ANALISI VETTORIALE

Giovanni Maria Troianiello

31 ottobre 2010

Indice

1 Approfondimenti sull'integrale di Riemann

sec1

Nello studio dell'integrabilità secondo Riemann — e di tanti altri argomenti! — un ruolo fondamentale è svolto dalla nozione di **uniforme continuità in un insieme** I. Si tratta della proprietà di cui diciamo che gode una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se ad ogni $\varepsilon > 0$ si può associare un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ per ogni coppia di punti $x', x'' \in I$ con $|x' - x''| < \delta$.

Ogni f lipschitziana in I, cioè tale che esista una costante $K > 0$ per la quale $|f(x') - f(x'')| \le K|x' - x''|$ al variare di x', x'' in I, è uniformemente continua: basta prendere $\delta = \varepsilon/K$.

Se I è un intervallo sia chiuso che limitato una $f \in C^1(I)$ vi è uniformemente continua. Infatti la sua derivata f' è dotata in I di massimo e di minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass, e di conseguenza è soddisfatta la condizione di Lipschitz: $|f(x') - f(x'')| \le (\max_I |f'|)|x' - x''|$ per $x', x'' \in I$ grazie al Teorema di Lagrange.

Notiamo tuttavia che una comunissima funzione come $\sqrt{x}$ non è C^1, e non è lipschitziana, in $I = [0, 1]$. Vi è, comunque, uniformemente continua? Sì, semplicemente perché vi è continua, ma questo lo vedremo solo nelle considerazioni finali di questa sezione.

Affrontiamo alla luce dell'uniforme continuità il criterio di integrabilità di una funzione f definita e limitata nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$. Affinché esista l'integrale (di Riemann) di f è necessario e sufficiente che ad ogni $\varepsilon > 0$ si possa associare una partizione $\{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b\}$ di $[a, b]$ tale che

$$\sum_{h=1}^{m} \left(\sup_{]x_{h-1}, x_h[} f - \inf_{]x_{h-1}, x_h[} f \right) (x_h - x_{h-1}) < \varepsilon. \tag{1}$$ sum

Ma quando f è continua negli $[x_{h-1}, x_h]$ esistono

$$\sup_{]x_{h-1}, x_h[} f = \max_{[x_{h-1}, x_h]} f = f(x'_h), \qquad \inf_{]x_{h-1}, x_h[} f = \min_{[x_{h-1}, x_h]} f = f(x''_h)$$

per opportuni $x'_h, x''_h \in [x_{h-1}, x_h]$, sicché la condizione (1) diventa

$$\sum_{h=1}^{m} \big(f(x'_h) - f(x''_h) \big) (x_h - x_{h-1}) < \varepsilon.$$

Quest'ultima disuguaglianza è immediata quando in più si sa che f è uniformemente continua in $[a, b]$: richiedendo che $x_h - x_{h-1} < \delta$ per $h = 1, \dots, m$, con $\delta > 0$ tale che $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b - a)$ per ogni coppia di punti $x', x'' \in I$ con $|x' - x''| < \delta$, si ottiene

$$\sum_{h=1}^{m} \big(f(x'_h) - f(x''_h) \big) (x_h - x_{h-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{h=1}^{m} (x_h - x_{h-1}) = \varepsilon.$$

E perché valga l'uniforme continuità una condizione sufficiente, come abbiamo visto, è che f sia lipschitziana, o più sbrigativamente che stia in $C^1([a, b])$. Però con questo approccio già non si ottiene, ad esempio, l'integrabilità di $\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$. È dunque chiaro che vale la pena di passare ad un criterio di integrabilità un po' più maneggevole. Eccolo:

tint' **Teorema 1.1.** *Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se è di classe C^1 al di fuori di un numero finito di punti $\xi_0, \dots, \xi_n$.*

Dimostrazione. Ci si convince facilmente – ricorrendo se necessario ad una opportuna suddivisione dell'intervallo in sottointervalli – che non è restrittivo limitarsi al caso che f sia di classe C^1 in tutto $[a, b]$ privato solo di un estremo, diciamo di $\xi_0 = b$ per fissare le idee.

Dato arbitrariamente $\varepsilon > 0$ scegliamo innanzitutto un $B \in]a,b[$ tale che

$$2 \sup_{[a,b]} |f|(b-B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$ b-B

Applicando poi l'uniforme continuità di f in $[a,B]$ otteniamo l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

per tutti i punti x', x'' di tale intervallo che verificano $|x' - x''| < \delta$.

Sia $\{x_0 = a < \cdots < x_{m-1} = B < x_m = b\}$ una partizione di $[a,b]$ con $x_h - x_{h-1} < \delta$ per $h = 1, \ldots, m-1$. Allora, servendoci fra l'altro delle maggiorazioni

$$\sup_{]x_{m-1},x_m[} f - \inf_{]x_{m-1},x_m[} f \leq \left| \sup_{]x_{m-1},x_m[} f \right| + \left| \inf_{]x_{m-1},x_m[} f \right| \leq 2 \sup_{[a,b]} |f|,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{m} \left(\sup_{]x_{h-1},x_h[} f - \inf_{]x_{h-1},x_h[} f \right) (x_h - x_{h-1}) \\
&= \sum_{h=1}^{m-1} \left(f(x'_h) - f(x''_h) \right) (x_h - x_{h-1}) + \left(\sup_{]x_{m-1},x_m[} f - \inf_{]x_{m-1},x_m[} f \right) (x_m - x_{m-1}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{h=1}^{m-1} (x_h - x_{h-1}) + 2 \left(\sup_{[a,b]} |f| \right) (b-B) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ne segue che la (1) è soddisfatta, e quindi che f è integrabile. □

Questo teorema si applica subito per esempio a $\sqrt{x}$, che è C^1 in $]0,1]$ e C^0 in $[0,1]$, quindi limitata, ma anche a funzioni che in alcuni o tutti gli ξ_k presentino un numero finito di veri e propri salti (discontinuità).

Torniamo adesso dal punto di vista più generale sulla nozione di uniforme continuità in un insieme I. È facile convincersi che essa implica la continuità in ogni punto di I: anzi, a prima vista verrebbe fatto di dire che si tratti proprio della stessa cosa. E invece no, perché non vale il viceversa, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 1.1. Sia $I =]0,1]$ (intervallo limitato, ma non chiuso). La funzione $f(x) = \sin(1/x)$ è di classe $C^0(I)$, ovvero continua *in ogni punto di* I, ma *non uniformemente in* I: la quantità $f(1/(2n\pi + \pi/2)) - f(1/(2n\pi)) = \sin(2n\pi + \pi/2) - \sin(2n\pi)$ è sempre $= 1$, dunque $> \varepsilon$ non appena $\varepsilon < 1$, nonostante che per ogni scelta di $\delta > 0$ si possano sempre trovare infiniti n tali che $0 < 1/(2n\pi) - 1/(2n\pi + \pi/2) < \delta$.

Esempio 1.2. Sia $I = [0, \infty[$ (intervallo chiuso, ma non limitato). La funzione $f(x) = x^2$ è di classe $C^0(I)$, ovvero continua *in ogni punto di* I, ma *non uniformemente in* I: per ogni scelta di $\delta > 0$ e di $x_0 \geq 1/\delta$ la quantità $f(x_0 + \delta/2) - f(x') = (2x_0 + \delta/2)\delta/2$ è $> x_0\delta \geq 1$, dunque $> \varepsilon$ non appena $\varepsilon < 1$, e questo nonostante tutti i punti $x_0, x_0 + \delta/2$ con $x_0 \geq 1/\delta$ distino meno di δ.

Si noti che in ciascuno dei due esempi la f è di classe C^1, anzi C^∞, nell'intervallo I in cui è stata definita, ma con derivata f' illimitata — com'è ovvio, altrimenti il teorema di Lagrange implicherebbe la lipschitzianità (con costante di Lipschitz $K = \sup_I |f'|$) e quindi l'uniforme continuità.

Ebbene: l'importantissimo **Teorema di Heine–Cantor** afferma che quando I è un sottoinsieme sia chiuso che limitato di $\mathbb{R}$, anzi più in generale di un qualunque $\mathbb{R}^N$ (con la distanza tra due punti al posto del modulo della differenza di due numeri), ogni $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I, come ad esempio $\sqrt{x}$ in $I = [0, 1]$, vi è uniformemente continua. Questo ci consente di riformulare, nella portata più generale che è in effetti la sua, la condizione di integrabilità fornita dal Teorema 1.1. Nella dimostrazione abbiamo infatti sfruttato in modo essenziale l'uniforme continuità di f in $[a, B]$, e per ottenerla ci siamo serviti dell'ipotesi che lì f sia di classe C^1. Alla luce del Teorema di Heine–Cantor possiamo adesso dire che basta molto meno, e cioè che il Teorema 1.1 vale con la classe C^1 dell'ipotesi sostituita dalla classe C^0:

tint''' **Teorema 1.2.** *Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se è continua al di fuori di un numero finito di punti $\xi_0, \dots, \xi_n$.*

Nel seguito, pur senza aver dimostrato il Teorema di Heine–Cantor, faremo il più delle volte riferimento (magari tacito) al Teorema 1.2 invece che all'1.1.

2 Integrali impropri e serie

Per $-\infty < a < b \leq \infty$ indichiamo con f una funzione $[a, b[\to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann da a ad B per ogni $B \in]a, b[$.

Se aggiungiamo le ipotesi che (i) b sia finito e (ii) f sia limitata, la funzione è dotata di integrale di Riemann da a a b, con

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{B \to b^-} \int_a^B f(x)\, dx. \qquad (3)$$ int2

Dato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, infatti, sia $B \in]a, b[$ come nella (2) e sia $\{x_0 = a < \cdots < x_{m-1} = B\}$ una partizione di $[a, B]$ per la quale, grazie all'ipotesi di integrabilità su $[a, B]$, risulti

$$\sum_{h=1}^{m-1} \left(\sup_{]x_{h-1}, x_h[} f - \inf_{]x_{h-1}, x_h[} f \right) (x_h - x_{h-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora $\{x_0 = a < \cdots < x_{m-1} = B < x_m = b\}$ è una partizione di $[a, b]$ per la quale risulta

$$\sum_{h=1}^{m} \left(\sup_{]x_{h-1}, x_h[} f - \inf_{]x_{h-1}, x_h[} f \right) (x_h - x_{h-1}) < \varepsilon$$

(cfr. la dimostrazione del Teorema 1.1), da cui l'integrabilità secondo Riemann di f su $[a, b]$. Che poi valga la (3) è conseguenza immediata di

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^B f(x)\, dx \right| = \left| \int_B^b f(t)\, dt \right| \leq \sup_{[a,b]} |f|(b - B) < \varepsilon/2.$$

Lasciamo cadere almeno una tra la (i) e la (ii). Il primo membro della (3) non ha più senso come integrale di Riemann: lo chiamiamo **integrale improprio** di f da a a b. Il limite nel secondo membro (con l'intesa che b^- si legga come ∞ se $b = \infty$) non è detto che esista, né, se esiste, che sia finito. Se esiste diciamo che il suo valore è quello dell'integrale improprio a primo membro, che chiamiamo **convergente** o **divergente** a seconda che sia finito o no.

In maniera analoga a quanto abbiamo appena visto si affronta poi il caso di una funzione f definita su un $]a,b]$, dove $-\infty \le a < b < \infty$, e integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[A,b]$, $a < A < b$, col valore dell'integrale improprio dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+} \int_A^b f(x)\,dx \tag{4}$$ int3

nel caso che il limite esista (e con l'intesa che a^+ si legga come $-\infty$ se $a = -\infty$).

Se infine f è una funzione definita su un $]a,b[$ con $-\infty \le a < b \le \infty$ e integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[A,B]$ con $a < A < B < b$, il suo integrale improprio da a a b vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+, B\to b^-} \int_A^B f(x)\,dx \tag{5}$$ int4

nel caso che entrambi i limiti — indipendenti! — esistano senza essere uguali uno a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$.

e2.1 **Esempio 2.1.** (i) Sia $f(x) = x^{-\alpha}$, $0 < K \le x < \infty$. La funzione

$$\int_K^B x^{-\alpha}\,dx$$

vale $(B^{1-\alpha} - K^{1-\alpha})/(1-\alpha)$ se $\alpha \ne 1$ e $\log B - \log K$ se $\alpha = 1$. Ne segue che $x^{-\alpha}$ è dotata di integrale improprio da 1 a ∞ convergente (e uguale a $K^{1-\alpha}/(\alpha-1)$) o divergente (a $+\infty$) a seconda che $\alpha > 1$ o $\alpha \le 1$.

(ii) Sia $f(x) = x^{-\alpha}$, $0 < x \le K < \infty$. La funzione

$$\int_A^K x^{-\alpha}\,dx$$

vale $(K^{1-\alpha} - A^{1-\alpha})/(1-\alpha)$ se $\alpha \ne 1$ e $\log K - \log A$ se $\alpha = 1$. Ne segue che $x^{-\alpha}$ è dotata di integrale improprio da 0 a 1 convergente (e uguale a $K^{1-\alpha}/(1-\alpha)$) o divergente (a $+\infty$) a seconda che $\alpha < 1$ o $\alpha \ge 1$.

3 Criterio del confronto, convergenza assoluta, convergenza condizionata

Una serie reale $\sum_{n=K}^{\infty} a_n$ (dove K è qualche naturale) si può scrivere come integrale improprio della funzione

$$[K,\infty[\ni x \mapsto \sum_{n=K}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{[n,n+1[}(x)$$

(che su ogni intervallo limitato soddisfa l'ipotesi del Teorema 1.1 e di conseguenza è integrabile). Ciò rende interessante, nel contesto dell'integrazione impropria, approfondire alcune questioni relative alle serie.

Ricordiamo il **criterio del confronto** per le *serie a termini non negativi*: se due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ verificano definitivamente

$$0 \le a_n \le b_n$$

la convergenza della $\sum b_n$ implica quella della $\sum a_n$, mentre la divergenza della $\sum a_n$ implica quella della $\sum b_n$.

Quando i termini di una serie soddisfano, da un certo punto in poi, le disuguaglianze strette $a_n > 0$, un'utile applicazione del criterio del confronto è il **criterio del rapporto**: condizione sufficiente affinché $\sum a_n$ converga è che esista un numero $\varrho \in]0,1[$ tale che

$$a_{n+1}/a_n \leq \varrho \quad \text{per } n \geq K \tag{6}$$ `rapporto`

dove K è un opportuno naturale. Infatti dalle disuguaglianze

$$a_{K+1} \leq a_K\varrho, \quad a_{K+2} \leq a_{K+1}\varrho, \quad \ldots, \quad a_{n+K} \leq a_{n-1+K}\varrho$$

si ricava che

$$a_{n+K} \leq a_{n+K-1}\varrho \leq \cdots \leq a_{K+1}\varrho^{n-1} \leq a_K\varrho^n$$

e quindi che la serie $\sum_n a_{n+K}$ è maggiorata termine a termine dalla serie convergente $\sum_n a_K\varrho^n$ (prodotto di una costante per la serie geometrica di ragione ϱ). Se il rapporto a_{n+1}/a_n tende a un limite $L < 1$, la (6) vale con un qualunque ϱ fissato in $]L,1[$ a patto di prendere $K = K(\varrho)$ sufficientemente grande.

Esempio 3.1. (i) Siccome

$$\frac{1}{(n+1)!}n! = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

la serie $\sum_n 1/n!$ converge (e si dimostra che la sua somma è e).

(ii) La serie $\sum_n n!/n^n$ converge perché

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1.$$

Se a_{n+1}/a_n tende a un limite $L > 1$ la serie diverge, perché per un opportuno $\nu \in \mathbb{N}$ i suoi addendi verificano $a_{n+1}/a_n \geq 1$ per $n \geq \nu$, e quindi $a_{\nu+p} \geq a_\nu$ per $p \in \mathbb{N}$: viene meno la condizione $a_n \to 0$ che sappiamo essere necessaria per la convergenza.

Se $a_{n+1}/a_n \to 1$ può accadere sia che la serie converga, come la $\sum n^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$, e sia che diverga, come la $\sum n^{-\alpha}$ con $\alpha \leq 1$.

E se i termini a_n della serie non sono di segno costante? Si può passare allo studio della serie $\sum |a_n|$ dei moduli e controllare se converge. In tal caso, essa soddisfa la condizione di Cauchy. Ma allora soddisfa la condizione di Cauchy anche la $\sum a_n$: infatti il primo membro della disuguaglianza

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+1}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+1}|$$

è minore di $\varepsilon > 0$ se lo è il secondo membro. Ne segue allora anche la convergenza, che chiamiamo **assoluta**, della serie di partenza $\sum a_n$.

Torniamo agli integrali impropri. Nella maggior parte dei casi di specifiche funzioni bisogna aspettarsi che il calcolo esplicito dei limiti che compaiono nelle formulazioni generali a secondo membro della (3) o della (4) o della (5) si riveli semplicemente impossibile. È dunque utile poter disporre di un criterio di convergenza/divergenza di integrali impropri, che riguarda *funzioni non negative* e costituisce la generalizzazione del criterio del confronto per serie a termini non negativi.

tint1 **Teorema 3.1 (del confronto).** *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, dove $-\infty < a < b \leq \infty$, funzioni entrambe integrabili secondo Riemann da a a B per ogni $B \in [a, b[$ ma né l'una né l'altra da a a b, con*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per } a \leq x < b. \tag{7}$$ int5

Allora l'integrale improprio da a a b di f converge se converge quello di g, mentre quello di g diverge se diverge quello di f.

Dimostrazione. Dalla (7) segue che

$$\int_a^B f(x)\,dx \leq \int_a^B g(x)\,dx.$$

Entrambi gli integrali sono funzioni crescenti della B dal momento che i loro integrandi sono ≥ 0, e di conseguenza ammettono limite per $B \to b^-$. La conclusione segue subito.

□

Proseguiamo con l'analogia al (e in effetti con la generalizzazione del) caso delle serie. Su $[a, B] \subset [a, b[$ l'integrabilità secondo Riemann di f implica quella del modulo $|f|$, della parte positiva f^+ e della parte negativa f^-; se da a a b converge l'integrale improprio di $|f|$ diciamo che quello di f **converge assolutamente**, e grazie al Teorema del confronto vale il

tint2 **Teorema 3.2.** *Per $-\infty < a < b \leq \infty$ l'integrale improprio di una $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann da a a B per ogni $B \in [a, b[$ ma non da a a b, se è assolutamente convergente è anche convergente.*

Dimostrazione. Siccome

$$0 \leq f^+, f^- \leq |f|$$

la convergenza dell'integrale improprio di $|f|$ implica quella degli integrali impropri di f^+ e di f^-, dunque quella di $f = f^+ - f^-$. □

Il precedente enunciato non si inverte: può ben accadere che un integrale improprio converga ma non assolutamente, ovvero che converga **condizionatamente**.

ex32 **Esempio 3.2.** L'integrale improprio (detto **di Dirichlet**)

$$D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge condizionatamente. Per vedere questo basta limitarsi all'intervallo di integrazione $[1, \infty[$, visto che l'integrando, posto uguale a un qualunque numero reale per $x = 0$, è integrabile secondo Riemann da 0 a 1.

Per $1 < K < \infty$ si ottiene, integrando per parti,

$$\int_1^K \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^K - \int_1^K \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Siccome l'integrando nel secondo membro è maggiorato in valore assoluto dalla funzione x^{-2} che è dotata di integrale improprio convergente da 1 a ∞, il limite per $K \to \infty$ esiste finito. Dunque D è un integrale improprio convergente. Non assolutamente convergente, però:

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \geq \frac{1}{(2k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x\,dx = \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos x\Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

e quindi

$$D \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} = \infty.$$

In maniera analoga si verifica che l'integrale improprio

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

converge, ma non assolutamente.

A questo punto si verifica anche che converge, ma non assolutamente, l'integrale improprio

$$F = \int_1^{\infty} \sin x^2 \, dx :$$

la sostituzione $y = x^2$ dà infatti

$$F = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{1}{2} J.$$

Il prossimo esempio estende, a partire dall'Esempio 2.1, la classe delle funzioni su cui appoggiarsi per l'utilizzo pratico del criterio del confronto.

Esempio 3.3. (i) L'integrale improprio su $\mathbb{R}$ di $1/(1+|x|^\alpha)$ converge o diverge a seconda che $\alpha > 1$ o $\alpha \leq 1$. Per convincersene basta limitarsi alla semiretta $x \geq K > 0$ (per $-K \leq x \leq K$ non ci sono problemi e per $x \leq -K$ si utilizza la simmetria del modulo): siccome $\lim_{x\to\infty} x^\alpha/(1+x^\alpha) = 1$, esiste un $K > 0$ tale che

$$\frac{x^\alpha}{2} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq 2x^\alpha \quad \text{per } x \geq K$$

e si conclude tenendo conto dell'Esercizio 2.1 (i).

(ii) Per $-\infty < a < b < \infty$ gli integrali impropri di $1/(x-a)^\alpha$ e di $1/(b-x)^\alpha$ da a a b convergono o divergono a seconda che $\alpha < 1$ o $\alpha \geq 1$. Infatti si vede, sostituendo $y = x-a$ nel primo e $y = b-x$ nel secondo, che entrambi sono uguali a

$$\int_0^{b-a} \frac{dy}{y^\alpha}$$

e per concludere si tiene conto dell'Esercizio 2.1 (ii).

Il criterio del confronto per la convergenza/divergenza degli integrali impropri si può applicare in particolare ad una serie $\sum_n a_n$ (a termini ≥ 0) quando esiste una funzione f continua e decrescente in una semiretta $[K,\infty[$ $(K \in \mathbb{N})$ che verifica $f(n) = a_n$ e quindi $a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n$. In tal caso infatti risulta

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq a_n$$

da cui

$$\sum_{n=K}^{\infty} a_{n+1} \leq \int_K^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=K}^{\infty} a_n,$$

e si arriva al **criterio integrale** di convergenza o divergenza per le serie: se l'integrale improprio di f converge, converge $\sum_n a_{n+1}$ e quindi anche $\sum_n a_n$; se l'integrale improprio di f diverge, $\sum_n a_n$ diverge.

Questo criterio può rivelarsi uno strumento prezioso quando gli altri criteri sono di applicazione un po' troppo complicata. Si pensi già alla serie armonica generalizzata $\sum n^{-\alpha}$: dall'Esempio 2.1 segue subito la convergenza o la divergenza a seconda che $\alpha \leq 1$ o $\alpha > 1$. Ancora più illuminante è il caso della $\sum (n \log n)^{-1}$: il confronto con le serie armoniche generalizzate non fornisce nessuna informazione che permetta di concludere, mentre basta osservare che la funzione $(x \log x)^{-1}$, essendo la derivata di $\log(\log x)$, ha integrale improprio divergente, per ottenere la divergenza della serie.

