit 

Esistano, per assurdo, due punti uniti  $x_1 = Tx_1$  ed  $x_2 = Tx_2$ : tenuto conto che  $T$    una contrazione si ha

$$\|x_1 - x_2\| = \|Tx_1 - Tx_2\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

da cui essendo  $L < 1$  segue

$$\|x_1 - x_2\| = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Esistenza

Scelto  $x_0 \in X$  consideriamo la successione prodotta a partire da esso

$$(155) \quad \begin{aligned} &x_0, \\ &x_1 = Tx_0, \\ &x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \\ &x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

successione che prende il nome di

*successioni delle approssimazioni successive*

Riesce

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leq L\|x_n - x_{n-1}\|$$

da cui, reiterando da  $n = 2$  in poi si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x_1 - x_0\| \leq \delta \\ \|x_2 - x_1\| \leq L\|x_1 - x_0\| \leq L\delta \\ \|x_3 - x_2\| \leq L^2\|x_1 - x_0\| \leq L^2\delta \\ \|x_4 - x_3\| \leq L^3\|x_1 - x_0\| \leq L^3\delta \\ \dots \\ \|x_{n+1} - x_n\| \leq L^n\|x_1 - x_0\| \leq L^n\delta \end{array} \right.$$

Tenuto conto della disegualianza triangolare

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

e che

$$L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \dots + L^n \leq L^n \frac{1}{1-L}$$

si riconosce che

$$(156) \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq L^n \frac{1}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

ovvero che la successione  $\{x_n\}$  é una successione di Cauchy in  $X$ . Tenuto conto dell'ipotesi che  $X$  sia completo esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

per la continuitá di  $T$  riesce

$$x_{n+1} = Tx_n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = T \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \rightarrow \quad y = Ty$$

Tenuto conto dell'arbitrarietá con cui é stato scelto il primo punto  $x_0$  si riconosce che

- $\forall \xi \in X$   $\{T^n \xi\}$  é convergente,
- le diverse successioni  $\{T^n \xi\}$  convergono tutte allo stesso  $y$ , l'unico punto unito di  $T$ .

□

### 3. Iterate

Il Teorema di Banach richiede che  $T$  sia una contrazione: si puó riconoscere un risultato un po' piú generale quale il seguente

**PROPOSIZIONE 3.1.** *Sia  $X$  uno spazio metrico completo e sia  $T$  una trasformazione continua di  $X$  in sé: se un'iterata  $T^m$  é contrazione allora esiste ed é unico il punto unito per  $T$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Tenuto conto che

$$T : X \rightarrow X$$

ha senso considerare le iterate

$$T^2x = T(Tx), T^3x = T(T^2x), \dots$$

Se l'iterata  $T^m$  é una contrazione allora ad essa puó applicarsi il Teorema di Banach:

- $\forall \xi \in X$   $\{T^{mn} \xi\}$  é convergente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{mn} \xi = y$
- $T^{m(n+1)} \xi = T^m(T^{mn} \xi) \rightarrow T^m y = y$
- $Ty = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{mn} \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{mn}(T\xi) = y$

da cui

$$Ty = y$$

L'ultima affermazione deriva dal fatto che le iterate costruite a partire da  $T\xi$  devono anch'esse convergere all'unico punto unito di  $T^m$ .

□



## Lo spazio delle funzioni continue

### 1. Introduzione

Dopo gli spazi vettoriali  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^n, \dots$  incontrati nei corsi precedenti considereremo in questo capitolo uno spazio vettoriale del tutto nuovo:

- i suoi elementi non sono punti di alcun spazio geometrico ma funzioni reali di una o piú variabili,
- la sua dimensione é  $\dots$  infinita !

Tale spazio, al quale é facile riconoscere la struttura di spazio vettoriale si chiamerá

$$C^0(K)$$

spazio delle funzioni reali, definite in  $K$ , sottinsieme compatto, cioè chiuso e limitato, di  $\mathbb{R}$  o di  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$  continue.

### 2. Lo spazio $C^0(K)$

Sia  $K$  un insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  o di un  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  e indichiamo con  $C^0(K)$  l'insieme delle funzioni continue

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

definite in  $K$  e a valori reali.