L'analogia tra integrali impropri e serie deve peraltro essere maneggiata con cautela. Se, ad esempio, una serie $\sum a_n$ converge, sia pure solo semplicemente, il suo termine generale a_n è infinitesimo per $n \to \infty$, mentre se l'integrale improprio di una funzione f su un intervallo superiormente illimitato converge non è affatto detto che $f(x) \to 0$ per $x \to \infty$: si pensi a $f(x) = \sin x^2$, $1 \leq x < \infty$ (Esempio 3.2), o ancora meglio alla funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{[n, n+1/n^3]}(x),$$

addirittura illimitata su ogni semiretta $[K, \infty[$ eppure dotata di integrale improprio assolutamente convergente uguale a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Dunque non si può pensare di estendere dalle serie agli integrali impropri una qualche versione — puntuale! — del criterio di convergenza di Cauchy (e infatti per dimostrare col Teorema 3.2 che la convergenza assoluta implica la convergenza siamo ricorsi al Teorema del confronto 3.1, mentre per le serie si utilizza tranquillamente Cauchy).

4 Integrali di Riemann dipendenti da parametri

Nel corso di Calcolo 1 si incontrano delle particolari, e importantissime, funzioni definite mediante integrali: quelle della forma $[c, d] \ni x \mapsto \int_c^x f(t)\, dt$. Passiamo adesso all'ambito delle funzioni di più variabili, servendoci in maniera rilevante dell'uniforme continuità di una funzione continua in un chiuso e limitato C garantita dal Teorema di Heine–Cantor [1].

Cominciamo col

T6 **Teorema 4.1.** *Sia f una funzione continua in $I \times [c, d]$ con I intervallo chiuso e limitato, $-\infty < c < d < \infty$. Allora*

$$F(x) = \int_c^d f(x, t)\, dt$$

è continua in I. Se poi si suppone che per ogni $t \in [c, d]$ esista la derivata $f_x(x, t)$ di $I \ni x \mapsto f(x, t)$ e che $f_x \in C^0(I \times [c, d])$, allora anche F è dotata di derivata continua

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, t)\, dt \tag{8}$$ L'

in I.

Dimostrazione. Siano $x_0, x \in I$. Grazie all'uniforme continuità della funzione f nel rettangolo chiuso e limitato $I \times [c, d]$ possiamo associare ad ogni $\varepsilon > 0$ un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq \varepsilon \quad \text{per } t \in [c, d]$$

[1] Anche in più variabili l'uniforme continuità in C segue, senza passare per Heine–Cantor, da proprietà più forti della continuità, come la lipschitzianità. Ma quest'ultima, senza qualche ulteriore ipotesi su C, come ad esempio la convessità che consente di applicare su ogni segmento contenuto in C il Teorema del valor medio in una variabile, non è più a sua volta conseguenza automatica della regolarità C^1.

e quindi, maggiorando in modulo l'incremento

$$F(x) - F(x_0) = \int_c^d [f(x,t) - f(x_0,t)]\, dt,$$

ottenere

$$|F(x) - F(x_0)| \le \int_c^d |f(x,t) - f(x_0,t)|\, dt \le \varepsilon(d-c)$$

purché $x \in I$ verifichi $|x - x_0| \le \delta$. Ciò mostra la continuità in x_0.

Passiamo alla derivabilità in x_0, sfruttando stavolta l'uniforme continuità in $I \times [c,d]$ della funzione f_x. Sia dunque dato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, e sia $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f_x(x,t) - f_x(x_0,t)| \le \varepsilon \quad \text{per } t \in [c,d] \tag{9}$$ J

se $x \in I$ con $|x - x_0| \le \delta$. Sia $0 < |h| \le \delta$ tale che $x_0 + h \in I$. Applichiamo il teorema di Lagrange: ad ogni $t \in [c,d]$ corrisponde un $\eta \in]0,1[$, che dipende anche da h, tale che

$$\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h} = f_x(x_0 + \eta h, t)$$

(e, sebbene non si sappia nulla della dipendenza di η da t, la funzione $t \mapsto f_x(x_0 + \eta h, t)$ è continua in $[c,d]$ perché è uguale a $(f(x_0+h,t) - f(x_0,t))/h$). Dunque, maggiorando in modulo la differenza

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - \int_c^d f_x(x_0,t)\, dt &= \int_c^d \left[\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h} - f_x(x_0,t) \right] dt \\ &= \int_c^d [f_x(x_0 + \eta h, t) - f_x(x_0,t)]\, dt \end{aligned}$$

otteniamo

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - \int_a^b f_x(x_0,t)\, dt \right| \le \int_c^d |f_x(x_0 + \eta h, t) - f_x(x_0,t)|\, dt < \varepsilon(d-c).$$

A questo punto la (8) per $x = x_0$ segue dall'arbitrarietà di ε. Applicando poi a $f_x(x,t)$ il precedente risultato di continuità si ottiene anche la continuità di F' in I. $\square$

Naturalmente nel Teorema 4.1 gli estremi di integrazione possono essere scambiati tra di loro: questo significa semplicemente passare da F e F' a $G = -F$ e $G' = -F'$.

Adesso facciamo variare gli estremi di integrazione.

T66 **Teorema 4.2.** *Sia f continua in $I \times [c,d]$. In $C = I \times [c,d] \times [c,d]$ la funzione*

$$\Phi(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\, dt$$

è continua e dotata di derivate parziali continue

$$\Phi_y(x,y,z) = -f(x,y), \quad \Phi_z(x,y,z) = f(x,z). \tag{10}$$ L''

Se poi si aggiunge l'ipotesi che per ogni $t \in [c,d]$ esista la derivata $f_x(x,t)$ di $I \ni x \mapsto f(x,t)$ e che $f_x \in C^0(I \times [c,d])$, allora per ogni $(y,z) \in [c,d] \times [c,d]$ la $I \ni x \mapsto \Phi(x,y,z)$ è dotata anche della derivata

$$\Phi_x(x,y,z) = \int_y^z f_x(x,t)\, dt, \tag{11}$$ N'

a sua volta continua in C.

Dimostrazione. Per $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in C$ scriviamo $\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)$ come somma

$$\int_{y_0}^{z_0} [f(x,t) - f(x_0,t)]\, dt + \int_{y}^{y_0} f(x,t)\, dt + \int_{z_0}^{z} f(x,t)\, dt. \tag{12}$$ U'

Il secondo e terzo addendo sono rispettivamente maggiorati in modulo dai prodotti di $|y - y_0|$ e di $|z - z_0|$ per il massimo di $|f|$ su $I \times [c, d]$. Sia ε un qualunque reale positivo. Grazie al Teorema 4.1 sappiamo che il primo addendo della (12) è maggiorato in valore assoluto da ε purché $|x - x_0|$ sia maggiorato da un opportuno $\delta = \delta_\varepsilon > 0$. Poichè nulla impedisce di prendere $\delta \leq \varepsilon$, la quantità $|\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)|$ è maggiorata dal prodotto di una costante per ε non appena $(x, y, z) \in K$ verifica $|x - x_0| \leq \delta$, $|y - y_0| \leq \delta$, $|z - z_0| \leq \delta$, e questo dimostra che in ogni punto $(x_0, y_0, z_0) \in K$ la Φ è continua.

Le (10) sono conseguenze immediate del teorema fondamentale del calcolo integrale applicato, per ogni fissato x, alla funzione $t \mapsto f(x, t)$.

Per ottenere la (11) in un punto (x_0, y_0, z_0) di K basta applicare il risultato di derivazione del Teorema 4.1 alla funzione

$$x \mapsto \int_{y_0}^{z_0} f(x,t)\, dt;$$

applicando poi il precedente risultato di continuità con Φ sostituita da Φ_x si ottiene la continuità di quest'ultima in (x_0, y_0, z_0). □

oss42 **Osservazione 4.1.** Nelle due precedenti dimostrazioni è stata utilizzata l'ipotesi che I sia, oltre che chiuso, anche limitato. Però esse si ripetono tali e quali con le intersezioni $[x_0 - r, x_0 + r] \cap I$, $r > 0$, al posto di I, per cui i Teoremi 4.1 e 4.2 continuano a valere con l'intervallo I chiuso ma non limitato.

Dal teorema precedente possiamo finalmente dedurre il

T5 **Teorema 4.3.** *Sia $f \in C^0(I \times [c, d])$ con I intervallo chiuso, $-\infty < c < d < \infty$, e siano $\varphi, \psi \in C^0(I)$ tali che $c \leq \varphi(x), \psi(x) \leq d$. La funzione*

$$G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\, dt$$

è continua su I; se poi si aggiungono le ipotesi che per ogni $t \in [c, d]$ esista la derivata $f_x(x, t)$ di $I \ni x \mapsto f(x, t)$ continua in $I \times [c, d]$ e che φ, ψ appartengano a $C^1(I)$, allora G è dotata di derivata continua

$$G'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,t)\, dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

in I.

Dimostrazione. Continuità della funzione composta $G(x) = \Phi(x, \varphi(x), \psi(x))$; derivabilità della funzione composta (dal momento che Φ è C^1), e dunque

$$G'(x) = \Phi_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + \Phi_y(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \Phi_z(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x),$$

poi le (10) e la (11).

□

Il Teorema 4.3 ha un'applicazione importante nel **metodo di Duhamel** per la risoluzione di equazioni differenziali lineari *non omogenee a coefficienti costanti*. Cominciamo dal I ordine. Per $a \in \mathbb{R}$ e $f \in C^0(]c,d[)$ si verifica in un attimo che la funzione

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)} f(s)\, ds \tag{13}$$ ord1

soddisfa l'equazione lineare $y' + ay = f(t)$ (insieme alla condizione di Cauchy $y(t_0) = 1$): non c'è bisogno di ricorrere al Teorema 4.3, visto che il secondo membro si riscrive

$$e^{-at} \int_{t_0}^{t} e^{as} f(s)\, ds$$

con l'integrando che non dipende dal parametro t, e di conseguenza si deriva elementarmente. Tuttavia la (13) è istruttiva, perché fornisce al I ordine la **formula di Duhamel**

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t-s) f(s)\, ds \tag{14}$$ P'

con $Y(t)$ che qui denota la soluzione e^{-at} dell'equazione omogenea $Y' + aY = 0$ che soddisfa la condizione di Cauchy $Y(0) = 1$.

Passiamo al II ordine.

TDu **Teorema 4.4.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(]c,d[)$. La funzione* (14) *con $Y(t)$ soluzione del problema di Cauchy*

$$Y'' + aY' + bY = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

è una soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + ay' + by = f(t), \tag{15}$$ Du

e più esattamente l'unica ad annullarsi in t_0 insieme alla sua derivata prima.

Dimostrazione. Adesso bisogna applicare, per due volte, la regola di derivazione degli integrali dipendenti da un parametro. Si ottiene prima

$$y'(t) = Y(0)f(t) + \int_{t_0}^{t} Y'(t-s) f(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} Y'(t-s) f(s)\, ds,$$

poi

$$y''(t) = Y'(0)f(t) + \int_{t_0}^{t} Y''(t-s) f(s)\, ds = f(t) + \int_{t_0}^{t} Y''(t-s) f(s)\, ds$$

e infine

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} [Y''(t-s) + aY'(t-s) + bY(t-s)] f(s)\, ds = f(t)$$

cioè la tesi. (Abbiamo utilizzato l'equazione omogenea soddisfatta da Y nei punti $t - s$.)

$\square$

Esempio 4.1. Sia $b \in \mathbb{R}$. L'integrale generale dell'equazione

$$y'' + by = f(t)$$

vale

$$c_1 \sin t\sqrt{b} + c_2 \cos t\sqrt{b} + \int_{t_0}^{t} \frac{\sin (t-s)\sqrt{b}}{\sqrt{b}} f(s)\, ds$$

per $b > 0$, e invece

$$c_1 e^{t\sqrt{-b}} + c_2 e^{-t\sqrt{-b}} + \int_{t_0}^{t} \frac{e^{(t-s)\sqrt{-b}} - e^{-(t-s)\sqrt{-b}}}{2\sqrt{-b}} f(s)\, ds$$

per $b < 0$.

Prendiamo in particolare $b = 1$, $f(t) = 1/\cos t$ per $-\pi/2 < t < \pi/2$. La funzione (14) con $t_0 = 0$ è allora

$$\int_0^t \frac{\sin(t-s)}{\cos s}\, ds = \int_0^t \frac{\sin t \cos s - \cos t \sin s}{\cos s}\, ds = t \sin t - \cos t \int_0^t \frac{\sin s}{\cos s}\, ds$$
$$= t \sin t + \cos t \log(\cos t).$$

Il metodo di Duhamel che abbiamo finora illustrato per le equazioni del I e del II ordine si trasporta immediatamente a un qualunque ordine N: per $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}$ e $f \in C^0(]c,d[)$ l'equazione

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

è soddisfatta dalla funzione $y(t)$ che ha l'espressione (14) con $Y(t)$ soluzione adesso dell'omogenea

$$Y^{(N)} + a_{N-1}Y^{(N-1)} + \cdots + a_1 Y' + a_0 Y = 0$$

che soddisfa le condizioni di Cauchy $Y(0) = Y'(0) = \cdots = Y^{(N-2)}(0) = 0$, $Y^{(N-1)}(0) = 1$. La verifica — troppo lunga! — si fa con N derivazioni successive attraverso il Teorema 4.3. Qui ci limitiamo ad osservare che nel caso particolarissimo $a_0 = \cdots = a_{N-1} = 0$ la funzione $Y(t)$ richiesta è la $t^{n-1}/(n-1)!$, per cui

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds$$

è la soluzione di $y^{(N)} = f(t)$ che si annulla in t_0 insieme a tutte le sue derivate fino all'$(n-1)$–esima.

5 Integrali impropri dipendenti da parametri

Per dimostrare, tra un attimo, il Teorema 5.2 ci serviremo della definizione e del risultato seguenti.

Sia data una successione di funzioni F_n definite su un intervallo I. Le F_n **convergono uniformemente** in I a una funzione F se, dato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu = \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{per } x \in I, n \geq \nu. \tag{16}$$ unif

T6''' **Teorema 5.1.** *(i) Se le funzioni $F_n : I \to \mathbb{R}$ sono continue in un punto $x_0 \in I$ e convergono uniformemente in I, allora anche $F = \lim_n F_n$ è una funzione continua in x_0.*

(ii) Se le funzioni $F_n : I \to \mathbb{R}$ sono continue in ogni punto di I e convergono uniformemente in I, allora $F = \lim F_n$ verifica

$$\lim_n \int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx \quad \textit{per } a, b \in I. \tag{17}$$ $\boxed{\texttt{unif'}}$

(iii) Se le funzioni $F_n : I \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1 in I, con $\{F_n(x_0)\}$ convergente per qualche scelta di $x_0 \in I$ e le F_n' uniformemente convergenti in I, allora $F = \lim_n F_n$ è di classe C^1 con

$$\lim_n F_n' = F'. \tag{18}$$ $\boxed{\texttt{unif'''}}$

Dimostrazione. (i) Fissiamo arbitrariamente un $\varepsilon > 0$ e associamogli $\nu \in \mathbb{N}$ in modo che valga la (16). Grazie all'ipotesi di continuità di ogni F_n in x_0 esiste un $\delta = \delta_{\varepsilon,\nu} > 0$ tale che

$$|F_\nu(x) - F_\nu(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } x \in I, |x - x_0| < \delta.$$

Allora (tecnica dei tre ε)

$$|F(x) - F(x_0)| \le |F(x) - F_\nu(x)| + |F_\nu(x) - F_\nu(x_0)| + |F_\nu(x_0) - F(x_0)| < 3\varepsilon,$$

da cui la continuità di F in x_0.

(ii) Innanzitutto sottolineiamo che F è continua in ogni punto di I grazie al punto (i), e di conseguenza è integrabile al pari di tutte le F_n su ogni intervallo chiuso e limitato di I. Fissiamo poi un arbitrario $\varepsilon > 0$ e associamogli $\nu \in \mathbb{N}$ in modo che valga la (16). Allora

$$\left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b |F(x) - F_n(x)|\,dx < \varepsilon(b-a) \quad \text{per } n \ge \nu.$$

Ciò prova la (17).

(iii) Per ogni $x \in I$ il Teorema fondamentale del Calcolo dà

$$F_n(x) = F_n(x_0) + \int_{x_0}^x F_n'(t)\,dt.$$

Ponendo $\alpha = \lim_n F_n(x_0)$ e $G = \lim_n F'$ vediamo che, in virtù del punto (ii), il secondo membro tende a

$$\alpha + \int_{x_0}^x G(t)\,dt. \tag{19}$$ $\boxed{\texttt{unif''}}$

Ma allora $F(x) = \lim_n F_n(x)$ esiste e assume il valore (19) per ogni x, da cui $\alpha = F(x_0)$ e, derivando, $G(x) = F'(x)$.

□

Osservazione 5.1. Nel punto (i) del teorema l'ipotesi di uniforme convergenza delle F_n è essenziale, come si vede con semplicissimi esempio: per dirne uno, quello delle funzioni continue $F_n(x) = 1 - e^{-nx^2}$, $x \in I = \mathbb{R}$, che convergono puntualmente alla funzione discontinua che vale 0 in 0 e ad 1 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Invece sia la (17) e sia la (18) valgono sotto ipotesi molto più deboli dell'uniforme convergenza rispettivamente delle F_n e delle F_n'.

Estendiamo il Teorema 4.1 agli integrali impropri.

T6' **Teorema 5.2.** *Sia f una funzione continua in $I\times]c,d[$ con I intervallo chiuso, $-\infty \le c < d \le \infty$. Supponiamo che*

$$|f(x,t)| \le g(t) \quad per \;\; (x,t) \in I\times]c,d[\tag{20}$$ Q'

con g funzione reale ≥ 0 dotata di integrale improprio (assolutamente) convergente su $]c,d[$. Allora la funzione

$$I \ni x \mapsto F(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$$

è continua. Se poi si aggiungono le ipotesi che per ogni $t \in]c,d[$ esista la derivata $f_x(x,t)$ di $I \ni x \mapsto f(x,t)$, che $f_x \in C^0(I\times]c,d[)$ e che valga una disuguaglianza

$$|f_x(x,t)| \le g(t) \quad per \;\; (x,t) \in I\times]c,d[, \tag{21}$$ eS'

allora la funzione F sta in $C^1(I)$ con

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x,t)\,dt.$$

Dimostrazione. Siano $\{c_n\}, \{d_n\} \subset]c,d[$ tali che $c_n \to c$ e $d_n \to d$.

Dal Teorema 4.1 (e alla luce dell'Osservazione 4.1 se I è illimitato) sappiamo che per ogni n la funzione

$$I \ni x \mapsto F_n(x) = \int_{c_n}^{d_n} f(x,t)\,dt \tag{22}$$ param

è continua. D'altra parte, dalla convergenza dell'integrale improprio di g segue che, dato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu = \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_c^{c_n} g(t)\,dt + \int_{d_n}^d g(t)\,dt \le \varepsilon \quad \text{per } n \ge \nu. \tag{23}$$ eqg

Dunque la (20), oltre a garantire che per ogni $x \in I$ la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è dotata di integrale improprio assolutamente convergente, ovvero che $F(x)$ è ben definita, fornisce anche la disuguaglianza

$$\int_c^{c_n} |f(x,t)|\,dt + \int_{d_n}^d |f(x,t)|\,dt \le \varepsilon \quad \text{per } x \in I, n \ge \nu.$$

Ma allora

$$|F(x) - F_n(x)| \le \left| \int_c^{c_n} f(x,t)\,dt \right| + \left| \int_{d_n}^d f(x,t)\,dt \right| \le \varepsilon \quad \text{per } x \in I, n \ge \nu.$$

Ne segue che in I la successione delle funzioni continue $F_n(x)$ converge uniformemente in I ad $F(x)$, e quindi (Teorema 5.1 (i)) che quest'ultima è continua.

In maniera analoga, sotto l'ipotesi di derivabilità di $x \mapsto f(x,t)$ si ricava innanzitutto, grazie al Teorema 4.1 (e all'Osservazione 4.1 se I è illimitato) , che per ogni n la funzione (22) è derivabile in I con

$$F_n'(x) = \int_{a_n}^{b_n} f_x(x,t)\,dt.$$

Dalla (21) segue poi che per ogni $x \in I$ la funzione $t \mapsto f_x(x,t)$ è dotata di integrale improprio assolutamente convergente, ovvero che la funzione

$$I \ni x \mapsto G(x) = \int_c^d f_x(x,t)\,dt$$

è ben definita; inoltre $G \in C^0(I)$ grazie alla prima parte del teorema.

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fissato, e sia di nuovo $\nu = \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che valga la (23). Allora risulta

$$\int_c^{c_n} |f_x(x,t)|\, dt + \int_{d_n}^d |f_x(x,t)|\, dt \le \varepsilon \quad \text{per } x \in I, n \ge \nu$$

per cui

$$|G(x) - F_n'(x)| \le \left| \int_c^{c_n} f_x(x,t)\, dt \right| + \left| \int_{d_n}^d f_x(x,t)\, dt \right| \le \varepsilon \quad \text{per } x \in I, n \ge \nu.$$

Ne segue che la successione delle funzioni continue $F_n'(x)$ converge uniformemente a $G(x)$, e quindi (Teorema 5.1 (iii)) $F(x) = \lim_n F_n(x)$ è derivabile con $F'(x) = G(x)$.

□

Naturalmente non è affatto restrittivo richiedere che le disuguaglianze (20) e (21) valgano con la stessa funzione $g(t)$: se si parte da due diverse funzioni nei secondi membri basta prendere la loro somma per ricondursi alle ipotesi del teorema.

Esempio 5.1. Fissiamo x in $I = [a, \infty[$, $a > 0$. Su $]c, d[=]0, \infty[$ sia la funzione $t \mapsto f(x,t) = t^{-1}e^{-tx} \sin t$ che la sua derivata $t \mapsto f_x(x,t) = -e^{-tx} \sin t$ sono maggiorate in modulo dalla funzione continua $g(t) = e^{-ta}$, che ha integrale improprio assolutamente convergente. Dunque la

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

è continua e anzi derivabile per $x \ge a$, con

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin t\, dt.$$

Esempio 5.2. La funzione $f(x,t) = xe^{-xt}$ soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 4.1 con $I = \mathbb{R}$ e $[c, d]$ qualunque. Si può dedurre da questo che il suo integrale di Riemann su $[c, d]$ è una funzione continua, anzi derivabile della x; più direttamente, basta tener conto che $xe^{-xt} = (-e^{-xt})'$ e applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo. Invece

$$F(x) = \int_0^\infty xe^{-xt}\, dt = -e^{-xt}\Big|_0^\infty$$

è definita su $[0, \infty[$, ma non è continua in 0:

$$F(0) = 0, \quad F(x) = 1 \quad \text{per } x > 0$$

(e in qualunque intervallo $[0, b]$ si ha convergenza puntuale ma non uniforme di

$$F_n(x) = \int_0^n xe^{-xt}\, dt = -e^{-xt}\Big|_0^n$$

a $F(x)$: cfr il Teorema 5.1 (i)). Infatti non si applica il Teorema 5.2: non esiste una funzione $]0, \infty[\ni t \mapsto g(t)$ dotata di integrale improprio convergente e tale che valga la (20), dal momento che per $1/t \le b$ il $\sup_{0 \le x \le b} xe^{-xt}$ vale $(et)^{-1}$.

Per gli integrali impropri *semplicemente* convergenti non vale il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, come mostra il seguente

Esempio 5.3. Per $x > 0$ la funzione

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\, dt$$

è costante, come si vede operando il cambiamento $u = tx$ della variabile d'integrazione. Dunque $F'(x) = 0$, mentre l'integrale improprio della derivata della funzione $x \mapsto (\sin tx)/t$, cioè di $\cos tx$, non solo non vale identicamente 0, ma non è neppure convergente.

6 Il Teorema di Dini per funzioni scalari

Nel piano euclideo l'equazione di una retta

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

con a, b, c numeri reali ed $a^2+b^2 > 0$ è risolubile rispetto a y in funzione della x (con $y = -ax/b-c/b$) se $F_y = b \neq 0$, cioè *se la retta non è verticale*, e rispetto a x in funzione della y (con $x = -by/a-c/a$) se $F_x = a \neq 0$, cioè *se la retta non è orizzontale*. Per farla breve, qui *tutto* l'insieme dei punti del piano che verificano l'equazione è *sempre* il grafico di una funzione della x o della y a seconda che $F_y \neq 0$ o $F_x \neq 0$ (senza che un caso escluda necessariamente l'altro).

Se però F è una generica funzione $\Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ non è affatto detto che l'insieme dei punti $(x, y) \in \Omega$ che soddisfano l'equazione $F(x, y) = 0$ sia sempre il grafico di una funzione $y = f(x)$ o di una funzione $x = g(y)$ — e nemmeno che sia una "curva", né, perfino, che sia $\neq \emptyset$. Per rendersene conto già basterebbe osservare che un qualunque sottoinsieme S del piano coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione $F(x, y) = \mathbf{1}_S(x, y) - 1 = 0$. Ma questa è una F che in generale non ha la minima regolarità. Ebbene, prendiamo una F regolarissima:

Esempio 6.1. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ sia

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r.$$

L'insieme Z delle soluzioni dell'equazione $F(x, y) = 0$ è vuoto se $r < 0$ e coincide col solo punto $(0, 0)$ se $r = 0$: dunque non è un grafico in nessuno dei due casi. Sia $r > 0$. Neanche allora è vero che *tutto* Z, essendo la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{r}$, sia un grafico. Però Z è *localmente* grafico di una funzione o della x oppure della y (senza che un caso escluda necessariamente l'altro). Vediamo i dettagli.

- In un opportuno intorno aperto A di un punto $(x_0, y_0) \in Z$ tale che $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$, per cui *la retta tangente alla circonferenza nel punto non è verticale*, i punti di Z sono quelli del grafico di $y = \sqrt{r - x^2}$ o di $y = -\sqrt{r - x^2}$ a seconda che $y_0 > 0$ (e allora A è l'intero semipiano delle $y > 0$) o $y_0 < 0$ (e allora A è l'intero semipiano delle $y < 0$). Se però $y_0 = 0$, e quindi $x_0 = \sqrt{r}$ o $x_0 = -\sqrt{r}$, non esiste nessun intorno del punto, per quanto piccolo, la cui intersezione con Z sia grafico di una funzione della x.

- In un opportuno intorno aperto A di di un punto $(x_0, y_0) \in Z$ tale che $F_x(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$, per cui *la retta tangente alla circonferenza nel punto non è orizzontale*, i punti di Z sono quelli del grafico di $x = \sqrt{r - y^2}$ o di $x = -\sqrt{r - y^2}$ a seconda che $x_0 > 0$ (e allora A è l'intero semipiano delle $x > 0$) o $x_0 < 0$ (e allora A è l'intero semipiano delle $x < 0$). Invece non esiste nessun intorno, per quanto piccolo, del punto $(0, \sqrt{r})$ o del punto $(0, -\sqrt{r})$ la cui intersezione con Z sia grafico di una funzione della y.

Il precedente esempio illustra significativamente il caso di una classe abbastanza generale di equazioni $F(x, y) = 0$, tranne per un aspetto (non di poco conto). Come vedremo col prossimo risultato, infatti, sotto opportune ipotesi esiste un intorno di una soluzione (x_0, y_0) dell'equazione in cui quest'ultima **definisce implicitamente** una delle due variabili come funzione dell'altra, nel senso che le soluzioni dell'equazione *che cadono nell'intorno* sono tutti e soli punti del grafico di tale funzione; di quest'ultima però sarà impossibile, in genere, dare un'espressione *esplicita* come invece si è facilmente fatto nell'esempio.

t6.1 **Teorema 6.1.** *Sia F di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che per un $(x_0, y_0) \in \Omega$ risulti $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste un aperto $A =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\subseteq \Omega$ in cui (F_y si mantiene $\neq 0$, e) l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ continua, ed anzi di classe C^1; la derivata di f si ottiene derivando rispetto ad x l'identità $F(x, f(x)) = 0$, da cui $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$ e quindi*

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \text{per } |x - x_0| < \alpha. \tag{24}$$

der

Se poi al posto dell'ipotesi $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ vale la $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ sussiste un enunciato che enunciamo sbrigativamente così: l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente, in un opportuno intorno di (x_0, y_0), una funzione $x = g(y)$ di classe C^1, la cui derivata si ottiene derivando rispetto ad y l'identità $F(g(y), y) = 0$.

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo $F_y(x_0, y_0) > 0$. Grazie alla continuità di F_y in Ω possiamo applicare il Teorema della permanenza del segno e trovare due numeri reali positivi a e β con la seguente proprietà: per $|x - x_0| \leq a$ e $|y - y_0| \leq \beta$ risulta $F_y(x, y) > 0$, e di conseguenza ogni funzione $y \mapsto F(x, y)$ ad x fissato è crescente. Poiché $F(x_0, y_0) = 0$, questo implica $F(x_0, y_0 - \beta) < 0$ e $F(x_0, y_0 + \beta) > 0$. Applichiamo di nuovo il Teorema della permanenza del segno, questa volta alle due funzioni $x \mapsto F(x, u_0 - \beta)$ e $x \mapsto F(x, y_0 + \beta)$: se $\alpha = \alpha_\beta \leq a$ è un numero reale positivo sufficientemente piccolo (per intendersi, tanto più piccolo quanto più piccolo è β) abbiamo sia $F(x, y_0 - \beta) < 0$ che $F(x, y_0 + \beta) > 0$ per x nell'intervallo chiuso $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Fissiamo la x nell'intervallo aperto [2] $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ed applichiamo il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione continua e strettamente monotona $y \mapsto F(x, y)$: otteniamo

$$F(x, f(x)) = 0$$

per un unico valore $f(x)$ strettamente compreso tra $y_0 - \beta$ e $y_0 + \beta$, cioè tale che

$$|f(x) - y_0| < \beta. \tag{25}$$

cont

Naturalmente $f(x_0) = y_0$.

Passiamo alla dimostrazione della (28). Come è detto nell'enunciato, essa segue subito dall'identità $F(x, f(x)) = 0$ in $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ grazie alla regola di derivazione delle funzioni composte, a patto però di sapere preliminarmente che f è derivabile, cosa questa che non abbiamo ancora fatto vedere. Cominciamo col mostrare la continuità di f in $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Per x fissato in $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ si ha anche $x + h \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, e quindi $(x + h, f(x + h)) \in A$, se $|h|$ è sufficientemente piccolo, diciamo $|h| < k$. Il teorema del valor medio assicura l'esistenza di un $\tau \in]0, 1[$ tale che

$$F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x))$$

[2] Naturalmente qui anche l'intervallo chiuso andrebbe bene. Però quando poi si passerà dalla variabile scalare x ad una vettoriale farà comodo limitare quest'ultima ad un aperto, in modo di poterle associare senza difficoltà la nozione di regolarità C^1 che nei chiusi diventa delicata se le variabili sono più di una.

$= F_x(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))h + F_y(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))(f(x+h)-f(x)).$

Il primo membro di questa identità è nullo, e dividendo per $F_y(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x))) \geq m > 0$, dove $m = \min_{\overline{A}} F_y$, otteniamo

$$f(x+h) - f(x) = -\frac{F_x(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))}{F_y(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))}h. \tag{26}$$ incr

Il secondo membro si maggiora con $M|h|/m$ dove $M = \max_{\overline{A}} |F_x|$, e questo mostra la continuità di f nel punto x. Grazie ad essa la frazione nel secondo membro è il rapporto di due funzioni continue di $h \in]-k, k[$. Dividiamo entrambi i membri della (26) per $h \neq 0$: otteniamo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{F_x(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))}{F_y(x+\tau h, f(x)+\tau(f(x+h)-f(x)))}$$

e quindi la derivabilità di f facendo tendere h a 0.

□

Osservazione 6.1. Come abbiamo già fatto presente, in generale non possiamo sperare di riuscire ad esplicitare la $f(x)$ ottenuta grazie al Teorema di Dini. E questo fa sì che tanto meno possiamo servirci della (28) per il calcolo di $f'(x)$, *tranne per* $x = x_0$. Se F è solo C^1 ci fermiamo lì. Ma se F è più regolare possiamo procedere oltre: deriviamo entrambi i membri della (28) e otteniamo

$$f''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}.$$

Tutte le funzioni del secondo membro sono calcolate in $(x, f(x))$, per cui è dato il loro valore per $x_0 = 0$: adesso disponiamo dei valori non solo di $f(x_0)$ e di $f'(x_0)$, ma anche di $f''(x_0)$. Così procedendo (beninteso nei limiti dell'umanamente, e anche numericamente, possibile) possiamo pensare di arrivare a dare alla f un buono sviluppo di Taylor di punto iniziale x_0.

Osservazione 6.2. Abbiamo visto che se F appartiene a $C^1(\Omega)$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, e per un $(x_0, y_0) \in A$ verifica $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di (x_0, y_0) in cui l'insieme di livello $F = 0$ coincide col grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^1, cioè con una curva dotata in (x_0, y_0) di retta tangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ovvero

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

e quindi

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{27}$$ 4.1

Per ottenere l'equazione (27) della retta tangente in (x_0, y_0) alla curva $F = 0$ abbiamo utilizzato il Teorema di Dini sotto l'ipotesi $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Però saremmo arrivati allo stesso risultato sotto l'ipotesi $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Dunque possiamo concludere che ogni punto (x_0, y_0) di Ω in cui F si annulla e ∇F non è il vettore nullo ha un intorno nel quale l'equazione $F = 0$ definisce una curva regolare con retta tangente (al sostegno) in (x_0, y_0) data dall'equazione (27) o, ciò che è lo stesso, con retta normale di direzione $\nabla F(x_0, y_0)$.

Il Teorema di Dini per le funzioni scalari di 2 variabili si estende con ovvie modifiche alle funzioni di $N+1$ variabili. Privilegiamo, ma solo per semplificare l'esposizione, il ruolo dell'$N+1$–esima variabile rispetto alle altre, ed indichiamo con $(\mathbf{x}, y)$, dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}$, il generico vettore di $\mathbb{R}^{N+1}$.

t4.1 **Teorema 6.2.** *Sia F di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^{N+1}$. Supponiamo che per un $(\mathbf{x_0}, y_0) \in \Omega$ risulti $F(\mathbf{x_0}, y_0) = 0$ e $F_y(\mathbf{x_0}, y_0) \neq 0$. Allora esiste un aperto $A = A_0 \times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\subseteq \Omega$ con A_0 aperto di $\mathbb{R}^N$ in cui (F_y si mantiene $\neq 0$, e) l'equazione $F(\mathbf{x}, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(\mathbf{x})$ continua, ed anzi di classe C^1; la derivata di f rispetto ad x_k si ottiene derivando rispetto ad x_k l'identità $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$, da cui $F_{x_k}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) + F_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) f_{x_k}(\mathbf{x}) = 0$ e quindi*

$$f_{x_k}(\mathbf{x}) = -\frac{F_{x_k}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{F_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \quad \text{per } \mathbf{x} \in A_0. \tag{28}$$ der

Naturalmente questo teorema continua a valere con l'$(N+1)$–esima variabile sostituita da una qualunque delle prime N nell'ipotesi che sia diversa da 0 la corrispondente derivata di F nel punto.

Osservazione 6.3. Occupiamoci di $N = 2$, ovvero dell'equazione $F(x, y, z) = 0$. Se F appartiene a $C^1(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^3$ e in un punto (x_0, y_0, z_0) di Ω si ha $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di (x_0, y_0, z_0) in cui l'insieme di livello $F = 0$ coincide col grafico di una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1, cioè con una superficie dotata in (x_0, y_0, z_0) di piano tangente

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ovvero

$$z - z_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$$

e quindi

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{29}$$ 4.1'

Per ottenere l'equazione (29) del piano tangente in (x_0, y_0, z_0) alla superficie $F = 0$ abbiamo utilizzato il Teorema di Dini sotto l'ipotesi $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Però saremmo arrivati allo stesso risultato sotto l'ipotesi $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ o l'ipotesi $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Possiamo dunque affermare che ogni punto (x_0, y_0, z_0) di Ω in cui F si annulla e ∇F non è il vettore nullo ha un intorno nel quale l'equazione $F = 0$ definisce una superficie con piano tangente (al sostegno) in (x_0, y_0, z_0) data dall'equazione (29) o, ciò che è lo stesso, con retta normale di direzione $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

7 Il Teorema di Dini per sistemi e l'invertibilità locale

Il Teorema di Dini si estende ai sistemi di P equazioni in $P + Q$ variabili. Qui ci occupiamo di $P = 2$ e $Q = 1$, cominciando dal semplice caso lineare

$$\begin{cases} F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0 \\ G(x, y, z) = a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{30}$$ pia'

delle equazioni di due piani. Se i due piani sono paralleli, ovvero la **matrice jacobiana**

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

ha rango 1, la loro intersezione o è vuota o coincide con entrambi. Supponiamo che il rango sia 2, diciamo con la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ b' & c' \end{bmatrix} \qquad (31) \quad \boxed{\texttt{pia}}$$

di determinante $\neq 0$ per fissare le idee. Le soluzioni di (30) sono allora tutti e soli i punti di una retta, e possiamo risolvere il sistema (31) rispetto a y e z (come funzioni di x, ovviamente), ottenendo $y = f(x)$ e $z = g(x)$ dove

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = -\left[\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right]^{-1} \begin{bmatrix} ax + d \\ a'x + d' \end{bmatrix}.$$

Nel caso generale applichiamo due volte di seguito il Teorema 6.2 per studiare un più generale sistema di 2 equazioni scalari in 3 variabili

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (32) \quad \boxed{\texttt{ee4.2}}$$

indicando con (x_0, y_0, z_0) una sua soluzione. Mettiamoci in ipotesi che consentano di operare i seguenti passaggi:

- mostrare, servendosi del Teorema 6.2 per $N = 2$, che in un intorno di (x_0, y_0, z_0) la prima delle (32) definisce implicitamente una funzione $z = \varphi(x,y)$ di classe C^1, con $\varphi(x_0, y_0) = z_0$;
- mostrare, servendosi stavolta del Teorema 6.1, che in un intorno di (x_0, y_0) l'equazione $\Gamma(x,y) = G(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ di classe C^1, con $f(x_0) = y_0$.

A questo punto basta porre $g(x) = \varphi(x, f(x))$ per verificare che in un intorno di (x_0, y_0, z_0) il sistema (32) definisce implicitamente due funzioni scalari

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

di classe C^1; derivando le identità

$$F(x, f(x), g(x)) = 0, \quad G(x, f(x), g(x)) = 0$$

si ottengono le derivate parziali di f e g come soluzioni del sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} F_x(x, f(x), g(x)) + F_y(x, f(x), g(x)) f'(x) + F_z(x, f(x), g(x)) g'(x) = 0 \\ G_x(x, f(x), g(x)) + G_y(x, f(x), g(x)) f'(x) + G_z(x, f(x), g(x)) g'(x) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = -\left[\tfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right]^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix}.$$

L'ipotesi che consente di effettuare i passaggi richiesti è la seguente:

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0, y_0, z_0) = \det \begin{bmatrix} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix} \neq 0. \qquad (33) \quad \boxed{\texttt{e4.4}}$$

Infatti la (33) implica innanzitutto che in (x_0, y_0, z_0) una almeno delle derivate F_y, F_z sia diversa da 0, e non è restrittivo supporre che si tratti della F_z. Otteniamo così la φ, che inoltre sappiamo derivare, in particolare rispetto ad y:

$$\varphi_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Calcoliamo

$$\Gamma_y = G_y + G_z\varphi_y = G_y - G_z\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{F_z}\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}.$$

Grazie di nuovo alla (33), $\Phi_y(x_0, t_0, y_0) \neq 0$, per cui possiamo ottenere la f e da qui concludere.

8 Integrale delle funzioni a scala

Indichiamo con R un rettangolo (sottintendendo d'ora in poi, salvo esplicita indicazione in altro senso, compatto): diciamo $R = [a, b] \times [c, d]$. Una **partizione** di R è una famiglia $\Pi = \{(x_h, y_k) \mid x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b, y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = b\}$ (dove m ed n dipendono da Π). In maniera equivalente si può individuare Π anche assegnando la famiglia $\mathcal{F}(\Pi)$ dei sottorettangoli $S_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k]$ associati a Π. Un'altra partizione $\hat{\Pi}$ di R è un **raffinamento** della Π se la contiene.

Si tratta di nozioni che quasi banalmente trasferiscono alla dimensione 2 quelle utilizzate nel caso unidimensionale per lo studio dell'integrale di Riemann in una variabile, e noi qui ce ne serviamo appunto per introdurre l'integrale di Riemann in due variabili. Com'è prevedibile, si tratta di una teoria più complessa da vari punti di vista. Il primo di essi va messo in luce fin da ora: mentre un intervallo costituisce sostanzialmente il più generale dominio di integrazione sulla retta, è intuitivamente ovvio che un rettangolo non può rappresentare la generalità dei possibili domini di integrazione nel piano. Ciò spiega perché adesso, pur utilizzando comunque in modo cruciale il ruolo dei rettangoli e delle loro partizioni, ci liberiamo da vincoli predeterminati sugli insiemi di definizione delle funzioni e cominciamo col prenderle definite su tutto $\mathbb{R}^2$, anche se a supporti[3] compatti.

Una funzione limitata $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a supporto compatto, dunque nulla al di fuori di un rettangolo R, è una **funzione a scala** se assume valori costanti negli interni $S^\circ_{hk} =]x_{h-1}, x_h[\times]y_{k-1}, y_k[$ dei sottorettangoli S_{hk} associati a qualche partizione Π di R; è **degenere** se assume valori non nulli solo su segmenti limitati verticali o orizzontali. Dunque una generica funzione a scala si scrive sotto la forma

$$\varphi(x, y) = \sum_{h,k} \lambda_{hk} \mathbf{1}_{S^\circ_{hk}}(x, y) + \varphi_0(x, y) \tag{34}$$ $\boxed{\texttt{A}}$

con $\lambda_{hk} \in \mathbb{R}$ e φ_0 degenere. (Qui, come nel seguito, $\sum_{h,k}$ sta per $\sum_{h=1,\ldots,m,\, k=1,\ldots,n}$.) In tale definizione Π può essere sostituito da un suo qualunque raffinamento $\hat{\Pi}$: se, ad esempio, $\hat{\Pi}$ si ottiene aggiungendo a Π i punti (x'_1, y_k), $k = 1, \ldots, n$, con $x_0 < x'_1 < x_1$, risulta $\varphi = \lambda_{1k}$ sia nei sottorettangoli aperti $]x_0, x'_1[\times]y_{k-1}, y_k[$ che negli $]x'_1, x_1[\times]y_{k-1}, y_k[$. Inoltre R può essere sostituito da un qualunque rettangolo che lo contenga. Rientrano banalmente nella definizione i casi di **funzioni a scala degeneri**, cioè nulle al di fuori di un rettangolo degenere.

Sia ψ un'altra funzione a scala, nulla al di fuori di un rettangolo R' e costante negli interni dei sottorettangoli associati ad un'opportuna partizione Π' di R'. Per quello che abbiamo visto, possiamo sempre ricondurci a $R' = R$ (passando se necessario a un terzo rettangolo contenente

[3] Il **supporto** di una funzione è la chiusura dell'insieme dei punti in cui essa non si annulla.

$R \cup R'$) e, una volta fatto questo, a $\Pi' = \Pi$ (passando se necessario al raffinamento comune $\Pi \cup \Pi'$). Dunque anche ψ assume un valore costante in ciascun S°_{hk}, diciamo

$$\psi(x,y) = \sum_{h,k} \mu_{hk} \mathbf{1}_{S^\circ_{hk}}(x,y) + \psi_0(x,y) \tag{35}$$ $\boxed{\mathrm{B}}$

con ψ_0 degenere. A questo punto si vede subito che la combinazione lineare $a\varphi + b\psi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è ancora una funzione a scala, che vale $a\lambda_{hk} + b\mu_{hk}$ in S°_{hk}.

Con la notazione $A(S)$ per l'area ("base per altezza") di un qualunque rettangolo S, definiamo **integrale (elementare)** della φ data in (34) il numero

$$\int \varphi = \sum_{h,k} \lambda_{hk} A(S_{hk}) \, .$$

In questa definizione la partizione Π può essere sostituita da un suo qualunque raffinamento $\hat{\Pi}$ senza che venga alterato il valore del secondo membro: per convincersene basta tornare all'esempio di $\hat{\Pi}$ dato un attimo fa ed osservare che

$$\lambda_{1k}(x_1 - x_0)(y_k - y_{k-1}) = \lambda_{1k}(x_1' - x_0)(y_k - y_{k-1}) + \lambda_{1k}(x_1 - x_1')(y_k - y_{k-1}) \, .$$

L'integrale elementare gode di tutte le proprietà che ci si aspetta da un "buon" integrale. Infatti si vede subito, servendosi delle espressioni (34) e (35) di φ e ψ, che è **positivo**:

$$\int \varphi \leq \int \psi \ \text{ per } \varphi \leq \psi$$

dal momento che la condizione $\varphi \leq \psi$ si traduce nelle condizioni $\lambda_{hk} \leq \mu_{hk}$ e quindi

$$\sum_{h,k} \lambda_{hk} A(S_{hk}) \leq \sum_{h,k} \mu_{hk} A(S_{hk}) \, .$$

Inoltre è **lineare**:

$$\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi \ \text{ per } a, b \in \mathbb{R}$$

dal momento che

$$\sum_{h,k} (a\lambda_{hk} + b\mu_{hk}) A(S_{hk}) = a \sum_{h,k} \lambda_{hk} A(S_{hk}) + b \sum_{h,k} \mu_{hk} A(S_{hk}) \, .$$

Infine, $\int \varphi = 0$ se φ è degenere.

9 Integrale superiore e integrale inferiore

Introduciamo la notazione $f \in L_c$ col seguente significato: f è una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata ed a supporto compatto, dunque nulla al di fuori di un rettangolo R. La famiglia $\mathcal{S}_f^+$ delle funzioni semplici φ tali che $\varphi \geq f$ non è vuota, e la quantità

$$\overline{\int} f = \inf \left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$$

è detta **integrale superiore di Riemann** della f. Notiamo che una funzione di $\mathcal{S}_f^+$ come la (34) — dovendo soddisfare $\varphi \geq f$ in S_{hk}°, quindi $\lambda_{hk} \geq \sup_{S_{hk}S^\circ} f$ per $h = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$ — verifica anche

$$\sum_{h,k} \lambda_{hk} A(S_{hk}) \geq \sum_{h,k} \left(\sup_{S_{hk}^\circ} f \right) A(S_{hk}).$$

Il secondo membro è l'integrale elementare della funzione semplice

$$\psi(x, y) = \sum_{h,k} \left(\sup_{S_{hk}^\circ} f \right) \mathbf{1}_{S_{hk}^\circ}(x, y) + \varphi_0(x, y)$$

(e dunque rimane inalterato se Π è sostituita da un suo raffinamento o R da un rettangolo che lo contiene). Ma ψ sta a sua volta in $\mathcal{S}_f^+$, e da qui si arriva a

$$\overline{\int} f = \inf_{\Pi} \sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f \right) A(S)$$

o più concisamente

$$\overline{\int} f = \inf_{\Pi} \sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f \right) A(S)$$

(e le sommatorie nel secondo membro sono chiamate **somme integrali superiori**).