Nel caso

- $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  avremo l'insieme  $C^0([a, b])$  delle funzioni reali continue definite nell'intervallo  $[a, b]$ ,
- nel caso  $K := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$  avremo l'insieme delle funzioni reali e continue definite nel cerchio di centro l'origine e raggio 1,
- nel caso  $K := \{x^2 + y^2 = 1\}$  avremo l'insieme delle funzioni reali e continue definite sulla circonferenza di raggio 1, l'insieme cioè delle funzioni continue periodiche di periodo  $2\pi$ ,
- ecc. ecc.

**TEOREMA 2.1.** *L'insieme  $C^0(K)$  é uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $f, g \in C^o(K)$  comunque si prendano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  é definita la funzione

$$\alpha f(X) + \beta g(X), \quad \forall X \in K$$

e riesce continua.

Quindi

$$\alpha f + \beta g \in C^o(K)$$

□

TEOREMA 2.2. *Se  $K$  possiede infiniti punti  $C^o(K)$  é uno spazio di dimensione non finita.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $K$  fosse costituito di soli  $m$  punti

$$K := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

allora ogni funzione

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

si riduce ad una  $m$ -upla di numeri, i valori

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_m = f(x_m)$$

quindi  $C^o(K) = \mathbb{R}^m$ .

Nel caso  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  contenga infiniti punti, come accade, ad esempio se  $K = [a, b]$ , basta considerare la famiglia infinita  $P \subseteq C^o(K)$  dei polinomi nelle  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Si riconosce facilmente che i monomi di grado  $h$  sono linearmente indipendenti rispetto ai polinomi di grado minore di  $h$  e quindi  $P$  ha dimensione non finita.

A maggior ragione ha dimensione non finita  $C^o(K)$ . □

**2.1. La norma.** Definiamo su  $C^o(K)$  la seguente norma

$$(157) \quad \|f\| = \max_{X \in K} |f(X)|$$

Si tratta di una buona definizione tenuto conto che il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza del massimo di  $|f(X)|$  nel caso che

- $f$  sia continua,
- $K$  sia chiuso e limitato.

Si tratta inoltre di una norma: infatti

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

DEFINIZIONE 2.3. *Lo spazio vettoriale  $C^o(K)$  delle funzioni continue definite in  $K$  a valori reali, dotato della norma (157) é uno spazio vettoriale normato.*

**2.2. La metrica.** Come nel caso degli spazi  $\mathbb{R}^n$ , la presenza di una norma in  $C^o(K)$  consente di definire una distanza  $d$  tra due elementi  $f, g \in C^o(K)$

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

L'espressione di  $d$  verifica infatti le tre proprietà della distanza

- $d(f, g) = d(g, f)$ ,
- $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ ,
- $d(f, g) \leq d(f, p) + d(p, g) \quad \forall f, g, p \in C^o(K)$ .

ESEMPIO 2.4. Sia  $K = [0, 1]$  lo spazio vettoriale normato  $C^o([0, 1])$  contiene, fra le altre, le funzioni

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

Calcoliamo le distanze

$$\begin{aligned} d(1, x) &= \max_K |1 - x| = 1 \\ d(x, x^2) &= \max_K |x - x^2| = \frac{1}{4} \\ d(x^2, x^3) &= \max_K |x^2 - x^3| = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

### 3. La completezza

Lo spazio (metrico)  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali non è completo: lo spazio  $\mathbb{R}$  dei numeri reali è completo.

La parola *completo* che si incontra in riferimento ad uno spazio metrico si riferisce ad una proprietà delle successioni di Cauchy dello spazio:

- se  $\{X_n\}$  converge a  $Y$  allora

$$|X_n - X_m| \leq |X_n - Y| + |Y - X_m|$$

cioè gli elementi della successione... *si stringono tra loro*

- se gli elementi di una successione *si stringono tra loro* la successione converge ?

DEFINIZIONE 3.1. Uno spazio metrico si dice *completo* se le successioni di Cauchy, cioè quelle che si stringono tra loro convergono.

ESEMPIO 3.2. Il piano  $\mathbb{R}^2$  è uno spazio metrico completo, il disco bucato  $\Omega : 0 < x^2 + y^2 < 1$  non è uno spazio metrico completo !