Si constata subito che sulle funzioni di L_c l'integrale superiore è **positivo**

$$\overline{\int} f \leq \overline{\int} g \text{ per } f \leq g$$

(dal momento che $f \leq g \Longrightarrow \mathcal{S}_f^+ \supseteq \mathcal{S}_g^+$), nonché **positivamente omogeneo**

$$\overline{\int} (af) = a \overline{\int} f \text{ per } a \in [0, \infty[\tag{36}$$ D

e **subadditivo**

$$\overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g \tag{37}$$ C

(grazie alla linearità dell'integrale elementare delle funzioni a scala).

Il prossimo esempio mostra che l'integrale superiore non ha, sulla *totalità* delle funzioni di L_c, la proprietà di linearità: pur essendo positivamente omogeneo non è omogeneo, e pur essendo subadditivo non è additivo.

e1 **Esempio 9.1.** Indichiamo con f la **funzione di Dirichlet** $\mathbf{1}_{(\mathbb{Q} \cap [0,1])^2}$. Siccome

$$\sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f \right) A(S) = 1, \qquad \sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} (-f) \right) A(S) = 0$$

quale che sia la partizione Π di $R = [0, 1]^2$, e quindi

$$\overline{\int} f + \overline{\int} (-f) = 1\,,$$

con la presente scelta di f non valgono né l'identità della (37) quando $a = -1$, né il segno uguale nella disuguaglianza debole della (36) quando $g = -f$.

L'**integrale inferiore di Riemann** di una funzione $f \in L_c$ è la quantità

$$\underline{\int} f = -\overline{\int}(-f)$$

per cui

$$\underline{\int}(-f) = -\overline{\int} f.$$

Siccome

$$0 = \overline{\int}(f-f) \leq \overline{\int} f + \overline{\int}(-f) = \overline{\int} f - \underline{\int} f$$

vale sempre la disuguaglianza

$$\underline{\int} f \leq \overline{\int} f.$$

Anche l'integrale inferiore è positivamente omogeneo:

$$\underline{\int}(af) = a\underline{\int} f \text{ per } a \in [0,\infty[\,.$$

Inoltre è **superadditivo**:

$$\underline{\int}(f+g) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g\,.$$

Si verifica subito che

$$\underline{\int} f = \sup_{\Pi} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\inf_{S^\circ} f\right) A(S)$$

(e le sommatorie nel secondo membro sono chiamate **somme integrali inferiori**).

Concludiamo questa sezione occupandoci del caso particolare $f = \mathbf{1}_E$ con E sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Le quantità

$$\overline{A}(E) = \overline{\int}\mathbf{1}_E = \inf_{\Pi} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ}\mathbf{1}_E\right) A(S) = \inf_{\Pi} \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S^\circ\cap E\neq\emptyset}} A(S)\,,$$

$$\underline{A}(E) = \underline{\int}\mathbf{1}_E = \sup_{\Pi} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\inf_{S^\circ}\mathbf{1}_E\right) A(S) = \sup_{\Pi} \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S^\circ\subseteq E}} A(S)$$

sono rispettivamente la **misura esterna (bidimensionale) di Peano–Jordan** e la **misura interna (bidimensionale) di Peano–Jordan** di E. In particolare, E è **trascurabile secondo Peano–Jordan** o più brevemente **PJ–trascurabile (in $\mathbb{R}^2$)** se $\overline{A}(E) = 0$, ovvero se, dato comunque $\varepsilon > 0$, esiste una partizione Π di un $R \supseteq E$ tale che

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S^\circ\cap E\neq\emptyset}} A(S) < \varepsilon. \tag{38}$$

E

E1 **Esempio 9.2.** E è PJ–trascurabile se è un segmento limitato verticale o orizzontale, per cui $\mathbf{1}_E$ è degenere. Molto più in generale, E è PJ–trascurabile se è il grafico di una funzione $\varphi \in C^0([a,b])$, $-\infty < a < b < \infty$. Infatti φ è integrabile da a a b, e quindi ad $\varepsilon > 0$ si possono associare $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_r = b$ con la proprietà

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\max_{[x_{k-1},x_k]} \varphi - \min_{[x_{k-1},x_k]} \varphi \right) (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

Ma gli addendi della somma qui sopra sono le aree $A(Q_k)$ dei rettangoli

$$Q_k = [x_{k-1}, x_k] \times \left(\min_{[x_{k-1},x_k]} \varphi, \max_{[x_{k-1},x_k]} \varphi \right),$$

la cui unione ricopre E. A questo punto si prende $R = [a,b] \times [\min_{[a,b]} \varphi, \max_{[a,b]} \varphi]$ e se ne dà una partizione Π in modo tale che ogni Q_k sia unione di sottorettangoli di $\mathcal{F}(\Pi)$. Siccome la somma delle aree $A(S)$ degli $S \in \mathcal{F}(\Pi)$ contenuti in Q_k è uguale a $A(Q_k)$ risulta verificata la (38).

o1 **Osservazione 9.1.** Soffermiamoci sulla (38). E può avere dei punti che cadono sulla frontiera di qualche sottorettangolo di $\mathcal{F}(\Pi)$, e quindi non essere contenuto nell'unione degli S° che verificano $S^\circ \cap E \neq \emptyset$. Per tener conto di tale circostanza, prendiamo innanzitutto R così grande da contenere la chiusura di E al proprio interno. Esplicitata poi come $\{(x_h, y_k) \,|\, x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b,\, y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = b\}$ la partizione Π per la quale vale la (38) e preso un $\eta > 0$, introduciamo i rettangoli $[x_h - \eta, x_h + \eta] \times [c,d]$, $h = 1, \ldots, m-1$, e $[a,b] \times [y_k - \eta, x_k + \eta]$, $k = 1, \ldots, n$, che elenchiamo come $T_1, \ldots, T_p$ (dove p vale $m + n - 2$, ma questo è secondario). La quantità $\sum_{j=1}^{p} A(T_j)$ è uguale al prodotto di η per la costante $C = 2[(m-1)(b-a) + (n-1)(d-c)]$ e dunque, prendendo $\eta \in]0, \sigma/C[$, la rendiamo $< \sigma$. Elenchiamo poi come $T_{p+1}, \ldots, T_q$ gli $S \in \mathcal{F}(\Pi)$ tali che $S^\circ \cap E \neq \emptyset$. Per $\sigma > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$\sum_{j=1}^{q} A(T_j) < \sigma + \sum_{j=p+1}^{q} A(T_j) < \varepsilon\,.$$

Abbiamo così visto che se E è PJ–trascurabile si possono trovare, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$, dei rettangoli $T_1, \ldots, T_q$ tali che

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{q} T_j^\circ, \quad \sum_{j=1}^{q} A(T_j) < \varepsilon\,.$$

10 Integrale doppio di Riemann

Com'è evidente, ogni funzione a scala φ soddisfa

$$\underline{\int} \varphi = \overline{\int} \varphi = \int \varphi.$$

Però è altrettanto evidente che l'integrale inferiore della funzione di Dirichlet è nullo, mentre quello superiore, come sappiamo dall'Esempio 9.1, vale 1. Ciò significa che, se f è una generica funzione della classe L_c, la disuguaglianza (38) può effettivamente venire soddisfatta o in senso stretto o come identità. Supponiamo che si verifichi il secondo caso:

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f \tag{39}$$ 0

ovvero

$$\sup\left\{\int \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}_f^-\right\} = \inf\left\{\int \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}_f^+\right\}$$

ovvero ancora

$$\sup_{\Pi} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\inf_{S^\circ} f\right) A(S) = \inf_{\Pi} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f\right) A(S) \qquad (40) \quad \boxed{\texttt{F}}$$

dove le Π sono partizioni di un rettangolo R al di fuori del quale f si annulla identicamente. Allora diciamo che f è **integrabile secondo Riemann (in $\mathbb{R}^2$)**, scriviamo che $f \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$, e chiamiamo **integrale (doppio) di Riemann** di f il comune valore in (39), che denotiamo con

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathbb{R}^2} f\,dxdy$$

o ancora, volendo essere particolarmente sbrigativi, con $\int f$ come per le funzioni a scala.

Richiedere che una $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a supporto compatto appartenga a $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ equivale dunque a richiedere che, dato $\varepsilon>0$, si possano trovare un rettangolo R contenente il supporto di f ed una partizione Π di R tali che

$$\sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f\right) A(S) < \varepsilon. \qquad (41) \quad \boxed{\texttt{N}}$$

Sia $a>0$. Poiché sono positivamente omogenei sia l'integrale inferiore che quello superiore si ha

$$f \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow af \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \quad \text{con} \quad \int (af) = \underline{\int}(af) = \overline{\int}(af) = a\int f\,. \qquad (42) \quad \boxed{\texttt{N''}}$$

Ma allora

$$\overline{\int}(-af) = -\underline{\int}(af) = -a\underline{\int} f = -a\int f$$

e quindi

$$\underline{\int}(-af) = -\overline{\int}(af) = -a\overline{\int} f = -a\int f = \overline{\int}(-af)\,.$$

Ne segue che anche $-af$ sta in $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$, con

$$\int(-af) = \underline{\int}(-af) = \overline{\int}(-af) = -a\int f$$

e da qui si ottiene subito l'omogeneità dell'integrale di Riemann: la (42) vale per ogni $a\in\mathbb{R}$.

Sia adesso data un'altra $g\in\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$. Siccome su $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ coincidono integrale superiore e inferiore,

$$\int f + \int g = \underline{\int} f + \underline{\int} g \le \underline{\int}(f+g) \le \overline{\int}(f+g) \le \overline{\int} f + \overline{\int} g = \int f + \int g\,.$$

Dunque l'integrale di Riemann è additivo:

$$f,g \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow f+g \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \quad \text{con} \quad \int(f+g) = \int f + \int g$$

e quindi, essendo omogeneo, è lineare:

$$f, g \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow af + bg \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \quad \text{con} \quad \int (af + bg) = \int (af) + \int (bg) \text{ per } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Fissiamo adesso un $\varepsilon > 0$ e una Π tale che valga la (41). Facciamo variare le coppie di punti $(x', y'), (x'', y'')$ interni ad un $S \in \mathcal{F}(\Pi)$. Da

$$|f(x', y')| - |f(x'', y'')| \leq |f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f$$

ricaviamo

$$\sup_{S^\circ} |f| - \inf_{S^\circ} |f| \leq \sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f$$

e grazie alla (41) otteniamo

$$\sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} |f| - \inf_{S^\circ} |f| \right) A(S) < \varepsilon\,.$$

Da qui concludiamo che $|f| \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$; grazie alla positività dell'integrale di Riemann,

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Un procedimento analogo mostra che $f, g \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow fg \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$. Infatti

$$\begin{aligned} & f(x', y')g(x', y') - f(x'', y'')g(x'', y'') \\ \leq\; & |f(x', y') - f(x'', y'')||g(x', y')| + |g(x', y') - g(x'', y'')||f(x'', y'')| \\ \leq\; & \left(\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f \right) \sup_{S^\circ} |g| + \left(\sup_{S^\circ} g - \inf_{S^\circ} g \right) \sup_{S^\circ} |f| \end{aligned}$$

e quindi

$$\sup_{S^\circ}(fg) - \inf_{S^\circ}(fg) \leq C \left(\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f + \sup_{S^\circ} g - \inf_{S^\circ} g \right).$$

11 Insiemi PJ–misurabili e criteri di integrabilità

Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{1}_E \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ diciamo che E è **misurabile secondo Peano–Jordan** o più brevemente **PJ– misurabile (in $\mathbb{R}^2$)**, e chiamiamo

$$A(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_E \, dxdy$$

la sua **misura (bidimensionale) di Peano–Jordan**. Richiedere che $\mathbf{1}_E \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ equivale a richiedere che $A^+(E) = A^-(E)$, ovvero

$$\inf_{\Pi} \sum_{\substack{S \in \mathcal{F}(\Pi) \\ S^\circ \cap E \neq \emptyset}} A(S)) = \sup_{\Pi} \sum_{\substack{S \in \mathcal{F}(\Pi) \\ S^\circ \subseteq E \neq \emptyset}} A(S),$$

e quindi che, dato $\varepsilon > 0$, si possano trovare un $R \supseteq E$ ed una sua partizione Π tali che

$$\sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_E - \inf_{S^\circ} \mathbf{1}_E \right) A(S) < \varepsilon.$$

In particolare E è PJ– misurabile con $A(E) = 0$ se e solo se E è PJ–trascurabile.

o6.1 **Osservazione 11.1.** Ripercorrendo la costruzione dell'integrale di Riemann ci si accorge che apparentemente essa viene a dipendere dalla scelta di un particolare riferimento cartesiano in $\mathbb{R}^2$: un bel guaio se proprio così fosse, come si vede pensando al caso particolare delle misure di Peano–Jordan che perderebbero ogni significato geometrico. Ma poi si riflette sul punto di partenza, cioè l'area dei rettangoli, che è invariante per composizioni τ di rotazioni e traslazioni, e ci si convince che deve valere un risultato del tipo: $f \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2) \iff f \circ \tau \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ con

$$\int f = \int (f \circ \tau)\,.$$

Questo effettivamente è vero, come dimostreremo più in là.

T1 **Teorema 11.1.** *Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^2$ è PJ–misurabile se e solo se la sua frontiera è PJ–trascurabile.*

Dimostrazione. Se Π è una partizione di un $R \supseteq E$ risulta

$$\sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_E - \inf_{S^\circ} \mathbf{1}_E \right) A(S) = \sum_{S \in \mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_{\partial E} \right) A(S). \tag{43}$$ H

Infatti per ogni $S \in \mathcal{F}(\Pi)$ si verifica uno ed uno solo dei seguenti tre casi:

$$S^\circ \subseteq E, \quad S^\circ \cap E = \emptyset, \quad S^\circ \cap \partial E \neq \emptyset \tag{44}$$

dal momento che S° è aperto. Ora,

$$\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_E = \inf_{S^\circ} \mathbf{1}_E = 1,\ \sup_{S^\circ} \mathbf{1}_{\partial E} = 0 \text{ per } S^\circ \subseteq E,$$

$$\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_E = \inf_{S^\circ} \mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{\partial E} = 0 \text{ per } S^\circ \cap E = \emptyset,$$

$$\sup_{S^\circ} \mathbf{1}_E = \sup_{S^\circ} \mathbf{1}_{\partial E} = 1,\ \inf_{S^\circ} \mathbf{1}_E = 0 \text{ per } S^\circ \cap \partial E \neq \emptyset.$$

Dunque è equivalente richiedere che per ogni $\varepsilon > 0$ si possano trovare R e Π tali che sia $< \varepsilon$ il primo membro della (43) (PJ–misurabilità di E) oppure il secondo (PJ–trascurabilità di ∂E). $\square$

Osservazione 11.2. La frontiera di $([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$ è tutto il quadrato $[0.1]^2$, che non è PJ–trascurabile perché la sua misura esterna di Peano–Jordan è la sua area e quindi vale 1. Questo significa che, se si vorrà estendere al di là della teoria di Peano–Jordan la classe dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ in modo da farci rientrare anche $([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$, non si potrà immaginare di estendere anche la caratterizzazione fornita dal Teorema 11.1.

Siano $E \subset \mathbb{R}^2$ PJ-misurabile e $f : E \to \mathbb{R}$ limitata. Se il prolungamento $\tilde{f}$ di f a zero fuori di E sta in $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$, diciamo che f sta in $\mathrm{Riem}\,(E)$ e che la quantità

$$\int_E f\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}\,dxdy$$

è il suo **integrale di Riemann su** E. Stesso discorso e stessa notazione se f è invece data in $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$: allora anche $\tilde{f} = f\mathbf{1}_E$, cioè la f prima ristretta ad E e poi prolungata a 0 fuori di E, sta in $\mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$.

Passiamo a determinare condizioni sufficienti di integrabilità sui sottoinsiemi PJ-misurabili di $\mathbb{R}^2$, seguendo un po' la falsariga dell'impostazione della Sezione 1. Anche se inevitabilmente le tecniche dimostrative sono ora molto più elaborate, un ruolo fondamentale lo riveste di nuovo l'uniforme continuità. Questa è senz'altro garantita nei convessi chiusi e limitati alle funzioni di classe C^1, e ciò permette di mostrare subito che ogni f di classe C^1 su un rettangolo R sta in $\mathrm{Riem}\,(R)$. Dato infatti un $\varepsilon > 0$, si determinano prima un $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$ non appena $(x,y),(x',y') \in R$ verificano $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$, poi una partizione Π di R tale che ogni $S \in \mathcal{F}(\Pi)$ abbia diametro $< \delta$ e quindi

$$\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f = \max_S f - \min_S f < \varepsilon \text{ per } S \in \mathcal{F}(\Pi)\,.$$

Allora

$$\sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} \tilde{f} - \inf_{S^\circ} \tilde{f}\right) A(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} \left(\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f\right) A(S) < \varepsilon \sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)} A(S) = \varepsilon A(R)$$

per cui $\tilde{f} \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$, ovvero $f \in \mathrm{Riem}\,(R)$.

Generalizziamo:

T6.3 **Teorema 11.2.** *Ogni funzione f limitata su un sottoinsieme PJ-misurabile E di $\mathbb{R}^2$ e di classe C^1 al suo interno sta in* $\mathrm{Riem}\,(E)$.

Dimostrazione. L'idea è, fissato un $\varepsilon > 0$, di trovare una partizione Π di un $R \supset E$ tale che la corrispondente somma $\sum \left(\sup_{S^\circ} \tilde{f} - \inf_{S^\circ} \tilde{f}\right) A(S)$ si spezzi in:

- una somma $\sum' \left(\sup_{S^\circ} \tilde{f} - \inf_{S^\circ} \tilde{f}\right) A(S)$ di addendi tali che $\sum' A(S) < \varepsilon$ grazie alla PJ–trascurabilità di ∂E (accontentandosi di maggiorare $\sup_{S^\circ} \tilde{f} - \inf_{S^\circ} \tilde{f}$ con $2\sup_E |f|$)
- più una somma $\sum'' (\sup_{S^\circ} f - \inf_{S^\circ} f)\, A(S)$ di addendi tali che $\sup_{S^\circ} \tilde{f} - \inf_{S^\circ} \tilde{f} < \varepsilon$ (accontentandosi di maggiorare $\sum'' A(S)$ con $A(R)$)

(cfr. la dimostrazione del Teorema 1.1).

A tal fine osserviamo innanzitutto che, siccome ∂E è PJ–trascurabile, esistono dei rettangoli $T_1, \ldots, T_q$ tali che

$$\partial E \subset \bigcup_{j=1}^{q} T_j^\circ, \quad \sum_{j=1}^{q} A(T_j) < \varepsilon$$

(cfr. l'Osservazione 9.1). Sia R un rettangolo contenente $\overline{E}$ e tutti i T_j. Siccome i punti di discontinuità di $\tilde{f}$ cadono in ∂E, il compatto $K = R \setminus \cup_{j=1}^{q} T_j^\circ$ è contenuto nell'unione dell'interno di E (in cui $\tilde{f} = f$ è C^1) e del complementare di E (in cui $\tilde{f} = 0$). Posto $\delta = \varepsilon / \max_K |\tilde{f}'|$, costruiamo una partizione di Π di R che soddisfi i seguenti requisiti:

- ogni sottorettangolo $S \in \mathcal{F}(\Pi)$ abbia diametro minore di δ,
- ogni T_j sia unione di sottorettangoli di Π.

Dunque

$$A(T_j) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S\subseteq T_j}} A(S)$$

e quindi

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S\subseteq\cup_j T_j}} A(S) \le \sum_{j=1}^{q} A(T_j) < \varepsilon\,,$$

mentre $\tilde f$ verifica $|\tilde f(x,y)-\tilde f(x',y')| < (\max_K|\tilde f'|)\delta = \varepsilon$ al variare di $(x,y),(x',y')$ in un qualunque rettangolo $S\subset K$. Ne segue che

$$\sum_{S\in\mathcal{F}(\Pi)}\left(\sup_{S^\circ}\tilde f-\inf_{S^\circ}\tilde f\right)A(S) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S\subseteq\cup_j T_j}}\left(\sup_{S^\circ}\tilde f-\inf_{S^\circ}\tilde f\right)A(S) + \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S^\circ\subseteq E}}\left(\sup_{S^\circ} f-\inf_{S^\circ} f\right)A(S)$$

$$< 2\sup_E|f|\sum_{j=1}^{q}A(T_j) + \varepsilon\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}(\Pi)\\ S^\circ\subseteq E}}A(S) < \left(2\sup_E|f| + A(R)\right)\varepsilon$$

per cui $\tilde f\in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$. □

Torniamo adesso ad accettare il Teorema di Heine–Cantor: siccome una funzione continua su un compatto come K vi è uniformemente continua, la dimostrazione precedente rimane valida sotto la sola ipotesi di regolarità C^0 invece che C^1 (a patto di sostituire il δ fornito da Heine–Cantor a quello proveniente dalla condizione di Lipschitz). Per la precisione:

T6.3' **Teorema 11.3.** *Ogni funzione f limitata su un sottoinsieme PJ-misurabile E di $\mathbb{R}^2$ e continua al suo interno sta in* $\mathrm{Riem}\,(E)$.

Il più delle volte nel seguito faremo (tacito) riferimento al Teorema 11.3 invece che al 11.2.

12 Alcune estensioni

Integrali di Riemann in $\mathbb{R}^3$ (e in $\mathbb{R}^N$)

Un primo, semplice allargamento delle nozioni viste finora consiste nel passaggio dalle funzioni di 2 variabili a quelle di un qualunque numero N di variabili, e già il caso $N=3$ illustra significativamente il procedimento. Al posto dei rettangoli si prendono i parallelepipedi P, con la notazione $V(P)$ per i volumi ("base per altezza per profondità"). Una partizione di $P=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ è una famiglia $\Pi=\{(x_h,y_k,z_\ell)\,|\,x_0=a<x_1<\cdots<x_m=b,\ y_0=c<y_1<\cdots<y_n=b,\ z_0=r<z_1<\cdots<z_p=s\}$, e $\mathcal{F}(\Pi)$ è la famiglia dei sottoparallelepipedi $Q_{hk\ell}=[x_{h-1},x_h]\times[y_{k-1},y_k]\times[z_{\ell-1},z_\ell]$. Una funzione limitata $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ è una funzione a scala se, per un'opportuna scelta di P e Π, è nulla fuori di P e assume valore costanti $\lambda_{hk\ell}$ negli interni dei $Q_{hk\ell}\in\mathcal{F}(\Pi)$. L'espressione

$$\int\varphi = \sum_{h,k,\ell}\lambda_{hk\ell}V(Q_{hk\ell})$$

è l'integrale elementare di φ. Una volta constatato che si tratta di una definizione ben posta si arriva senza difficoltà agli integrali superiore e inferiore di Riemann; agli insiemi PJ–trascurabili (adesso in $\mathbb{R}^3$!); all'integrale (triplo) di Riemann denotato con

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz \quad\text{oppure}\quad \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz \quad\text{oppure}\quad \int_{\mathbb{R}^3} f\,dxdydz$$

o ancora, sbrigativamente, con $\int f$; alla misura (tridimensionale) di Peano–Jordan; al criterio di integrabilità: Una funzione limitata e continua su un sottoinsieme PJ–misurabile E di $\mathbb{R}^3$ sta nello spazio Riem (E) (nel senso che il suo prolungamento a 0 fuori di E sta in Riem $(\mathbb{R}^3)$).