TEOREMA 3.3. Una successione  $\{f_n\} \in C^o(K)$ , di Cauchy rispetto alla metrica di  $C^o(K)$ , è convergente, cioè lo spazio metrico  $C^o(K)$  è completo.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\{f_n(x)\} \in C^o(K)$ , successione di Cauchy : scelto  $\varepsilon > 0$  riesca

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon, \forall p$$

Tenuto conto che, qualunque sia  $x \in K$ , riesce

$$(158) \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|$$

la successione (reale)  $\{f_n(x)\}$  é di Cauchy, quindi convergente, in ogni punto  $x \in K$ .

Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

quindi la successione  $\{f_n\} \in C^o(K)$ , converge puntualmente.

Si tratta di riconoscere che la funzione limite  $f(x) \in C^o(K)$ , cioè é continua.

Passando al limite nella (158) per  $p \rightarrow \infty$  si ha

$$(159) \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Presi due punti  $x_1, x_2 \in K$  dalla diseuguaglianza triangolare segue

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|$$

da cui, tenuto conto della (159) si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

che permette di riconoscere che  $f$  é continua: infatti la variazione di  $f$  tra  $x_1$  e  $x_2$  non supera che di  $2\varepsilon$ , quantità positiva scelta all'inizio arbitrariamente, quella della funzione continua  $f_n$ .

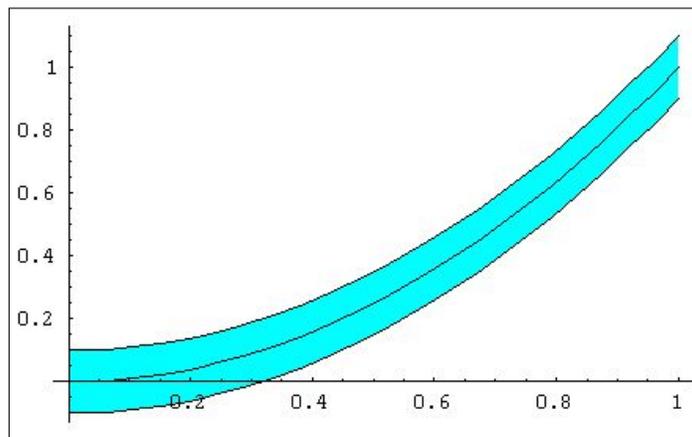
Tenuto ancora conto della (159), valida per ogni  $x \in K$  si ha

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon$$

che esprime la convergenza della successione  $\{f_n\}$  ad  $f$  nella metrica di  $C^o(K)$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 3.4. *Il teorema dimostrato era certamente noto nella forma*

il limite di una successione di funzioni continue uniformemente convergente é continuo.

FIGURA 1.  $g(x) = x^2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 

**3.1. Il tubo.** Consideriamo lo spazio vettoriale normato  $C^0([0, 1])$ , scelto un suo elemento  $g \in C^0([0, 1])$  e scelto un numero positivo  $\varepsilon$  consideriamo le funzioni  $f \in C^0([0, 1])$  tali che

$$(160) \quad d(f, g) = \|f - g\| \leq \varepsilon$$

Si tratta delle funzioni  $f$  definite in  $[0, 1]$  che verificano,  $\forall x \in [0, 1]$  la condizione

$$g(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) + \varepsilon$$

É facile immaginare il grafico di tali funzioni  $f$  :

- si disegna il grafico della funzione  $g$
- si disegna la striscia, o il *tubo*, intorno al grafico di  $g$  di spessore un  $\varepsilon$  sopra e un  $\varepsilon$  sotto, come in Figura 1
- i grafici delle  $f$  che soddisfano la (160) sono contenuti in tale tubo, vedi Figura 2.

#### 4. Trasformazioni continue

Una funzione

$$T : C^0(K) \rightarrow C^0(K)$$

é una funzione che ad ogni elemento di  $C^0(K)$  fa corrispondere un altro elemento di  $C^0(K)$ .

Le funzioni  $T$  suddette prendono spesso anche i nomi di

- *trasformazioni* di  $C^0(K)$  in sé,
- *mappe* di  $C^0(K)$  in sé.