Da qui si può passare senza difficoltà a definire in $\mathbb{R}^N$, per un qualunque valore naturale N, gli integrali secondo Riemann, detti allora N–pli ed indicati semplicemente con

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx\,,$$

e gli insiemi misurabili secondo Peano–Jordan: basta prendere come punto di partenza i prodotti cartesiani $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ e le quantità $(b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N)$ al posto rispettivamente degli ordinari parallelepipedi e degli ordinari volumi.

Accenni alla teoria di Lebesgue

Ben più rilevante, e complicato, è l'allargamento delle nozioni stesse di integrale e misura. Restiamo alle funzioni di due variabili per fissare le idee: esiste una maniera di definire una "integrabilità" che si applichi non solo agli elementi di Riem $(\mathbb{R}^2)$, ma anche a funzioni, come ad esempio quella di Dirichlet, che non rientrano in tale spazio? La risposta è affermativa, e qui diamo una pallida idea di come essa può essere articolata.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, \infty]$, indichiamo con Λ_f^+ la famiglia delle serie $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k$ di funzioni semplici con $\varphi_k \geq 0$ per $k \geq 2$ e $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k \geq f$. L'**integrale superiore di Lebesgue** è la quantità (non necessariamente reale)

$$\int^* f = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \int \varphi_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^\infty \varphi_k \in \Lambda_f^+ \right\}.$$

La nozione che abbiamo introdotto non richiede nessuna restrizione su f: né che si annulli al di fuori di un compatto, né che sia limitata, né, addirittura, che assuma solo valori reali (visto che permettiamo anche i valori ∞ e $-\infty$). E se prendiamo in particolare le $f \in L_c$? Allora ogni $\varphi \in \mathcal{S}_f^+$ è la somma della serie $\varphi + 0 + 0 + \cdots$, cioè della serie $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k$ con $\varphi_1 = \varphi$ e $\varphi_k = 0$ per $k \geq 2$, che sta in Λ_f^+ e verifica $\sum_{k=1}^\infty \int \varphi_k = \int \varphi$. Ne segue che $\mathcal{S}_f^+ \subseteq \Lambda_f^+$ e

$$\int^* f \leq \overline{\int} f. \tag{45}$$ I

L'integrale superiore di Lebesgue è, come quello di Riemann, positivo, positivamente omogeneo e subadditivo. Per quest'ultima proprietà si utilizza l'identità

$$\sum_{k=1}^\infty (\varphi_k + \psi_k) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k + \sum_{k=1}^\infty \psi_k\,,$$

qui valida perché le serie in Λ_f^+ e Λ_g^+, avendo tutti i termini ≥ 0 tranne (eventualmente) il primo, sono *incondizionatamente* convergenti o divergenti.

L'**integrale inferiore di Lebesgue** è la quantità

$$\int_* f = -\int^* (-f).$$

Anche l'integrale inferiore è positivo e positivamente omogeneo. Inoltre è superadditivo: quest'ultima proprietà segue dalla subadditività dell'integrale superiore, che implica anche

$$\int_* f \le \int^* f. \qquad (46) \qquad \boxed{\mathtt{P}}$$

Si ha poi

$$\int_* f \ge \underline{\int} f\,. \qquad (47) \qquad \boxed{\mathtt{L}}$$

Se i due membri della (46) sono finiti e uguali si dice che f è **integrabile secondo Lebesgue**, e per il loro comune valore si utilizzano le stesse notazioni che per l'integrale di Riemann. Ciò non crea ambiguità perché, grazie alle (45) e (47) che implicano

$$\int^* f - \int_* f \le \overline{\int} f - \underline{\int} f,$$

una funzione di L_c integrabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono.

Nel caso particolare che sia integrabile secondo Lebesgue la funzione caratteristica di un $E \subset \mathbb{R}^2$ diciamo che E è **misurabile secondo Lebesgue (in $\mathbb{R}^2$)** con **misura di Lebesgue** (finita) data da $\lambda(E) = \int \mathbf{1}_E$. Ne segue che, quando E è limitato, se è misurabile secondo Peano–Jordan lo è anche secondo Lebesgue.

Per mostrare che non vale il viceversa prendiamo $E = ([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$, che sappiamo non essere PJ–misurabile. Siccome E consiste in una successione $\{E_k\}$ di punti, e di conseguenza $\mathbf{1}_E$ è essa stessa somma di una serie $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_k}$ di funzioni a scala degeneri, risulta

$$\int^* \mathbf{1}_E = \sum_{j=1}^{\infty} \int \mathbf{1}_{E_k} = 0 = \int_* \mathbf{1}_E\,.$$

Quindi la funzione $\mathbf{1}_E$ è dotata di integrale di Lebesgue nullo, ovvero E è misurabile secondo Lebesgue con misura di Lebesgue nulla. E ricordiamo che la frontiera di E è tutto $[0,1]^2$, che ha misura di Peano–Jordan uguale ad 1. Ma si può subito andare molto avanti. Il ragionamento svolto per mostrare che $\lambda(E) = 0$ se $E = ([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$ può essere tranquillamente ripetuto per una qualunque infinità numerabile E di punti di $\mathbb{R}^2$, ad esempio per $E = \mathbb{Q}^2$. O anche per una retta verticale o orizzontale – unione di un'infinità numerabile di intervalli limitati – e poi per una infinità numerabile di tali rette.

Infine (ma nella teoria di Lebesgue è appena l'inizio. . .) si vede, procedendo come per l'integrale di Riemann, che le funzioni integrabili secondo Lebesgue costituiscono uno spazio vettoriale su cui l'integrale di Lebesgue è positivo e lineare.

13 Domini normali e formule di riduzione

Siano date due funzioni continue φ, ψ su un intervallo compatto $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ con la proprietà

$$\varphi \le \psi \quad \text{in} \quad [a, b].$$

L'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \qquad (48) \qquad \boxed{\mathtt{R}}$$

è un **dominio normale rispetto all'asse** x, l'insieme

$$D^\sharp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \le y \le b \ , \ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\} \tag{49}$$ $\boxed{\texttt{S}}$

un **dominio normale rispetto all'asse** y. Si tratta di insiemi misurabili secondo Peano–Jordan in virtù dell'Esempio 9.2 e del Teorema 11.1: le loro frontiere sono infatti PJ–trascurabili in $\mathbb{R}^2$ in quanto unioni di grafici di funzioni continue su intervalli compatti e di segmenti limitati.

Il dominio (48) è contenuto nel rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ con $c = \min_{[a,b]} \varphi \le \max_{[a,b]} \psi = d$. Sia f continua su D. Dall'Analisi I sappiamo che, fissato comunque $x \in [a,b]$, la funzione

$$y \mapsto \tilde{f}(x,y),$$

che vale $f(x,y)$ per $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$ e 0 altrove, è integrabile da c a d (perché è continua su tutto l'intervallo tranne, eventualmente, i punti $\varphi(x)$ e $\psi(x)$). Poniamo

$$F(x) = \int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Dall'espressione del terzo membro si ricava che su $[a,b]$ la funzione $x \mapsto F(x)$ è continua (cfr. l'Appendice), dunque integrabile. Il suo integrale

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

viene abitualmente indicato col simbolo

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Teorema 13.1. *L'integrale sul dominio normale* (48) *di una funzione $f \in C^0(D)$ verifica l'identità*

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{50}$$ $\boxed{\texttt{T}}$

Dimostrazione. Fissiamo arbitrariamente una partizione Π di R, il che è come dire una partizione $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$ di $[a,b]$ ed una partizione $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = d$ di $[c,d]$: il generico sottorettangolo associato a Π è $S_{hk} = [x_{h-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$, di area $A(S_{hk}) = (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$. Grazie all'additività rispetto agli intervalli di integrazione degli integrali di una variabile valgono le identità

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{h=1}^m \int_{x_{h-1}}^{x_h} F(x)\,dx \quad \text{e} \quad F(x) = \sum_{k=1}^n \int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x,y)\,dy,$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx &= \sum_{h=1}^m \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left(\sum_{k=1}^n \int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \sum_{h,k} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left(\int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx : \end{aligned}$$

abbiamo potuto portare la sommatoria su k fuori dall'integrale in dx grazie alla linearità di quest'ultimo. D'altra parte, applicando la positività degli integrali in dy ed in dx otteniamo facilmente

$$\left(\inf_{]x_{h-1},x_h[\times]y_{k-1},y_k[} \tilde{f}\right)(x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}) \leq \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left(\int_{y_{k-1}}^{y_k} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx$$

$$\leq \left(\sup_{]x_{h-1},x_h[\times]y_{k-1},y_k[} \tilde{f}\right)(x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$$

e quindi anche, sommando su h e k,

$$\sum_{h,k} \left(\inf_{S^\circ_{hk}} \tilde{f}\right) A(S_{hk}) \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx \leq \sum_{h,k} \left(\sup_{S^\circ_{hk}} \tilde{f}\right) A(S_{hk}).$$

Siccome $\tilde{f}$ è integrabile su $\mathbb{R}^2$ il suo integrale, cioè l'integrale di f su D, è l'unico numero reale che soddisfa le stesse disuguaglianze del secondo membro qui sopra al variare di Π, per cui vale l'identità

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

e quindi la (50).

□

Passando al dominio normale (49) si vede subito che ogni $g \in C^0(D^\sharp)$ è integrabile su $D^\sharp$ e verifica

$$\int_{D^\sharp} g(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} g(x,y)\,dx, \tag{51}$$

U

dove utilizzato a secondo membro la notazione abituale per l'integrale

$$\int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} g(x,y)\,dx\right) dy.$$

Le (50), (51) sono chiamate **formule di riduzione degli integrali doppi**.

Osservazione 13.1. Il Teorema 6.1 si applica in particolare alla funzione identicamente uguale a 1 su D. Dunque

$$A(D) = \int_D dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\psi(x)} dy = \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Prendendo φ identicamente nulla ritroviamo, come conseguenza della definizione di misurabilità nel senso di Peano–Jordan in $\mathbb{R}^2$, l'interpretazione dell'integrale (unidimensionale) di una funzione continua $\psi \geq 0$ come "area" del sottografico, che in Analisi I abbiamo introdotto con considerazioni geometriche.

Lo studio degli integrali sui domini normali del piano ammette una prima generalizzazione immediata allo spazio tridimensionale. Vediamo come. Fissate due funzioni φ, ψ continue su un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ del piano con $\varphi \leq \psi$ in R (e procedendo per $\mathbb{R}^3$ come nell'Esempio 9.2 per $\mathbb{R}^2$) vediamo subito che i loro grafici sono PJ–trascurabili in $\mathbb{R}^3$. L'insieme $D = \{(x,y,z) \in$

$\mathbb{R}^3|\ (x,y)\in R,\ \ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$ è PJ–misurabile (in $\mathbb{R}^3$), perché la sua frontiera è PJ–trascurabile (in $\mathbb{R}^3$). Infatti essa è costituita dall'unione di un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\partial R\times[\min_{\partial T}\varphi, \max_{\partial R}\psi]$, che è chiaramente PJ–trascurabile in $\mathbb{R}^3$ perché ∂R lo è in $\mathbb{R}^2$, e dei grafici di φ e ψ. Se f sta in $C^0(D)$, e quindi è integrabile su D per l'estensione al caso tridimensionale del Teorema 11.2, risulta

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_R dx\,dy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (52)$$ V

con a secondo membro la notazione abituale per

$$\int\limits_R\left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

(e si noti che l'integrale semplice da $\varphi(x,y)$ a $\psi(x,y)$ è una funzione continua, dunque integrabile, di $(x,y)\in R$); la seconda identità segue dalla formula di riduzione dell'integrale doppio. Per dimostrare la (52) si procede come nella dimostrazione del Teorema 6.1, solo che al posto dell'additività dell'integrale semplice sui sottointervalli associati ad una partizione di $[a,b]$ adesso si sfrutta quella dell'integrale doppio sui sottorettangoli associati ad una partizione di R.

Da qui si potrebbe poi passare alla generalizzazione della prima delle identità (52) che si ottiene prendendo

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ (x,y)\in K,\ \ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$$

con K sottoinsieme PJ–misurabile di $\mathbb{R}^2$:

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_K dx\,dy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (53)$$ W

(col significato ormai evidente del simbolo a secondo membro).

Naturalmente anche l'integrale doppio a secondo membro della (53) può essere ridotto se K è un dominio normale del piano.

La prima identità nella (52) e più in generale la (53) sono le **formule di riduzione degli integrali tripli**.

14 Cambiamenti di variabili

In Analisi I un ruolo importantissimo per il calcolo effettivo degli integrali sugli intervalli è svolto dall'integrazione per sostituzione. Quando si passa a una dimensione $N>1$ bisogna considerare trasformazioni di coordinate che siano **diffeomorfismi**, cioè applicazioni di classe C^1 e iniettive da aperti di $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$ con inverse anch'esse di classe C^1 (e nell'Osservazione 14.1 vedremo la ragion d'essere di questa scelta). Il risultato corrispondente è dato dal seguente

T9.1 **Teorema 14.1.** *Siano dati due aperti U e V di $\mathbb{R}^N$, il primo dei quali limitato e PJ–misurabile (in $\mathbb{R}^N$) con chiusura $K=\overline{U}$ contenuta in V. Se τ è un diffeomorfismo di V, o più in generale se è una funzione $V\to\mathbb{R}^N$ di classe C^1 la cui restrizione ad U è un diffeomorfismo di U, allora per ogni $f:\tau(K)\to\mathbb{R}$ continua vale l'identità*

$$\int_{\tau(K)} f(x)dx=\int_K (f\circ\tau)(u)|\Delta_\tau(u)|\,du\,. \qquad (54)$$ Z

Noi non daremo la dimostrazione del Teorema 14.1 in tutta la sua generalità ma soltanto, nella prossima Sezione, di una sua versione bidimensionale in ipotesi molto più restrittive.

Intanto ecco alcune importanti applicazioni del Teorema 14.1.

Trasformazioni affini invertibili di $\mathbb{R}^N$

Se A è una matrice $N \times N$ non singolare, la trasformazione $\tau : u \mapsto Au + p$ (con i vettori $u, p \in \mathbb{R}^N$ intesi come colonne, cioè matrici $N \times 1$) è un diffeomorfismo di $V = \mathbb{R}^N$, ed il suo jacobiano Δ_τ è (identicamente) uguale a $\det A$. Dunque per ogni scelta di K e di f del tipo richiesto dal Teorema 14.1 vale l'identità

$$\int_{\tau(K)} f(x)dx = |\det A| \int_K (f \circ \tau)(u)\, du\,.$$

Coordinate polari nel piano

La trasformazione

$$\tau(\theta, \varrho) = (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta),$$

il cui jacobiano $\Delta_\tau(\theta, \varrho)$ vale ϱ, è regolarissima su tutto $V = \mathbb{R}^2$, ma perché sia un diffeomorfismo la restringiamo al prodotto cartesiano di intervalli $0 < \vartheta < 2\pi$ e $0 < \varrho < R$, dove $0 < R < \infty$. Spessissimo si incontra l'applicazione del Teorema 14.1 con $U =]0, 2\pi[\times]0, R[$, quindi K uguale al rettangolo $[0, 2\pi] \times [0, R]$ e $\tau(K)$ uguale al disco chiuso D_R di raggio R; si noti che allora la frontiera di $\tau(K)$, cioè la circonferenza, è un sottoinsieme proprio della frontiera di $\tau(U)$, dal momento che quest'ultima comprende in più il segmento $[0, R[$ sul primo asse coordinato. La (54) diventa

$$\iint_{\overline{D_R}} f(x, y)\, dxdy = \iint_K f(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\varrho\, d\vartheta d\varrho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R f(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\varrho\, d\varrho \tag{55}$$

A’

per $f \in C^0(D_R)$. L'espressione dell'area πR^2 del disco D_R si ottiene integrando la lunghezza $2\pi\varrho$ della circonferenza di raggio ϱ, che è dunque la derivata dell'area del disco di raggio ϱ:

$$A(D_R) = \int_0^R 2\pi\varrho\, d\varrho.$$

Coordinate sferiche nello spazio tridimensionale

La trasformazione

$$\tau(\theta, \varrho, \varphi) = (\varrho\cos\theta\cos\varphi, \varrho\sin\theta\cos\varphi, \varrho\sin\varphi),$$

il cui jacobiano $\Delta_\tau(\theta, \varrho, \varphi)$ vale $\varrho^2\cos\varphi$, è regolarissima su tutto $V = \mathbb{R}^3$, e diventa un diffeomorfismo quando è ristretta al prodotto cartesiano $]0, 2\pi[\times]0, R[\times] - \pi/2, \pi/2[$. Prendendo ad esempio quest'ultimo come U e quindi la sua chiusura $[0, 2\pi] \times [0, R] \times [-\pi/2, \pi/2]$ come K, per cui $\tau(K)$ è la sfera (tridimensionale) chiusa B_R, otteniamo

$$\int_{B_R} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_K f(\varrho\cos\theta\cos\varphi, \varrho\sin\theta\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho^2\cos\varphi\, d\vartheta d\varrho d\varphi \tag{56}$$

(8.3)

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R d\varrho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varrho\cos\theta\cos\varphi, \varrho\sin\theta\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho^2\cos\varphi\, d\varphi$$

per $f \in C^0(B_R)$ (cfr. la (52)). La (56) fornisce il volume $4\pi R^3/3$ della sfera come integrale dell'area (nel senso della geometria euclidea) $4\pi\varrho^2$ della superficie sferica di raggio ϱ, area che è quindi la derivata del volume della sfera di raggio ϱ:

$$V(B_R) = \int_0^R 4\pi\varrho^2\, d\varrho.$$

o9.1 **Osservazione 14.1.** Nell'integrazione unidimensionale non avevamo mai visto comparire la richiesta che la sostituzione realizzasse un diffeomorfismo. In dimensione > 1 questa richiesta, formulata nel Teorema 14.1, è invece essenziale, come si vede dal seguente esempio per $N = 2$: il passaggio a coordinate polari $\tau(\vartheta, \varrho)$ non realizza un diffeomorfismo del rettangolo $U =]0, \alpha[\times]0, 1[$ se $\alpha > 2\pi$, e l'identità

$$\int_{\tau(K)} dxdy = \iint_K \varrho\, d\vartheta d\varrho,$$

$K = \overline{U}$, non è soddisfatta perchè $\tau(K)$ è il disco di raggio 1 e la sua area π è il valore del primo membro, mentre quello del secondo è

$$\int_0^\alpha d\vartheta \int_0^1 \varrho\ d\varrho = \frac{\alpha}{2} > \pi.$$

15 Alcuni risultati particolari con le dimostrazioni

Vediamo cosa diventa l'integrazione per sostituzione su un intervallo $[\alpha, \beta]$ nelle ipotesi del Teorema 14.1 per $N = 1$. Sia data una funzione $h \in C^1([\alpha, \beta])$. Se F è una funzione continua su $h([\alpha, \beta]) = [A, B]$, dove $A = \min(h(\alpha), h(\beta))$ e $B = \max(h(\alpha), h(\beta))$, vale l'identità

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} F(\eta)\, d\eta = \int_\alpha^\beta F(h(v))h'(v)\, dv. \tag{57}$$ B'

Aggiungiamo l'ipotesi che h' si mantenga $\neq 0$. Poiché ci troviamo su un intervallo questo significa che o $h' > 0$ (e quindi $h(\alpha) < h(\beta)$) o $h' < 0$ (e quindi $h(\alpha) > h(\beta)$). Nel primo caso la (57) diventa

$$\int_A^B F(\eta)\, d\eta = \int_\alpha^\beta F(h(v))h'(v)\, dv,$$

nel secondo

$$\int_A^B F(\eta)\, d\eta = -\int_\alpha^\beta F(h(v))h'(v)\, dv.$$

Riassumiamo in un'unica identità:

$$\int_A^B F(\eta)\, d\eta = \int_\alpha^\beta F(h(v))|h'(v)|\, dv. \tag{58}$$ C'

Passiamo a due dimensioni. Sia K un dominio normale rispetto al *primo* asse coordinato:

$$K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 |\ a \le u \le b,\ \alpha(u) \le v \le \beta(u)\}$$

con α, β continue su un intervallo compatto $[a, b]$, $\alpha < \beta$ in $]a, b[$. Siano poi $V \subset \mathbb{R}^2$ un aperto contenente K e σ un diffeomorfismo di V che lascia invariata la *prima* coordinata, cioè una funzione vettoriale iniettiva $\sigma : (u, v) \mapsto (u, h(u, v))$ con $h \in C^1(V)$ e determinante jacobiano $\Delta_\sigma = h_v$ sempre diverso da 0. Fissiamo un $u \in [a, b]$. L'immagine di $[\alpha(u), \beta(u)]$ nella $v \mapsto h(u, v)$ è l'intervallo

$[A(u), B(u)]$ con $A(u) = \min\{h(u, \alpha(u)), h(u, \beta(u))\}$ e $B(u) = \max\{h(u, \alpha(u)), h(u, \beta(u))\}$, e $\sigma(K)$ è anch'esso un dominio normale rispetto al *primo* asse coordinato:

$$\sigma(K) = \{(u, \eta) \in \mathbb{R}^2 |\ a \le u \le b,\ \ A(u) \le \eta \le B(u)\}.$$

Sia $F \in C^0(\sigma(K))$. La (58) diventa

$$\int_{A(u)}^{B(u)} F(u, \eta)\, d\eta = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} F(u, h(u, v))|h_v(u, v)|\, dv = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} (F \circ \sigma)(u, v)|\Delta_\sigma(u, v)|\, dv.$$

La dipendenza da u è continua, per cui possiamo integrare in u da a a b:

$$\int_a^b du \int_{A(u)}^{B(u)} F(u, \eta)\, d\eta = \int_a^b du \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} (F \circ \sigma)(u, v)|\Delta_\sigma(u, v)|\, dv.$$

Grazie alla formula di riduzione degli integrali doppi sui domini normali il primo membro è l'integrale doppio di F su $\sigma(K)$, mentre il secondo è quello di $(F \circ \sigma)|\Delta_\sigma|$ su K. Dunque

$$\int_{\sigma(K)} F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \int_K (F \circ \sigma)(u, v)|\Delta_\sigma(u, v)|\, dudv \text{ per } F \in C^0(\sigma(K)) \tag{59}$$ D'

(dove abbiamo indicato la prima variabile d'integrazione nel primo membro con ξ invece di u).

Analogamente: Sia $\hat{K}$ un dominio normale rispetto al *secondo* asse coordinato:

$$\hat{K} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 |\ c \le \eta \le d,\ \ \lambda(\eta) \le \xi \le \mu(\eta)\}$$

con λ, μ continue su un intervallo compatto $[c, d]$, $\lambda < \mu$ in $]c, d[$. Siano poi $\hat{V} \subset \mathbb{R}^2$ un aperto contenente $\hat{K}$ e $\hat{\sigma}$ un diffeomorfismo di $\hat{V}$ che lascia invariata la *seconda* coordinata. Allora

$$\int_{\hat{\sigma}(\hat{K})} f(x, y)\, dxdy = \int_{\hat{K}} (f \circ \hat{\sigma})(\xi, \eta)|\Delta_\sigma(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta \text{ per } f \in C^0(\hat{\sigma}(\hat{K}). \tag{60}$$ E'

Sotto certe ipotesi si possono applicare successivamente il primo ed il secondo tipo di cambiamento di variabili negli integrali:

T10.1 **Teorema 15.1.** *Siano K un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e $\tau : (u, v) \mapsto (g(u, v), h(u, v))$ un diffeomorfismo di un aperto $V \supset K$. Supponiamo che*

(i) o $(u, v) \mapsto (u, h(u, v))$ oppure $(u, v) \mapsto (g(u, v), v)$ sia anch'esso un diffeomorfismo σ di V,

(ii) $\sigma(K)$ sia normale rispetto ad entrambi gli assi.

Allora vale l'identità

$$\int_{\tau(K)} f(x, y)\, dxdy = \int_K (f \circ \tau)(u, v)|\Delta_\tau(u, v)|\, dudv \tag{61}$$ F'

per ogni $f \in C^0(\tau(K))$.

Dimostrazione. Supponiamo per fissare le idee che σ sia $(u, v) \mapsto (u, h(u, v))$, ovvero abbia per prima componente l'identità sulla prima coordinata. Allora anche la sua inversa σ^{-1} ha per prima componente l'identità sulla prima coordinata: $(u, v) = \sigma^{-1}(\xi, \eta)$ se e solo se $u = \xi$, $h(u, v) = \eta$. Quindi la funzione vettoriale $\hat{\sigma} = \tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(V) \to \mathbb{R}^2$ è a sua volta un diffeomorfismo la cui seconda componente è data dall'identità sulla seconda coordinata:

$$(x, y) = \hat{\sigma}(\xi, \eta) \Longleftrightarrow (x, y) = \tau(u, v) \text{ con } (u, v) = \sigma^{-1}(\xi, \eta) \Longrightarrow y = h(u, v) = \eta.$$

Inoltre il prodotto della matrice jacobiana di $\hat{\sigma}$, composta con σ, per quella di σ è uguale alla matrice jacobiana di τ e quindi, passando ai determinanti,

$$(\Delta_{\hat{\sigma}} \circ \sigma)\Delta_\sigma = \Delta_\tau. \tag{62}$$ G'

Siccome $\sigma(K)$ è per ipotesi normale *anche* rispetto al secondo asse, possiamo applicare la (60) con $\hat{V} = \sigma(V)$ e $\hat{K} = \sigma(K)$, dunque $\hat{\sigma}(\hat{K}) = \tau(K)$:

$$\int_{\tau(K)} f(x,y)\,dxdy = \int_{\hat{\sigma}(\hat{K})} f(x,y)\,dxdy = \int_{\hat{K}} (f \circ \hat{\sigma})(\xi,\eta)|\Delta_{\hat{\sigma}}(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta. \tag{63}$$ H'

Applicando poi la (59) con $F = (f \circ \hat{\sigma})|\Delta_{\hat{\sigma}}|$ e in seguito la (62), vediamo che il terzo membro della (63) è uguale a

$$\int_K (f \circ \hat{\sigma} \circ \sigma)(u,v)|(\Delta_{\hat{\sigma}} \circ \sigma)(u,v)||\Delta_\sigma(u,v)|\,dudv = \int_K (f \circ \tau)(u,v)|\Delta_\tau(u,v)|\,dudv.$$

Ciò dimostra la (61).

□

Le ipotesi del Teorema 15.1 sono enormemente più restrittive di quelle del Teorema 14.1 e la (ii), in particolare, è davvero "innaturale. Infatti se σ è $u \mapsto (u, h(u,v))$, cioè lascia invariata la prima coordinata, l'immagine in $\sigma(K)$ è, come abbiamo visto, normale rispetto al primo asse coordinato, ma non è detto che lo sia anche rispetto al secondo. Però questo accade se aggiungiamo l'ipotesi che ciascuna funzione $u \mapsto A(u) = h(u,c)$ e $u \mapsto B(u) = h(u,d)$ sia o costante, o strettamente monotona e dunque invertibile, come "si vede" facendo i disegni rappresentativi dei casi possibili (figure simili a " parallelogrammi" o "trapezi"). Ciò consente di ritrovare alcune delle applicazioni che abbiamo visto nella sezione precedente.

Cominciamo dalle coordinate polari, scrivendo come al solito ϑ e ϱ al posto, rispettivamente, di u e v:

$$\tau : (\vartheta, \varrho) \mapsto (\varrho \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta).$$

Le ipotesi del Teorema 15.1 sono soddisfatte per ogni scelta di $K = [\alpha, \pi/2] \times [r, 1]$ con $0 < \alpha < \pi/2$ e $0 < r < R < \infty$. Vale dunque la (60), cioè

$$\int_{\tau(K)} f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^{\pi/2} d\vartheta \int_r^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho.$$

Allo stesso modo si vede, prendendo $K' = [\pi/2, \pi - \alpha] \times [r, R]$, che

$$\int_{\tau(K')} f(x,y)\,dxdy = \int_{\pi/2}^{\pi-\alpha} d\vartheta \int_r^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho.$$

Sommando membro a membro le due identità otteniamo

$$\int_W f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^{\pi-\alpha} d\vartheta \int_r^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho$$

per ogni scelta di f continua sul "ventaglio $W = \tau([\alpha, \pi - \alpha] \times [r, R])$.

A questo punto non sarebbe difficile, facendo tendere a 0 sia α che r, dimostrare l'identità

$$\int_{\overline{S_R^+}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho$$

con S_R^+ uguale al semidisco superiore di raggio R; poiché in maniera analoga si otterrebbe

$$\int_{\overline{S_R^-}} f(x,y)\,dxdy = \int_\pi^{2\pi} d\vartheta \int_0^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho$$

con S_R^- uguale al semidisco inferiore, potremmo sommare membro a membro le due ultime identità ed arrivare a

$$\iint_{\overline{D_R}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\varrho\,d\varrho$$

(cfr. la (55)).

Passiamo a τ trasformazione affine invertibile di $\mathbb{R}^2$:

$$\tau : (u,v) \mapsto (au + bv + p, cu + dv + q)$$

con matrice dei coefficienti A non singolare, cioè $\Delta_\tau = \det A = ad - bc \neq 0$. Siccome un parallelogramma K è un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi, ed è trasformato in un altro parallelogramma da una qualunque trasformazione affine invertibile di $V = \mathbb{R}^2$, le ipotesi (i), (ii) sono soddisfatte. Dunque l'integrale sul parallelelogramma $\tau(K)$ di una qualunque $f \in C^0(\tau(K))$ verifica la

$$\int_{\tau(K)} f(x,y)\,dxdy = |\det A| \int_K (f\circ\tau)(u,v)\,dudv. \tag{64}$$ $\boxed{\texttt{I'}}$

Se $\tau(K)$ è un rettangolo e si prende $f = \mathbf{1}_{\tau(K)}$ la (64) fornisce la ben nota formula di trasformazione affine dell'area di $\tau(K)$: $A(\tau(K)) = |ad - bc|$. Sia $f \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ e siano φ, β funzioni a scala tali che $\varphi \le f \le \psi$ e $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Siccome $\varphi\circ\tau \le f\circ\tau \le \psi\circ\tau$ e

$$|ad-bc|\int(\varphi\circ\tau) \le |ad-bc|\underline{\int}(f\circ\tau) \le |ad-bc|\overline{\int}(f\circ\tau) \le |ad-bc|\int(\psi\circ\tau)$$

con

$$|ad-bc|\int(\psi\circ\tau - \varphi\circ\tau) = \int(\psi-\varphi) < \varepsilon$$

otteniamo

$$|ad-bc|\underline{\int}(f\circ\tau) = |ad-bc|\overline{\int}(f\circ\tau) = \int f$$

ovvero $f\circ\tau \in \mathrm{Riem}\,(\mathbb{R}^2)$ con

$$|ad-bc|\int(f\circ\tau) = \int f.$$

Se in particolare τ è composizione di rotazioni e traslazioni otteniamo

$$\int(f\circ\tau) = \int f$$

cioè il risultato preannunciato nell'Osservazione 11.1.

16 La formula di Gauss–Green

Siano date due funzioni reali continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $\varphi < \psi$ su $]a,b[$, dove $-\infty < a < b < \infty$. Indichiamo con K l'uno o l'altro dei due domini normali definiti a partire da f e g, cioè o

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} \tag{65}$$ 7.1

oppure

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \le y \le b,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}. \tag{66}$$ 7.2

Se K è il dominio (65) la sua frontiera è il sostegno della curva regolare a tratti e chiusa ottenuta agganciando consecutivamente: la curva $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$; il segmento (che può anche ridursi ad un punto) $x = b$, $\varphi(b) \le y \le \psi(b)$; l'opposta della curva $y = \psi(x)$, $a \le x \le b$; l'opposto del segmento (che può anche ridursi ad un punto) $x = b$, $\varphi(a) \le y \le \psi(a)$. Considerazioni del tutto analoghe valgono per K dato dalla (66).

Aggiungiamo l'ipotesi che φ e ψ siano di classe C^1 su $[a,b]$. Per semplificare la terminologia diciamo che i domini (65) e (66) sono adesso, rispettivamente, di **tipo I** e di **tipo II**. In entrambi i casi la frontiera ∂K di K è sostegno di una curva regolare a tratti che orientiamo in senso antiorario e denotiamo con $+\partial K$. In ogni punto di ∂K ad eccezione di $(a, \varphi(a))$, $(a, \psi(a))$, $(b, \varphi(b))$ e $(b, \psi(b))$ è definito il **versore normale esterno** a K, che indichiamo con ν_{e}. Si tratta del vettore uguale a

$$\frac{(-\psi'(x), 1)}{\sqrt{1 + \psi'(x)^2}} \quad \text{nei punti } (x, \psi(x)) \text{ con } a < x < b,$$

$$\frac{(\varphi'(x), -1)}{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}} \quad \text{nei punti } (x, \varphi(x)) \text{ con } a < x < b,$$

nonché a $(-1, 0)$ nei punti (a, y) con $\varphi(a) < y < \psi(a)$ (se ce ne stanno), $(1, 0)$ nei punti (b, y) con $\varphi(b) < y < \psi(b)$ (se ce ne stanno). Il **versore normale interno** a K, che indichiamo con ν_{i}, è l'opposto di ν_{e}.

Prolunghiamo φ e ψ a tutto $\mathbb{R}$ conservando la loro regolarità C^1 e ancora una volta, per fissare le idee, prendiamo come K il dominio (65). Se A è un aperto che contiene K, quest'ultimo è contenuto nell'unione di rettangoli aperti $I \times]c, d[$ con

$$[a,b] \times [c,d] \subset A, \quad c < \varphi(x), \psi(x) < d \quad x \in I. \tag{67}$$ 7.3

t7.1 **Teorema 16.1.** *Sia K uno dei due aperti (65) o (66) e siano L, M due funzioni continue, nonchè dotate di derivate parziali L_y, M_x anch'esse continue, in un aperto $A \supset K$. Risulta*

$$\int_K (M_x - L_y)\, dxdy = \int_{+\partial K} L\, dx + M\, dy. \tag{68}$$ 7.4

Dimostrazione. Sia K il dominio di tipo I dato dalla (65). Per la formula di riduzione degli integrali doppi ed il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta

$$\int_K L_y\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} L_y(x,y)\, dy = \int_a^b [L(x, \psi(x)) - L(x, \varphi(x))]\, dx = -\int_{+\partial K} L\, dx. \tag{69}$$ 7.5'

Per ogni scelta di I, c, d tali che che sia soddisfatta la (67), si applica il Teorema 4.3 alla funzione

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M(x,y)\, dy$$

nei punti $x \in I$ e si ottiene l'identità

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M_x(x,t)\,dt + M(x,\psi(x))\psi'(x) - M(x,\varphi(x))\varphi'(x),$$

che viene dunque ad essere valida in ogni punto $x \in [a,b]$. Integrandola su $[a,b]$ otteniamo

$$\int_T M_x\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M_x(x,y)\,dy$$

$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} M(b,y)\,dy - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} M(a,y)\,dy - \int_a^b [M(x,\psi(x))\psi'(x) - M(x,\varphi(x))\varphi'(x)]\,dx$$

$$= \int_{+\partial K} M\,dy,$$

dove la differenza dei due integrali in dy del 3° membro è $\Gamma(b) - \Gamma(a)$.

Da qui e da (69) segue la (68).

Lo stesso discorso vale per K dato dalla (66). □

La (68) è la **formula di Gauss–Green**. Ne diamo una formulazione equivalente prendendo una funzione vettoriale continua $F = (F_1, F_2) : A \to \mathbb{R}^2$ con derivate F_{1x}, F_{2y} anch'esse continue in A. Per L uguale ad $-F_2$ e M ad F_1, dunque $M_x - L_y$ uguale alla **divergenza** $\operatorname{div} F = (F_{1x}, F_{2y})$, la (68) diventa

$$\int_K \operatorname{div} F\,dxdy = \int_{+\partial K} - F_2\,dx + F_1\,dy. \tag{70}$$ 7.6

Il secondo membro della (68) è la somma dei seguenti quattro addendi:

$$\int_a^b \left[F_1(x,\varphi(x)) \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}} + F_2(x,\varphi(x)) \frac{-1}{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}} \right] \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx,$$

$$\int_a^b \left[F_1(x,\psi(x)) \frac{-\psi'(x)}{\sqrt{1+\psi'(x)^2}} + F_2(x,\psi(x)) \frac{1}{\sqrt{1+\psi'(x)^2}} \right] \sqrt{1+\psi'(x)^2}\,dx,$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} F_1(a,y)(-1)\,dy \quad \text{e} \quad \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} F_1(a,y)\cdot 1\,dy.$$

Ma allora la (70) si può riscrivere come

$$\int_K \operatorname{div} F\,dxdy = \int_{\partial K} F \cdot \nu_{\mathrm{e}}\,ds. \tag{71}$$ 7.7

Nel secondo membro la scelta dell'orientazione sulla frontiera di K, che non può tradursi nel verso di percorrenza sul cammino di integrazione dell'integrale di *prima* specie, dal momento che quest'ultimo ne è indipendente (e infatti abbiamo soppresso il segno +), compare invece nella funzione integranda, dove il versore normale da scegliere è precisamente quello esterno ν_{e} e non il suo opposto ν_{i}.

La variante (71) della formula di Green esprime, sotto le ipotesi che abbiamo dato, il **Teorema della divergenza**.

Indichiamo con K il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Si tratta sı di un dominio normale, ma non di tipo I né di tipo II, perché le funzioni

$$[-1,1] \ni x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2}, \quad [-1,1] \ni y \mapsto \pm\sqrt{1-y^2}$$

non sono di classe C^1. Però domini quali

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \leq -1/\sqrt{2}\}$$

e

$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 1/\sqrt{2}\}$$

sono di tipo II (non di tipo I), mentre

$$K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1,\ -1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}\}$$

è di tipo I (non di tipo II). K è unione dei K_j, e la sua frontiera, con l'orientazione indotta da quelle delle $+\partial K_j$, diventa una curva orientata che indichiamo con $+\partial K$. (Naturalmente avremmo potuto più semplicemente dire che $+\partial K$ è la circonferenza unitaria orientata in senso antiorario, però in tal modo non avremmo suggerito una procedura di portata generale.) Se le funzioni L ed M sono continue, con L_y e M_x anch'esse continue, in un aperto contenente K si può applicare la formula di Gauss–Green su ogni K_j ed ottenere

$$\int_K (M_x - L_y)\,dxdy = \sum_{j=1}^{3} \int_{K_j} (M_x - L_y)\,dxdy$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{+\partial K_j} L\,dx + M\,dy = \int_{+\partial K} L\,dx + M\,dy$$

grazie alla cancellazione reciproca dei contributi negli $\int_{+\partial K_j} L\,dx + M\,dy$ dei segmenti verticali delle ∂K_j. L'ultimo membro si può adesso scrivere come un integrale sulla curva $[0,2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Le considerazioni appena svolte per il cerchio si generalizzano ad ogni dominio K di cui si possa dare, mediante intersezioni con opportune rette verticali ed orizzontali, una decomposizione in un numero finito di sottodomini di tipo I o II privi due a due di punti interni in comune; le frontiere dei sottodomini orientate positivamente inducono automaticamente sulla frontiera di K una orientazione (positiva *per definizione*). Diciamo allora che K è **ammissibile**, e il Teorema 16.1 ammette il seguente

Corollario 16.1. *La formula di Gauss–Green vale in ogni dominio ammissibile K per funzioni L ed M continue, con L_y e M_x anch'esse continue, in un aperto contenente K.*

L'enunciato precedente si trasforma in un attimo nella sua variante per il Teorema della divergenza.

Esempio 16.1. Se un triangolo ha un lato verticale è un dominio di tipo I, se ne ha uno orizzontale è un dominio di tipo II. Peraltro è facile decomporre un qualunque triangolo nell'unione di due triangoli con un lato verticale oppure con uno orizzontale in comune. Ne segue che ogni triangolo è un dominio ammissibile.

Esempio 16.2. Una corona circolare è ammissibile, e l'orientazione positiva sulla sua frontiera induce il verso di percorrenza antiorario sulla circonferenza maggiore, quello orario sulla circonferenza minore.

Esempio 16.3. Se ad un dominio normale di tipo I o II si toglie un disco aperto la cui chiusura sia contenuta all'interno del dominio si ottiene un dominio ammissibile (unione di 8 domini normali di tipo I oppure II). Da qui si arriva facilmente a generalizzare l'Esempio 7.2 della corona circolare, mostrando che è ammissibile un disco chiuso privato di un disco aperto con la chiusura contenuta all'interno del disco di partenza.

Osservazione 16.1. Prendendo una volta $L(x,y) = 0$, $M(x,y) = x$ e l'altra $L(x,y) = -y$, $M(x,y) = 0$ otteniamo per l'area di un dominio ammissibile K le espressioni

$$v_2(K) = \int_{+\partial K} x\,dy = -\int_{+\partial K} y\,dx.$$

Spesso, nelle applicazioni, quella che viene data esplicitamente è una curva semplice e chiusa γ su cui bisogna calcolare un integrale di seconda specie: se si vuole ricorrere alla formula di Gauss–Green bisogna mostrare innanzitutto che il sostegno di γ è la frontiera di un dominio ammissibile K, e poi che l'integrale su γ è uguale a quello su $+\partial K$.

17 Funzioni a valori complessi e operatori differenziali lineari

secI1-3

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ la regola di derivazione delle funzioni composte dà immediatamente

$$De^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \tag{72}$$ I-1.1

e più in generale

$$D^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{73}$$ I-1.2

È difficile sopravvalutare l'importanza della (73) in Analisi Matematica. Essa ci dice *nientedimeno* che applicare k volte alla funzione $t \mapsto e^{\lambda t}$ l'operatore di derivazione è la stessa cosa che moltiplicarla per lo scalare λ^k. In sé stessa questa è una proprietà ben nota per λ reale fin dagli inizi dello studio del Calcolo. Ma per farle giocare l'insostituibile ruolo che è il suo nello studio delle equazioni differenziali si rivelerà conveniente, come vedremo fra breve, estenderla a valori complessi $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A tal fine partiamo dall'**identità di Eulero**

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Derivando otteniamo

$$D(e^{\alpha t}\cos \beta t) = e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t), \quad D(e^{\alpha t}\sin \beta t) = e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t)$$

ovvero

$$D[e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)] = (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

da cui la (72), e quindi la (73), anche per $\lambda \in \mathbb{C}$.

Adesso possiamo studiare per ogni $a \in \mathbb{C}$ le **equazioni differenziali lineari** più semplici che esistano: l'**omogenea**

$$y' + ay = 0 \tag{74}$$ I-3.1

e la **non omogenea**

$$y' + ay = f(t) \tag{75}$$ I-3.2

con $f(t)$ (a valori complessi) almeno di classe C^0 in un intervallo aperto I.

Alla (74) già si riconducono alcuni modelli di importanti fenomeni fisici o biologici: il decadimento radioattivo ($y(t)$ denota la quantità del materiale radioattivo presente al tempo t, mentre a è una costante reale positiva che dipende solo dalle caratteristiche chimiche del materiale stesso), l'evoluzione numerica di una popolazione secondo la teoria malthusiana ($y(t)$ denota la "quantità" presente al tempo t ed a è una costante reale uguale alla differenza tra il tasso di mortalità e quello di natalità, supposti costanti), eccetera. La (75) governa ad esempio il modello newtoniano della caduta libera di un corpo in un mezzo resistente (con $y(t)$ velocità di caduta, $a = k/m$ dove la costante k caratterizza la forza d'attrito $-ky(t)$ del mezzo e m è la massa del corpo, infine $f(t) = g$ accelerazione di gravità) o quello della variazione nel tempo della temperatura $y(t)$ di un corpo posto in un ambiente di temperatura uguale a $f(t)/a$ con $a > 0$ (la rapidità $y'(t)$ con cui varia $y(t)$ è proporzionale, con fattore a, allo scarto $f(t)/a - y(t)$).

La (72) ci permette di constatare in un attimo che la funzione e^{-at} è una soluzione (su tutto $\mathbb{R}$) della (74), e quindi è tale ogni Ke^{-at} con K arbitraria costante complessa; se in particolare a è reale, e noi ci interessiamo alle sole soluzioni reali, prendiamo come K un'arbitraria costante reale. Ci sono altre soluzioni, definite in qualche intervallo aperto I? Facciamo vedere che la risposta è negativa, servendoci di una tecnica che chiamiamo della **funzione ausiliaria** (malgado questo sia un termine così generico da rischiare la vacuità). Una qualunque funzione derivabile $y(t)$ definita in I si scrive come prodotto $v(t)e^{-at}$ con $v(t)$ (la funzione ausiliaria) da determinare, e verifica

$$y'(t) + ay(t) = [v(t)e^{-at}]' + av(t)e^{-at} = v(t)[(e^{-at})' + ae^{-at}] + v'(t)e^{-at} = v'(t)e^{-at}. \tag{76}$$ I-3.3

Se $y(t)$ è soluzione della (74) in I, il primo membro si annulla e quindi $v'(t) = 0$ ovvero $v(t) =$ costante. Ne segue che dev'essere

$$y(t) = Ke^{-at} \tag{77}$$ I-3.4

per t in I (e di conseguenza $I = \mathbb{R}$). Abbiamo così visto che l'**integrale generale** dell'equazione differenziale (74) è Ke^{-at}, $t \in \mathbb{R}$. Questo implica che le soluzioni costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 1; come campo degli scalari prendiamo $\mathbb{C}$ se ci interessiamo, per a reale o complesso che sia, alla famiglia delle soluzioni complesse, e invece $\mathbb{R}$ se a è reale e ci interessiamo alla famiglia delle soluzioni reali. Le singole soluzioni dell'equazione, cioè gli **integrali particolari**, si ottengono volta per volta fissando la costante K dell'integrale generale. Così, dati comunque t_0 in $\mathbb{R}$ e u_0 in $\mathbb{C}$ o in particolare in $\mathbb{R}$, un'eventuale soluzione $y(t)$ della (74) che soddisfi anche la **condizione iniziale** o **di Cauchy**

$$y(t_0) = u_0 \tag{78}$$ I-3.5

è l'integrale particolare univocamente determinato dalla richiesta $Ke^{-at_0} = u_0$. Riassumendo: per ogni scelta di t_0 e di u_0 il **problema di Cauchy** (74),(78) ammette un'unica soluzione, data dalla funzione (81) con $K = u_0e^{at_0}$.