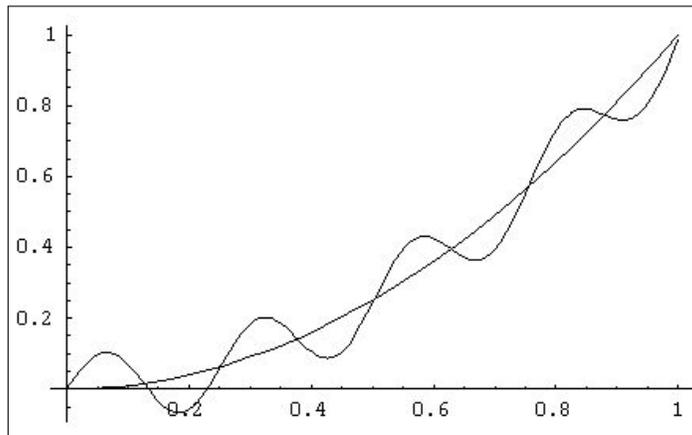


FIGURA 2.  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^2 + \frac{1}{10} \sin(25x)$

ESEMPIO 4.1. Sia  $K = [0, 1]$ : sia  $T$  la trasformazione di  $C^0(K)$  in sé che ad ogni  $f \in C^0(K)$  fa corrispondere la funzione  $Tf = 2f$  anch'essa, ovviamente, elemento di  $C^0(K)$

ESEMPIO 4.2. Sia  $K = [a, b]$ : sia  $T$  la trasformazione di  $C^0(K)$  in sé che ad ogni  $f \in C^0(K)$  fa corrispondere la primitiva

$$Tf(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$$

anch'essa ovviamente, elemento di  $C^0(K)$

DEFINIZIONE 4.3. Una trasformazione  $T$  di  $C^0(K)$  in sé si dice continua nel punto  $f_0 \in C^0(K)$  se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che

$$\|f - f_0\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|Tf - Tf_0\| \leq \varepsilon$$

ESEMPIO 4.4. La trasformazione  $T$  del precedente Esempio 4.2 è continua in ogni punto.

Infatti

$$\|Tf - Tg\| = \left\| \int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt \right\| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \leq |b-a| \|f-g\|$$

essa è lipschitziana con  $L = |b-a|$

ESEMPIO 4.5. La trasformazione  $T$  di  $C^0([0, 1])$  in sé che fa corrispondere ad ogni funzione  $f$  una delle tre funzioni costanti  $-1, 0, 1$  con la legge

$$Tf = \begin{cases} -1 & \text{se } f(0) < 0 \\ 0 & \text{se } f(0) = 0 \\ 1 & \text{se } f(0) > 0 \end{cases}$$

non è una trasformazione continua di  $C^0([0, 1])$  in sé.

Infatti prendiamo  $f_1, f_0 \in C^0([0, 1]) : f_0(x) \equiv 0, f_1(x) = \varepsilon > 0$  : riesce

$$Tf_0 \equiv 0, \quad Tf_1 \equiv 1$$

da cui

$$\|f_0 - f_1\| = \varepsilon \quad \|Tf_0 - Tf_1\| = 1$$

per  $\varepsilon$  piccolo  $f_1$  si avvicina a  $f_0$  ma  $Tf_1$  non si avvicina a  $Tf_0 \dots$

ESEMPIO 4.6. Consideriamo lo spazio  $X = C^0([0, 1])$  e la trasformazione

$$Tf = \frac{f}{2 + f^2}$$

Si tratta ovviamente di una trasformazione di  $C^0([0, 1])$  in sé che riesce contrazione: infatti tenuto conto che

$$\left(\frac{x}{2 + x^2}\right)' = \left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right) \frac{1}{2 + x^2} \leq \frac{1}{2}$$

riesce

$$|Tf_1(x) - Tf_2(x)| \leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \quad \rightarrow \quad \|Tf_1 - Tf_2\| \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|$$

L'unico punto unito è

$$f(x) = \frac{f(x)}{2 + f^2(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) \equiv 0$$

Sperimentiamo la successione (155) delle approssimazioni successive a partire, ad esempio dalla  $f_0(x) = x$

$$f_1(x) = \frac{x}{2 + x^2}$$

$$f_2(x) = \frac{x(2 + x^2)}{8 + 9x^2 + 2x^4}$$

$$f_3(x) = \frac{x(2 + x^2)(8 + 9x^2 + 2x^4)}{128 + 292x^2 + 230x^4 + 73x^6 + 8x^8}$$

Si ha

La Figura 3 mostra chiaramente come i grafici delle approssimazioni successive si avvicinino rapidamente a quello della funzione  $f = 0$  unico punto unito della trasformazione  $T$ .