Anche per l'equazione non omogenea si rivela utile l'utilizzo della funzione ausiliaria $v(t)$. Questa però non potrà più assumere valori costanti come nel caso dell'omogenea, ragion per cui il metodo è detto di **variazione delle costanti**. Infatti dalla (76) segue che una funzione $y(t) = v(t)e^{-at}$ di classe (almeno) C^1 in I soddisfa la (75) se e solo se

$$v'(t)e^{-at} = f(t) \tag{79}$$ I-3.6

ovvero

$$v(t) = K + \int_{t_0}^{t} e^{as} f(s)\, ds$$

$(t_0, t \in I)$. Ne segue che le soluzioni della (75) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$y(t) = Ke^{-at} + \left(\int_{t_0}^{t} e^{as} f(s)\, ds\right) e^{-at}$$

cioè

$$y(t) = Ke^{-at} + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)} f(s)\, ds \qquad (80) \quad \boxed{\texttt{I-3.7}}$$

(è indifferente che si metta la quantità e^{-at} all'interno o all'esterno dell'integrale in ds). Abbiamo dunque ottenuto l'integrale generale della non omogenea (75) come somma di Ke^{-at}, integrale generale dell'omogenea (74), e di $\left(\int_{t_0}^{t} e^{as} f(s)\, ds\right) e^{-at}$, integrale particolare della non omogenea stessa. Quanto al problema di Cauchy (75),(78) per la non omogenea, la sua unica soluzione è l'integrale particolare che si ottiene ponendo $K = u_0 e^{at_0}$ nella (80).

È peraltro opportuno soffermarsi sulla ricerca di integrali particolari della (75) quando il termine noto $f(t)$ suggerisce delle strade più convenienti che non il tecnico calcolo della (80).

Per cominciare va tenuto conto del **principio di sovrapposizione**: se $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ e $y_1(t), y_2(t)$ soddisfano rispettivamente

$$y_1' + ay_1 = f_1(t), \quad y_2' + ay_2 = f_2(t)$$

la funzione $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ è soluzione della (75).

Passiamo ai termini noti che si scrivono come prodotti di polinomi e funzioni esponenziali, illustrando come il metodo dei **coefficienti indeterminati** consenta di aggirare il calcolo dell'integrale nella (80).

Cominciamo dal caso elementare dell'equazione

$$y' + ay = Be^{ct} \qquad (81) \quad \boxed{\texttt{I-3.8}}$$

con B costante complessa —polinomio di grado 0!— non nulla. Per un generico valore della costante A (il coefficiente indeterminato) la funzione Ae^{ct} verifica l'identità

$$(Ae^{ct})' + aAe^{ct} = (c+a)Ae^{ct} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

e quindi se $c \neq -a$ è una soluzione della (81) se e solo se $(c+a)A = B$, ovvero $A = B/(c+a)$. Sia invece $c = -a$: una qualunque funzione $Ae^{ct} = Ae^{-at}$ è soluzione dell'equazione omogenea, dunque non della (81). Ma la (79) adesso diventa $v'(t)e^{-at} = Be^{-at}$ ovvero $v'(t) = B$, e quindi l'equazione non omogenea è soddisfatta dalle funzioni $(C + Bt)e^{-at}$, con C costante arbitraria (che possiamo prendere direttamente uguale a 0 perché tanto Ce^{-at} è comunque soluzione dell'omogenea).

Il procedimento appena visto si estende facilmente a un termine noto più generale $f(t) = p(t)e^{ct}$, ovvero all'equazione

$$y' + ay = p(t)e^{ct},$$

con $p(t)$ polinomio $B_0 + B_1 t + \cdots + B_{n-1}t^{n-1} + B_n t^n$ di grado $n \geq 1$. Quando $c \neq -a$ si cerca una soluzione sotto la forma $q(t)e^{ct}$ con $q(t) = A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1}t^{n-1} + A_n t^n$, calcolando prima, per generici valori dei coefficienti indeterminati A_k, la quantità $(q(t)e^{ct})' + aq(t)e^{ct}$, e imponendo poi che essa sia uguale a $p(t)e^{ct}$: dopo aver diviso per e^{ct} ed applicato il principio di identità dei polinomi si ricavano le condizioni

$$(c+a)A_n = B_n, \quad (c+a)A_{n-1} + nA_n = B_{n-1}, \quad \ldots, \quad (c+a)A_0 + A_1 = B_0$$

che individuano successivamente $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$.

Quando $c = -a$, cioè $f(t) = e^{-at}p(t)$, la strada è ancora più rapida. La (79) diventa infatti $v'(t) = p(t)$, per cui l'equazione non omogenea è soddisfatta dalle funzioni $P(t)e^{ct}$ con $P(t)$ primitiva di $p(t)$, e dunque determinata a meno di un'arbitraria costante additiva C (che possiamo tranquillamente prendere uguale a 0 perché tanto Ce^{-at} è comunque soluzione dell'omogenea).

Supponiamo adesso che $f(t)$ sia una funzione *reale* data dal prodotto di un polinomio $q(t)$ a coefficienti reali, di una funzione esponenziale $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e di una funzione trigonometrica $\cos \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}$, per cui la (75) si riscrive

$$y' + ay = q(t)e^{\alpha t} \cos \beta t. \tag{82}$$ I-3.11

Se anche il coefficiente a viene preso in $\mathbb{R}$ è naturale cercare una soluzione *reale* della (82). A tal fine si passa al termine noto $g(t) = q(t)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = q(t)e^{(\alpha + i\beta)t}$, che ha per parte reale la funzione di partenza $f(t)$, e si calcola una soluzione $z(t)$ a valori in $\mathbb{C}$ della corrispondente equazione non omogenea

$$z' + az = q(t)e^{(\alpha+i\beta)t}. \tag{83}$$ I-3.12

Prendendo le parti reali di entrambi i membri della (83) vediamo che $\operatorname{Re} z(t)$ verifica

$$(\operatorname{Re} z)' + a(\operatorname{Re} z) = q(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$$

e quindi è una soluzione $y(t)$ della (82). Analogamente si vede che la parte immaginaria di una soluzione della (83) è soluzione dell'equazione

$$y' + ay = q(t)e^{\alpha t} \sin t\beta t.$$

18 Una prima separazione delle variabili

secI1-4

Adesso consentiamo al coefficiente di y nella (74) di variare con continuità, *assumendo solo valori reali*, in un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$y' + a(t)y = 0. \tag{84}$$ I-4.1

Operiamo nella (84) una **separazione delle variabili** attraverso l'utilizzo — a prima vista un po' disinvolto — della notazione di Leibniz $dy/dt = y'$:

$$\frac{dy}{y} + a(t)\, dt = 0.$$

In effetti per $y \neq 0$ il primo membro di questa identità ha perfettamente senso come *forma differenziale*, e da tale punto di vista ne vedremo una generalizzazione tra breve. Qui però va benissimo riscriverlo semplicemente sotto forma integrale:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)dt$$

ovvero

$$\log |y| = -A(t) + K \tag{85}$$ I-4. 2

con K costante e $A(t)$ primitiva di $t \mapsto a(t)$ in I. La (85) è una famiglia di equazioni cartesiane in $I \times]-\infty, 0[$ e in $I \times]0, \infty[$. Risolvendo rispetto a y troviamo per ogni scelta di $C(= \pm e^K)$ l'unica soluzione

$$y(t) = Ce^{-A(t)}, \quad t \in I. \tag{86}$$ I-4.3

Aggiungiamo la condizione

$$y(t_0) = u_0 \tag{87}$$ I-4.4

con t_0 fissato in I e u_0 in $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy (84),(87) ammette una ed una sola soluzione, data dalla (86) con $C = u_0 e^{A(t_0)}$ e quindi

$$y(t) = u_0 e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau}.$$

Passiamo all'equazione non omogenea

$$y' + a(t)y = f(t) \tag{88}$$ I-4.5

con $f(t)$ anch'essa continua da I in $\mathbb{R}$. Indichiamo con $y_1(t)$ il secondo membro della (86) per $C = 1$ e riprendiamo la tecnica della variazione delle costanti. Affinché una funzione $y(t)$, che scriviamo come prodotto $v(t)y_1(t)$, soddisfi la (88) in I, ovvero la quantità

$$y'(t) + a(t)y(t) = [D + a(t)][v(t)y_1(t)] = v'(t)y_1(t)$$

sia uguale a $f(t)$, è necessario e sufficiente che $v'(t)$ sia uguale a $f(t)/y_1(t)$. Questa richiesta individua $v(t)$ a meno di una costante additiva reale:

$$v(t) = K + \int_{t_0}^t f(s)y_1(s)\, ds = K + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\tau)\, d\tau} f(s)\, ds$$

($t_0, t \in I$). Abbiamo così mostrato che la (88) è dotata delle infinite soluzioni che si ottengono facendo variare K nella somma

$$Ke^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau} + \left(\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\tau)\, d\tau} f(s)\, ds \right) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau} = Ke^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau)\, d\tau} f(s)\, ds \tag{89}$$ I-4.6

dell'integrale generale dell'omogenea (84) e di un integrale particolare della non omogenea stessa.

(Ai fini del calcolo nei casi concreti si fa prima ad ottenere una soluzione particolare della (88) ripercorrendo il procedimento con cui è stata ottenuta la funzione ausiliaria $v(t)$ che non ad applicare l'espressione (89).)

Ponendo $K = u_0$ nella (89) si ottiene la soluzione del problema di Cauchy (88),(87) (ovviamente unica, perché la differenza di due soluzioni è la costante nulla, unica soluzione di (84) che si annulla in un punto t_0).

19 La separazione della variabili in generale

secI-5

Il metodo che adesso presentiamo consente (almeno in via teorica) la risoluzione esplicita di un'equazione differenziale non lineare della forma

$$y' + a(t)b(y) = 0 \tag{90}$$ I-5.1

dove $a(t)$ è continua in un intervallo aperto I e $b(y)$ in un intervallo aperto U. Si tratta di un'equazione a variabili separabili perché si riscrive

$$\frac{dy}{b(y)} + a(t)\, dt = 0.$$

Sotto forma integrale:
$$\int \frac{dy}{b(y)} = -\int a(t)\, dt$$
ovvero
$$B(y) = -A(t) + K \tag{91}$$ I-5.2

dove K è una costante, $A(t)$ una primitiva di $t \mapsto a(t)$ in I e $B(y)$ una di $y \mapsto [b(y)]^{-1}$ in un sottointervallo $]c, d[$ di U dove $b(y) \neq 0$. La (91) è una famiglia di equazioni cartesiane in $I\times]c, d[$ che per ogni scelta di un *ammissibile* valore di K possiamo risolvere rispetto a y (grazie alla monotonia di $B(y)$, la cui derivata $b(y)$ è sempre > 0 o sempre < 0 per come è stato preso $]c, d[$), ottenendo l'unica soluzione
$$y(t) = B^{-1}\left(-A(t) + K\right) \quad \text{per } t \in J \tag{92}$$ I-5.3

con J sottointervallo aperto di I (dipendente da K); con l'aggettivo in corsivo intendiamo semplicemente dire che, affinché il secondo membro dell'identità abbia senso, $-A(t) + K$ deve variare in $B(]c, d[)$ per ogni $t \in J$. Aggiungendo poi alla (90) la condizione di Cauchy (87) con $t_0 \in I$ e $u_0 \in]c, d[$ si trova una e una sola soluzione $y(t)$: quella data dalla (92) con $K = B(u_0) + A(t_0)$, valore ammissibile perché $-A(t) + K$, dal momento che vale $B(u_0)$ per $t = t_0$, resta nell'intervallo aperto $B(]c, d[)$ al variare di t in un conveniente intervallo aperto $\ni t_0$.

Fin qui non abbiamo fatto altro che estendere lo stesso approccio già applicato all'equazione lineare omogenea (84), la quale rientra nella (90) per $b(y) = y$, $U = \mathbb{R}$. Ma tale estensione non può sempre procedere oltre, come ora passiamo ad illustrare.

Cosa succede, innanzitutto, se U contiene punti u_1 dove $b(y)$ si annulla, per cui la soluzione costante $y(t) = u_1$ soddisfa l'equazione e quindi, banalmente, il corrispondente problema di Cauchy? Quando $b(y) = y$ abbiamo potuto mostrare che la funzione costante $y(t) = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione che in un qualunque prefissato punto di I vale 0, e ciò è come dire che una soluzione della (84) o coincide identicamente con la costante nulla oppure non la incontra mai. Invece nel caso generale, diciamo con $u_1 = 0$, non si può escludere che una soluzione non identicamente nulla vada a coincidere da un certo punto in poi con lo 0, come mostra il prossimo esempio.

Esempio 19.1. L'equazione
$$y' = |y|^{1/2}$$
è a variabili separabili con $I = U = \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione $y(t)$ diversa da 0, diciamo < 0 (per cui prendiamo $]c, d[=] - \infty, 0[$), in un intervallo aperto J. Siccome $-2(-y)^{1/2}$ è una primitiva di $|y|^{-1/2} = (-y)^{-1/2}$ in $] - \infty, 0[$ e t è una primitiva di 1 in $\mathbb{R}$, imponiamo
$$[-y(t)]^{1/2} = \frac{1}{2}(C - t) \quad \text{per } t \in J$$
ovvero
$$y(t) = -\frac{1}{4}(C - t)^2 \quad \text{per } t \in J$$
con C arbitrariamente fissata. La funzione che ha questa espressione in $J =] - \infty, C[$ e vale identicamente 0 in $[C, \infty[$ è una soluzione dell'equazione su tutto $I = \mathbb{R}$ che all'istante C soddisfa la stessa condizione di Cauchy della soluzione identicamente nulla.

La causa del fenomeno di non unicità appena osservato risiede nella mancanza, per la funzione $|y|^{1/2}$, di sufficiente regolarità in vicinanza dello zero. Anticipando un risultato che dimostreremo più in là segnaliamo che l'unicità di soluzioni per problemi di tipo (90),(87) è invece garantita se

$b(y)$, pur annullandosi nel punto u_0 (come $b(y) = |y|^{1/2}$ in $u_0 = 0$), verifica in un suo intorno una condizione di Lipschitz.

Ricordiamo poi che nel caso della (84) una qualunque soluzione viene automaticamente ad essere definita in tutto l'intervallo I. Questo accade anche per certe equazioni non lineari (90), come quella dell'esempio precedente, ma non per tutte.

I-e 5.2 **Esempio 19.2.** L'equazione

$$y' = y^2$$

è a variabili separabili con $I = U = \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione $y(t)$ diversa da 0, diciamo > 0 (per cui prendiamo $]c, d[=]0, \infty[$), in un intervallo aperto J. Siccome $-y^{-1}$ è una primitiva di y^{-2} in $]0, \infty[$ e t è una primitiva di 1 in $\mathbb{R}$, imponiamo

$$y(t)^{-1} = C - t \quad \text{per } t \in J$$

ovvero

$$y(t) = (C - t)^{-1} \quad \text{per } t \in J \tag{93}$$ I-5.5

con C arbitrariamente fissata. Per ogni C abbiamo ottenuto una soluzione che non si estende a destra di $J =]-\infty, C[$ perché tende all'∞ per $t \to C^-$ (e se, ad esempio, cerchiamo la totalità delle soluzioni definite per ogni $t \le -1$ troviamo tutte e sole le (93) con $C > -1$).

I-o 5.2 **Esempio 19.3.** Un esempio importante di equazione a variabili separabili è l'**equazione logistica** o **di Verhulst**

$$y' = \alpha y - \beta y^2 \tag{94}$$ I-5.6

($\alpha, \beta > 0$), che costituisce un modello di crescita di una popolazione più plausibile di quello malthusiano. Con l'aumentare del numero degli individui tende infatti ad aumentare anche la competizione tra loro (ad esempio per il cibo o per lo spazio), con un effetto negativo sulla crescita che in prima istanza possiamo prendere proporzionale, con fattore $-\beta < 0$, alla media statistica y^2 delle loro interazioni a coppie.

La funzione $B(y) = \alpha y - \beta y^2$ si annulla in 0 e in α/β, e quindi le due funzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \alpha/\beta$ sono soluzioni dell'equazione.

Fissata una condizione di Cauchy (87) con u_0 diverso sia da 0 che da α/β, poniamo

$$B(y) = \int_{u_0}^{y} \frac{d\eta}{\alpha\eta - \beta\eta^2}$$

sicché la (91) con $A(t) = t_0 - t$ e $K = 0$ diventa

$$\int_{u_0}^{y} \frac{d\eta}{\alpha\eta - \beta\eta^2} = t - t_0.$$

Siccome l'integrale vale

$$\frac{1}{\alpha} \log \frac{y}{u_0} \left| \frac{\alpha - \beta u_0}{\alpha - \beta y} \right|$$

e la quantità dentro il modulo è > 0, otteniamo

$$\frac{y}{u_0} \frac{\alpha - \beta u_0}{\alpha - \beta y} = e^{\alpha(t - t_0)}$$

e da qui, risolvendo rispetto a y, otteniamo

$$y(t) = \frac{\alpha u_0}{(\alpha - \beta u_0)e^{-\alpha(t - t_0)} + \beta u_0}. \tag{95}$$ I-5.7

Quando u_0 è negativo, non importa quanto vicino a 0, il denominatore della (95) è una funzione decrescente che, siccome tende a ∞ per $t \to -\infty$ ed a $\beta u_0 < 0$ per $t \to \infty$, deve annullarsi per t uguale a un tempo finito $T_1 = T_1(u_0)$. Ne segue che $y(t) \to 0$ per $t \to -\infty$ e $y(t) \to -\infty$ per $t \to T_1^-$.

Per ogni valore iniziale $u_0 \in]0, \alpha/\beta[$ (com'è nel caso, con β molto più piccolo di α, del modello biologico) la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poiché è strettamente crescente e tende a 0 e α/β rispettivamente per $t \to -\infty$ e per $t \to \infty$, il suo grafico ha la forma detta "ad S" nelle pubblicazioni di carattere demografico.

Quando $u_0 > \alpha/\beta$ il denominatore della (95) è una funzione crescente che, siccome tende a 0 per $t \to \infty$ ed a $\beta u_0 > 0$ per $t \to -\infty$, deve annullarsi per t uguale a un tempo finito $T_2 = T_2(u_0)$. Ne segue che $y(t) \to \alpha/\beta$ per $t \to \infty$ e $y(t) \to \infty$ per $t \to T_2^+$.

Abbiamo dunque visto che per $t \to \infty$ la soluzione di (94),(87) tende a α/β quando $u > 0$ viene comunque preso nell'intorno $]0, \infty[$ di α/β: la soluzione costante $y(t) = \alpha/\beta$ è un **equilibrio stabile**. Invece nessuna soluzione del problema con $u_0 \neq 0$ resta, al crescere di t, in un intorno di 0 come ad esempio $]-1/2, 1/2[$: lo 0 è un **equilibrio instabile**.

I-o 5.3 **Esempio 19.4.** Sia S un sottoinsieme del piano costituito da semirette aperte uscenti dall'origine. Se $f \in C^0(S)$ è **omogenea** (di grado zero), cioè verifica

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y) \quad \text{per } (t, y) \in S, \ \lambda \neq 0,$$

l'equazione (non lineare)

$$y' = f(t, y), \tag{96}$$ I-5.8

detta **omogenea** in un'accezione del termine che non ha nulla a che vedere con quella dell'ambito lineare, si trasforma in un'equazione a variabili separabili. Prendendo $\lambda = 1/t$ la (96) si riscrive infatti

$$y' = f\left(1, \frac{y}{t}\right)$$

ovvero

$$tx' + x = f(1, x) \tag{97}$$ I-5.9

con $x = y/t$, e quindi

$$x' = \frac{1}{t}[f(1, x) - x]$$

sia per $t > 0$ e sia per $t < 0$. Indicando con $F(x)$ una primitiva di $[f(1, x) - x]^{-1}$ in un intervallo delle x dove $f(1, x) - x \neq 0$ otteniamo la famiglia di equazioni cartesiane

$$F(x) = \log|t| + C$$

e da qui ricaviamo una famiglia di curve di equazioni parametriche

$$t = Ke^{F(x)}, \quad y = Kxe^{F(x)} \tag{98}$$ I-5.10

che può essere vista come integrale generale della (96) nel senso che per ogni scelta di K definisce una soluzione. Esistono però altre soluzioni, dette **integrali singolari**, che non si possono far rientrare nella (98) per opportune scelte di K: sono quelle che si ottengono associando alle (eventuali) soluzioni $x = \alpha$ dell'equazione $f(1, x) - x = 0$ le funzioni lineari $y(t) = \alpha t$.

20 Equazioni differenziali esatte

Siano $F(t,y)$ una funzione di classe C^1 in un aperto W del piano e (t_0,u_0) un punto di W tale che $F_y(t_0,u_0)\neq 0$. Una funzione $y(t)$ di classe C^1 in un intervallo aperto $J\ni t_0$ e col grafico contenuto in W, se vale u_0 in t_0 ed è tale che

$$\frac{dF(y(t))}{dt}=F_t(t,y(t))+F_y(t,y(t))y'(t)=0 \quad \text{per } t\in J$$

deve soddisfare l'identità

$$F(y(t))=F(u_0) \quad \text{per } t\in J.$$

Ma grazie al Teorema del Dini le ipotesi su F garantiscono che in effetti esiste una ed una sola $y(t)$ con le proprietà richieste: quella definita implicitamente (per J sufficientemente piccolo) dall'equazione

$$F(t,y)-F(t_0,y_0)=0.$$

Ciò significa che esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy costituito dall'equazione differenziale

$$y'=-\frac{F_t(t,y)}{F_y(t,y)},$$

che ci farà comodo riscrivere

$$F_t(t,y)dt+F_y(t,y)dy=0,$$

e dalla condizione $y(t_0)=u_0$.

Le precedenti considerazioni possono riformularsi così: date $p(t,y)$ e $q(t,y)$ funzioni continue in un aperto W del piano con $q\neq 0$ in un $(t_0,u_0)\in W$, se esiste una $F(t,y)$ di classe C^1 in W con $F_t(t,y)=p(t,y)$ e $F_y(t,y)=q(t,y)$, ovvero se la forma differenziale $p(t,y)\,dt+q(t,y)\,dy$ è esatta, allora esiste un'unica soluzione dell'**equazione differenziale esatta**

$$y'=-\frac{p(t,y)}{q(t,y)},$$

ovvero

$$p(t,y)dt+q(t,y)dy=0, \tag{99}$$ `I-6.1`

che soddisfa la condizione di Cauchy $y(t_0)=u_0$.