OSSERVAZIONE 4.7. Il procedimento delle approssimazioni successive si applica in numerose situazioni anche diverse da quelle delle contrazioni  $T$  di uno spazio completo: è facile riconoscere che

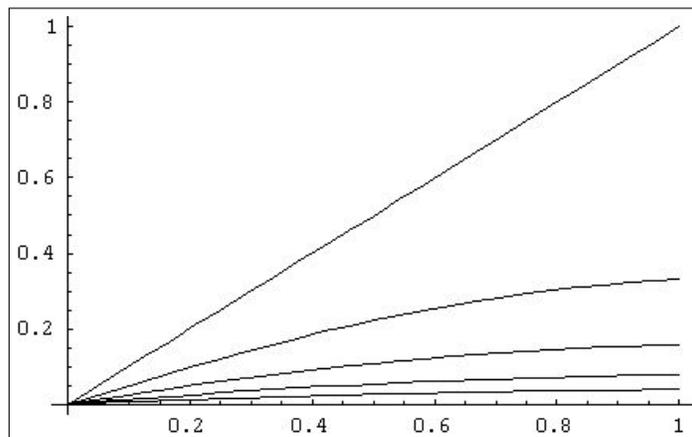


FIGURA 3. Le prime 5 approssimazioni successive.

- se  $T$  é una trasformazione continua di uno spazio metrico  $X$  in sé,
- se scelto un punto  $x_0 \in X$  la successione

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots$$

converge,

- il suo limite  $y$  é, necessariamente un punto unito:  $y = Ty$ .

Il teorema di Banach dice semplicemente che tale convergenza si ha sempre se  $X$  é completo e  $T$  é una contrazione.

ESEMPIO 4.8. Una trasformazione di  $C^0([0, 2\pi])$  interessante può essere

$$Tf(x) = \frac{1}{2} \sin(x + f(x))$$

- si tratta di una trasformazione di  $C^0([0, 2\pi])$  in sé: infatti se  $f(x) \in C^0([0, 2\pi])$  anche  $\frac{1}{2} \sin(x + f(x)) \in C^0([0, 2\pi])$ ,
- si tratta di una contrazione infatti

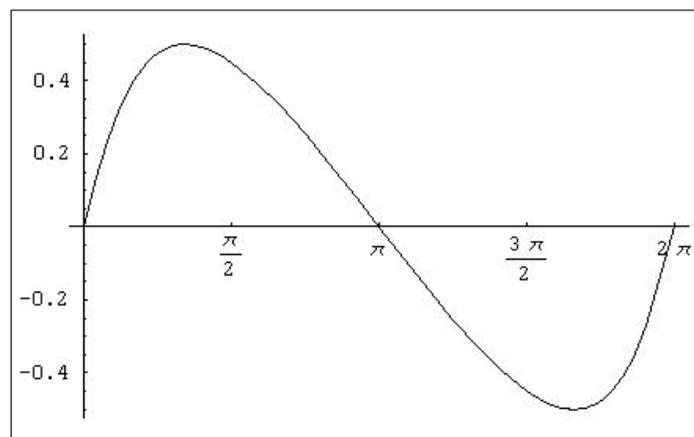
$$\begin{aligned} |Tf_1(x) - Tf_2(x)| &= \frac{1}{2} |(\sin(x + f_1(x)) - \sin(x + f_2(x)))| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \end{aligned}$$

da cui

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|$$

- quale sia il suo punto unito... non é ovvio, se ne può apprezzare il grafico in Figura 4

grafico riferito alla 20-esima approssimazione successiva partendo da  $f_0(x) = x$ , il tutto naturalmente determinato tramite Mathematica.

FIGURA 4.  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x + f(x))$



## Applicazioni del principio delle contrazioni

### 1. Il problema di Cauchy

La piú nota e importante applicazione del Teorema di Banach sulle contrazioni di uno spazio metrico completo si riferisce all'esistenza e unicitá della soluzione per il problema di Cauchy

$$(161) \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Il problema di Cauchy equivale all'equazione integrale

$$(162) \quad y(t) = y_0 + \int_0^t f[\tau, y(\tau)]d\tau \quad t \in (-a, a)$$

anch'essa nell'incognita  $y(t)$ .

Consideriamo lo spazio metrico completo  $X = C^0([-a, a])$  delle funzioni  $v$  continue per  $t \in (-a, a)$  consideriamo la trasformazione  $T$  che ad ogni funzione  $v \in C^0([-a, a])$  fa corrispondere la funzione  $w = Tv$  seguente

$$w(t) = y_0 + \int_0^t f[\tau, v(\tau)]d\tau, \quad w = Tv$$

Le ipotesi fatte

- la funzione  $f(x, y)$  sia di classe  $C^1(P)$ , continua con le due derivate parziali prime continue in

$$P = \{(x, y) \mid |x| < a, |y| < b\}$$

- 

$$|f(x, y)| \leq M, \quad |f_y(x, y)| \leq M_1 \quad \forall (x, y) \in P$$

- 

$$Ma < b, \quad M_1 a < 1$$

garantiscono che la trasformazione

$$T : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a])$$

cióe se  $v \in C^0([-a, a])$  allora di conseguenza  $w \in C^0([-a, a])$  e che é una contrazione

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq L\|v_1 - v_2\|, \quad L < 1$$

Applicando alla trasformazione  $T$  il Teorema di Banach, pagina 385, si deduce l'esistenza di una e una sola funzione  $y \in C^0([-a, a])$  tale che

$$y = Ty$$

Tale funzione, tenuto conto dell'equivalenza osservata, rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (161).

**1.1. Soluzioni in grande.** Per ottenere l'esistenza di una soluzione per il problema di Cauchy bastava riconoscere che la trasformazione  $T$  fosse una contrazione.

Tenuto conto della Proposizione 3.1 basta riconoscere che una iterata di  $T$  sia una contrazione.

Questo può ridurre la severità con la quale deve essere ristretto l'intervallo  $(-a, a)$  in cui si riesce a provare l'esistenza di una soluzione.

Supponiamo che  $f(t, y)$  sia definita per  $y \in \mathbb{R}$  e uniformemente Lipschitziana rispetto a  $y$ , cioè

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

allora, scelto  $t$  si ha

$$|Tv_1 - Tv_2| = \left| \int_0^t (f(\tau, v_1(\tau)) - f(\tau, v_2(\tau))) d\tau \right| \leq |t| \max_{s \in \mathbb{R}} |v_1(s) - v_2(s)|$$

$$|T^2v_1 - T^2v_2| \leq L \int_0^t |\tau| \max_{s \in \mathbb{R}} |v_1(s) - v_2(s)| d\tau = \frac{L^2 t^2}{2!} \max_{s \in \mathbb{R}} |v_1(s) - v_2(s)|$$

da cui in generale

$$|T^m v_1 - T^m v_2| \leq \frac{L^m t^m}{m!} \max_{s \in \mathbb{R}} |v_1(s) - v_2(s)|$$

È chiaro che comunque si scelga l'intervallo  $(-a, a)$  su cui lavorare riuscirà

$$\max_{s \in \mathbb{R}} |T^m v_1 - T^m v_2| \leq \frac{L^m a^m}{m!} \max_{s \in \mathbb{R}} |v_1(s) - v_2(s)|$$

e i fattori

$$\frac{L^m a^m}{m!}$$

sono infinitesimi con  $m \rightarrow \infty$  !

**Parte 8**

**Indici**



## Bibliografia

- [1] R.COURANT, F.JOHN *Introduction to Calculus and Analysis*, Volumi I e II, Springer.
- [2] V.SMIRNOV *Corso di Matematiche Superiori*, Volume I e II, Editori Riuniti.
- [3] V.SMIRNOV *Cours de Mathematiques Superieures*, Volume I, II, ... Editions de Moscou.
- [4] N.PISKOUNOV *Calcolo differenziale e integrale*, Volume I e II, Editori Riuniti.
- [5] M.PICONE, G.FICHERA *Corso di Analisi Matematica*, Volume I e II, Veschi, Roma.