Come facciamo a riconoscere se il primo membro della (99) è una forma differenziale esatta (in W)? Una condizione sufficiente *se ad esempio W è un rettangolo* è la seguente: Le derivate parziali p_y,q_t esistano continue e soddisfino la condizione di chiusura $p_y=q_t$. In tal caso una primitiva della forma in W è

$$F(t,y)=\int_{u_0}^{y}q(t_0,\eta)\,d\eta+\int_{t_0}^{t}p(\tau,y)\,d\tau.$$

Infatti

$$F_t(t,y)=p(t,y),$$

$$F_y(t,y)=q(t_0,y)+\int_{t_0}^{t}p_y(\tau,y)\,d\tau=q(t_0,y)+\int_{t_0}^{t}q_\tau(\tau,y)\,d\tau=q(t,y).$$

Le equazioni della forma

$$y'+a(t)b(y)=0 \tag{100}$$ `I-55.1`

rientrano nella classe di quelle esatte con $p(t,y)=a(t)$, $q(t,y)=1/b(y)$, e a ben vedere proprio così ne abbiamo impostato lo studio. Solo che la particolare espressione a variabili separabili consente di ottenere subito la funzione che qui stiamo indicando con $F(t, y)$, e che per la (100) non è altro che $A(t) + B(y)$ con $A(t)$ e $B(y)$ primitive rispettivamente di $a(t)$ in I e di $[b(y)]^{-1}$ in $]c, d[$, la cui esistenza è diretta conseguenza del Teorema Fondamentale del Calcolo. Inoltre l'esistenza di soluzioni $y(t)$ della (100) non ha bisogno di essere dimostrata attraverso il Teorema di Dini, visto che segue semplicemente dall'invertibilità della funzione monotona $B(y)$ della (sola) variabile $y \in]c, d[$. Di più: applicando B^{-1} si può dare (almeno teoricamente) un'esplicita espressione delle soluzioni che invece nel caso generale il Teorema di Dini non può garantire.

Com'è ovvio siamo in grado di applicare il precedente ragionamento per risolvere la (99) anche se non è esatta la forma $p\,dt + q\,dy$, ma lo è invece la forma $\mu p\,dt + \mu q\,dy$ per un'opportuna $\mu(t, y)$ di classe C^1 e mai nulla, detta **fattore integrante**. Come trovare $\mu(t, y)$? Sempre supponendo che p_y, q_t esistano continue imponiamo la condizione di chiusura $(\mu p)_y = (\mu q)_t$, cioè

$$p\mu_y + \mu p_y = q\mu_t + \mu q_t. \tag{101}$$ I-6.6

Una tale μ, per di più indipendente dalla y, esiste (ed è teoricamente calcolabile) come soluzione dell'equazione

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{p_y - q_t}{q}\mu \tag{102}$$ I-6.7

se la frazione nel secondo membro (con denominatore $\neq 0$) dipende solo dalla t. Analogamente, esiste una soluzione μ della (101) indipendente dalla t e dunque tale che

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{q_t - p_y}{p}\mu$$

se la frazione nel secondo membro (con denominatore $\neq 0$) dipende solo dalla y.

I-e 6.1 **Esempio 20.1.** Per risolvere la (99) con

$$p(t, y) = 2ty + t^2y + y^3 3, \quad q(t, y) = t^2 + y^2$$

osserviamo che

$$p_y(t, y) - q_t(t, y)q(t, y) = 2t^2 + t^2 + y^2 - 2tt^2 + y^2 = 1.$$

La (102) diventa $\mu' = \mu$, che ammette la soluzione $\mu(t) = e^t$. L'equazione di partenza è dunque equivalente alla

$$e^t \left(2ty + t^2y + y^3 3\right) dt + e^t(t^2 + y^2)\,dy = 0. \tag{103}$$ I-6.8

Il primo membro è in tutto $\mathbb{R}^2$ una forma differenziale esatta di cui si calcolano subito le primitive, ottenendo l'espressione implicita

$$ye^t \left(t^2 + y^2 3\right) = C$$

per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione differenziale.

21 L'equazione di Bernoulli

Allo studio dell'equazione lineare non omogenea (88) si riconduce quello dell'equazione

$$y' + p(t)y + q(t)y^\sigma = 0, \tag{104}$$ I-7.1

con $p(t)$ e $q(t)$ continue in un intervallo aperto I. Fissiamo un σ diverso sia da 0 che da 1. Allora la (104) non è lineare, ma richiedere che essa sia soddisfatta in un intervallo aperto $J \subseteq I$ da una $y(t)$ positiva (o anche negativa, se ad esempio $\sigma \in \mathbb{N}$) equivale a richiedere che

$$y'y^{-\sigma} + p(t)y^{1-\sigma} + q(t) = 0$$

ovvero che $[y(t)]^{1-\sigma}$ coincida con una soluzione $z(t)$ dell'equazione *lineare*

$$z' + (1-\sigma)p(t)z = -(1-\sigma)q(t), \tag{105}$$ I-7.2

$t \in J$. La (104) è detta **equazione di Bernoulli**. ("*L'équation de mon Frère*", la chiama in una lettera Johann Bernoulli, ma è lui che la risolve, con la semplice trasformazione che abbiamo appena visto, dopo mesi di infruttuosi tentativi da parte del fratello Jacob.)

Attenzione però a non voler trasferire automaticamente alla (104) ogni risultato noto per un'equazione lineare quale la (105). Una qualunque soluzione $z(t)$ di quest'ultima è infatti definita in tutto I, ma non è affatto detto che ciò valga per la $y(t) = z(t)^{1/(1-\sigma)}$: si pensi all'esempio, già studiato con la separazione delle variabili, di $y' = y^2$ (dunque $p(t) = 0$, $q(t) = -1$, $I = \mathbb{R}$) e alle soluzioni $y(t) = (C-t)^{-1}$ definite solo in $J =]-\infty, C[$ o solo in $J =]C, \infty[$. Possiamo però dire che, dati comunque $t_0 \in I$ e $u_0 > 0$ (o anche $u_0 < 0$, se ad esempio $\sigma \in \mathbb{N}$), esiste un'unica funzione definita e positiva in un opportuno intervallo aperto $J \subseteq I$, $J \ni t_0$, che soddisfa la (104) e vale u_0 in t_0: la funzione $y(t) = z(t)^{1/(1-\sigma)}$, $t \in J$, dove $z(t)$ è l'unica soluzione della (105) che vale $u_0^{1-\sigma}$ in t_0.

I-e 7.1 **Esempio 21.1.** È di Bernoulli l'equazione

$$y' - yt - y^3 \sin t = 0. \tag{106}$$ I-7.3

Con la sostituzione $z = y^{-2}$ ci si riconduce all'equazione lineare

$$z' + 2tz = -2\sin t. \tag{107}$$ I-7.4

L'integrale generale dell'omogenea associata

$$z' + 2tz = 0$$

è Ct^{-2}, per cui un integrale particolare della (107) è un prodotto $v(t)t^{-2}$ con $v'(t) = -2t^2 \sin t$. Integrando troviamo una funzione

$$v(t) = 2t^2 \cos t - 4t \sin t - 4\cos t,$$

che moltiplicata per t^{-2} e sommata all'integrale generale dell'omogenea dà l'integrale generale della (107)

$$z(t) = 2\cos t - 4\frac{\sin t}{t} - 4\frac{\cos t}{t^2} + Ct^2$$

da cui arriviamo alla famiglia di soluzioni della (106)

$$y(t) = \left(2\cos t - 4\frac{\sin t}{t} - 4\frac{\cos t}{t^2} + Ct^2\right)^{-1/2}$$

definita ciascuna, a costante C fissata, in ogni sottointervallo di $]-\infty, 0[$ o $]0, \infty[$ dove la quantità tra parentesi è > 0.

I-o 7.1 **Osservazione 21.1.** L'equazione logistica (94), che abbiamo già risolto mediante la separazione delle variabili, è anche un'equazione di Bernoulli. Ponendo $y(t) = z(t)^{-1}$ la trasformiamo nella

$$z' + \alpha z = \beta,$$

il cui integrale generale è della forma

$$z(t) = Ke^{-\alpha(t-t_0)} + \beta\alpha$$

per t_0 fissato in $\mathbb{R}$. Imponiamo la condizione di Cauchy $y(t_0) = u_0$, che trasformiamo nella $z(t_0) = u_0^{-1}$ supponendo $u_0 \neq 0$. Otteniamo $K = (\alpha - \beta u_0)/\alpha u_0$, e di conseguenza

$$z(t) = \frac{(\alpha - \beta u_0)e^{-\alpha(t-t_0)} + \beta u_0}{\alpha u_0}.$$

Se poi aggiungiamo l'ipotesi $\alpha - \beta u_0 \neq 0$ ritroviamo la soluzione (95) della (94), definita in un intervallo aperto J contenente il punto t_0 dove essa assume il valore u_0:

$$y(t) = \frac{\alpha u_0}{(\alpha - \beta u_0)e^{-\alpha(t-t_0)} + \beta u_0}.$$

22 L'equazione del II ordine

Fissati due numeri complessi a e b, associamo all'**operatore differenziale lineare del II ordine**

$$L : y(t) \mapsto y''(t) + ay'(t) + by(t)$$

il **polinomio caratteristico** $\lambda^2 + a\lambda + b$ e l'**equazione caratteristica**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{108}$$ `II-A`

nell'incognita λ. Indichiamo con λ_1 e λ_2 le soluzioni della (108), cioè le radici del polinomio caratteristico, che possono essere distinte tra di loro oppure uguali ad uno stesso numero, diciamo μ. Quando i coefficienti a, b sono reali le radici sono, se distinte, o tutt'e due reali oppure complesse coniugate, mentre se coincidono tra loro il comune valore μ è necessariamente reale. Il polinomio caratteristico è uguale a $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ e quindi L, che si ottiene dal polinomio caratteristico sostituendo la variabile scalare λ col simbolo D dell'operatore di derivazione, soddisfa l'identità

$$L = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2). \tag{109}$$ `II-B`

La (109) mostra che applicare L ad una funzione $y(t)$ equivale a calcolare dapprima la funzione $w(t) = (D - \lambda_2)y(t)$ e successivamente la funzione $(D - \lambda_1)w(t)$. È qui che entrano inevitabilmente in scena, per $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, operatori differenziali del I ordine $D - \lambda_1$, $D - \lambda_2$ a coefficienti complessi — e quindi funzioni $w(t)$ a valori complessi — anche quando L ha coefficienti reali e viene fatto operare su funzioni $y(t)$ a valori reali. Dunque tanto vale cominciare col trattare il caso generale di coefficienti a, b anch'essi complessi.

Introduciamo l'equazione differenziale lineare non omogenea del II ordine

$$Ly = y'' + ay' + by = f(t) \tag{110}$$ `II-C`

con $a, b \in \mathbb{C}$ e f funzione continua $I \to \mathbb{C}$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Quando in particolare $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ ritroviamo nella (110) la seconda legge di Newton, cioè

$$\text{massa} \;\times\; \text{accelerazione} \;=\; \text{forza (totale)},$$

applicata al moto rettilineo di un corpo di massa 1 su cui agiscono contemporaneamente tre forze F_v,F_p ed f dirette lungo l'asse y: la prima proporzionale con fattore $-a$ alla velocità del corpo (per cui è **forza d'attrito** se $a > 0$), la seconda con fattore $-b$ alla sua posizione (per cui è **forza di richiamo** se $b > 0$), la terza esterna.

Associamo alla (110) le condizioni di Cauchy

$$y(t_0) = u_0, \quad y'(t_0) = u_1 \tag{111}$$ II-D

con $t_0 \in I$. Dalla (109) segue che una funzione $y(t)$ di classe C^2 in I soddisfa (110),(111) se e solo se è soluzione del problema di Cauchy (del I ordine)

$$(D - \lambda_2)y = y' - \lambda_2 y = w(t), \quad y(t_0) = u_0 \tag{112}$$ II-E

con $w = w(t)$ soluzione del problema di Cauchy (del I ordine)

$$(D - \lambda_1)w = w' - \lambda_1 w = f(t), \quad w(t_0) = u_1 - \lambda_2 u_0. \tag{113}$$ II-F

II-T2 **Teorema 22.1.** *Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e $f : I \to \mathbb{C}$ di classe C^0.*

(i) Per ogni scelta di $t_0 \in \mathbb{R}$ e di u_0, $u_1 \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy (110),(111) *ammette un'unica soluzione $I \to \mathbb{C}$.*

(ii) Se, in particolare, $a, b, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ è a valori reali, allora anche $y(t)$ è a valori reali.

Dimostrazione. Come sappiamo dalla Sezione 17, il problema (113) ammette un'unica soluzione $w(t)$ di classe C^1 da I in $\mathbb{C}$, e con questa espressione di $w(t)$ anche (112) ammette un'unica soluzione $y(t)$, che è di classe C^2 da I in $\mathbb{C}$. Questo dimostra (i).

Passiamo ai complessi coniugati in entrambi i membri della (110) e delle (111):

$$\overline{y}'' + \overline{a}\,\overline{y}' + \overline{b}\,\overline{y} = \overline{f}(t), \tag{114}$$ II-G

$$\overline{y}(t_0) = \overline{u}_0, \quad \overline{y}'(t_0) = \overline{u}_1. \tag{115}$$ II-H

Se supponiamo soddisfatte le ipotesi di (ii) le (114),(115) diventano

$$\overline{y}'' + a\overline{y}' + b\overline{y} = f(t),$$

$$\overline{y}(t_0) = u_0, \quad \overline{y}'(t_0) = u_1,$$

ovvero $y(t)$ è una soluzione di (110),(111) se e solo se lo è la sua funzione coniugata $\overline{y}(t)$. Ma per l'unicità della soluzione dev'essere $\overline{y}(t) = y(t)$, e quindi $y(t)$ è a valori reali. □

Osservazione 22.1. Le equazioni in (112) e (113), prese insieme, costituiscono un **sistema differenziale triangolare**, cioè del tipo

$$\begin{cases} w' = g(w,t) \\ y' = h(w,y) \end{cases}$$

($g(w,t) = \lambda_1 w + f(t)$, $h(w,y) = w + \lambda_2 y$).

23 L'equazione omogenea

Il metodo di fattorizzazione utilizzato nella precedente sezione per pervenire ai risultati di esistenza e unicità non è così costruttivo, o per lo meno non è così direttamente costruttivo, come sembrerebbe a prima vista. Su esso ci potremo basare però in questa sezione e nelle prossime due per ottenere delle tecniche di calcolo esplicito delle soluzioni più specificamente adattate a varie classi di termini noti, di complessità crescente.

Cominciamo col termine noto identicamente nullo:

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{116}$$ II-I

II-T1 **Teorema 23.1.** *Siano $a, b \in \mathbb{C}$.*

(i) Per ogni scelta di $t_0 \in \mathbb{R}$ e di u_0, $u_1 \in \mathbb{C}$ il problema di Cauchy (116),(111) *ammette un'unica soluzione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

(ii) La soluzione di (116),(111) *si scrive in un unico modo come combinazione lineare*

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

oppure

$$c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t}$$

a seconda che le radici del polinomio caratteristico verifichino $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oppure $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$.

(iii) Le soluzioni della (116) *costituiscono uno spazio vettoriale bidimensionale su $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. L'enunciato (i) rientra banalmente (tenendo conto che adesso $I = \mathbb{R}$) nell'enunciato (i) del Teorema 1.1.

Come sappiamo dalla Sezione 17, l'unica soluzione del problema di Cauchy (113) con $f(t)$ identicamente nulla, cioè

$$(D - \lambda_1)w = w' - \lambda_1 w = 0, \quad w(t_0) = u_1 - \lambda_2 u_0, \tag{117}$$ II-V

è $w(t) = K e^{\lambda_1 t}$ con K univocamente determinato (per la precisione $K = e^{-\lambda_1 t_0}(u_1 - \lambda_2 u_0)$). Applicando con questa espressione di $w(t)$ la (80), o meglio, visto che $w(t)$ è il prodotto di una costante per una funzione esponenziale, le considerazioni che abbiamo svolto a proposito della (81), possiamo concludere che l'unica soluzione $y(t)$ di (112) è della forma $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ con $c_1 = K/(\lambda_1 - \lambda_2)$, oppure della forma $(c_1 t + c_2)e^{\mu t}$ con $c_1 = K$, a seconda che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oppure $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, e questo per un'unica scelta di c_2.

Abbiamo così dimostrato (ii). Ma non solo. L'espressione che abbiamo ottenuto di $y(t)$ come combinazione lineare con coefficienti c_1 e c_2 univocamente determinati vale per ogni data soluzione dell'equazione (116), visto che ad essa si associa banalmente un problema di Cauchy (116),(111) (quello in cui u_0 e u_1 sono proprio *definiti*, rispettivamente, come $y(t_0)$ e $y'(t_0)$). Ne segue (iii). $\square$

Una **famiglia fondamentale** $\{y_1(t), y_2(t)\}$ di soluzioni di (116) è una base nello spazio vettoriale delle soluzioni, come ad esempio quella costituita dalle funzioni del Teorema 23.1 (ii). Se due funzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ costituiscono una famiglia fondamentale di soluzioni della (116) il loro **determinante wronskiano**

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

che indichiamo con $W[y_1, y_2](t)$ o più brevemente con $W(t)$, non può annullarsi in nessun punto t_0 di $\mathbb{R}$. Se ciò accadesse esisterebbe infatti una soluzione $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e la funzione $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ verrebbe a soddisfare non solo, in quanto combinazione lineare di soluzioni, l'equazione (116), ma anche le stesse condizioni di Cauchy della funzione identicamente nulla. Grazie all'unicità ne seguirebbe $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$ per $t \in \mathbb{R}$, in contraddizione con l'indipendenza lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Supponiamo adesso che 2 soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ della (116) abbiano wronskiano *non* nullo in un punto t_0 di $\mathbb{R}$. Che funzioni del genere esistano è conseguenza del Teorema 23.1: basta considerare, ad esempio, le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$L y_1 = 0, \quad y_1(t_0) = 1, \quad y_1'(t_0) = 0,$$

$$Ly_2 = 0, \quad y_2(t_0) = 0, \quad y_2'(t_0) = 1.$$

Ebbene, $\{y_1(t), y_2(t)\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (116) (e quindi dotato di wronskiano $\neq 0$ su tutto $\mathbb{R}$). Infatti i valori in t_0 di una soluzione $y(t)$ e della sua derivata prima sono i termini noti del sistema algebrico

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y'(t_0) \end{cases}$$

nelle incognite c_1, c_2. Poiché il determinante dei coefficienti è $W(t_0) \neq 0$ la soluzione (c_1, c_2) esiste ed è unica. In corrispondenza ai valori di c_1 e c_2 cosı ottenuti la funzione $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ viene a soddisfare non solo la stessa equazione (116) ma anche le stesse condizioni di Cauchy (111) della $y(t)$. Ne segue, grazie all'unicità stabilita nel Teorema 23.1, che $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò significa che ogni soluzione $y(t)$ della (116) si esprime come combinazione lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Osservazione 23.1. Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, sono due funzioni qualunque, diciamo almeno di classe C^1, possiamo ancora parlare del loro wronskiano $W(t)$. Però in un ambito così generale non è più vero che dall'annullarsi del wronskiano in *qualche* punto t_0 segua che esistano due costanti c_1 e c_2 non entrambe nulle tali che $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Anzi, come fece osservare G.Peano, non basta neppure l'annullarsi di $W(t)$ in *ogni* punto t: in $\mathbb{R}$ le funzioni $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t|t|$ hanno wronskiano identicamente nullo ma non sono una multipla dell'altra (mentre è vero che $y_1(t) - y_2(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$, $y_1(t) + y_2(t) = 0$ per ogni $t \leq 0$).

Teorema 23.2. *Siano* $a, b, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$.

(i) La soluzione del problema (116),(111) *è a valori reali.*

(ii) La soluzione di (116),(111) *si scrive in un unico modo come combinazione lineare*

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

oppure

$$c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t},$$

oppure

$$c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

a seconda che le radici λ_1, λ_2 *del polinomio caratteristico siano reali e distinte, oppure reali e uguali ad uno stesso valore* μ*, oppure complesse coniugate non reali di valori* $\alpha \pm i\beta$*.*

(iii) Le soluzioni reali della (116) *costituiscono uno spazio vettoriale bidimensionale su* $\mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. L'enunciato (i) rientra nell'enunciato (ii) del Teorema 23.1.

Quanto a (ii) e (iii), basta occuparsi delle radici complesse coniugate (non reali) del polinomio caratteristico e tener conto che le funzioni $e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $e^{(\alpha-i\beta)t}$ sono a loro volta combinazioni lineari delle funzioni $\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cos \beta t$ e $\operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \sin \beta t$.

□

Poichè le radici dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

possiamo riscrivere l'integrale generale della (110) come

$$e^{-at/2} \left(c_1 e^{t\sqrt{a^2-4b}/2} + c_2 e^{-t\sqrt{a^2-4b}/2} \right) \ \text{quando} \ a^2 - 4b > 0,$$

$$e^{-at/2}\,(c_1 + c_2 t) \text{ quando } a^2 - 4b = 0,$$

$$e^{-at/2}\left(c_1 \cos\frac{t\sqrt{4b-a^2}}{2} + c_2 \sin\frac{t\sqrt{4b-a^2}}{2}\right) \quad \text{quando} \quad a^2 - 4b < 0.$$

Se $a = 0$ la (116) diventa

$$y'' + by = 0.$$

Quando $b > 0$ la totalità delle sue soluzioni è costituita dalle funzioni $c_1 \cos t\sqrt{b} + c_2 \sin t\sqrt{b}$ con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, che possiamo anche scrivere come $A\cos\left(t\sqrt{b}+\varphi\right)$ per $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $A\cos\varphi = c_1$, $A\sin\varphi = -c_2$. Nel modello newtoniano di un corpo sottoposto soltanto ad una forza lineare di richiamo esse rappresentano tutti i possibili moti rettilinei del corpo stesso: le **oscillazioni armoniche**. A è detta **ampiezza** e φ **fase**; il **periodo** è $2\pi/\sqrt{b}$, la **frequenza** è l'inverso del periodo. Supponiamo ora che oltre a b sia positivo anche il coefficiente a (com'è più plausibile nella realtà: presenza di attrito). Quale che sia il segno del discriminante $a^2 - 4b$, per $t \to \infty$ prevale, nell'integrale generale della (116), il fattore infinitesimo $e^{-at/2}$: tutte le soluzioni dell'equazione tendono a 0. Nel modello newtoniano esse rappresentano i possibili moti rettilinei, detti **vibrazioni smorzate**, di un corpo sottoposto a una forza di richiamo e ad una forza di attrito entrambe lineari.

24 Il metodo dei coefficienti indeterminati per le equazioni del II ordine

secII-8

Passiamo al caso di un termine noto prodotto di un polinomio reale o complesso $q(t)$ per un esponenziale e^{ct}, dove $c = \gamma + i\delta$ e $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = q(t)e^{ct}$$

con c costante reale o complessa, per cui la (108) diventa

$$Ly = y'' + ay' + by = q(t)e^{ct}. \tag{118}$$ II-N

La tecnica della fattorizzazione (109) mostra che una funzione $y(t)$ è soluzione di questa equazione, ovvero $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = q(t)e^{ct}$, se (e solo se) la funzione

$$(D-\lambda_2)y = y' - \lambda_2 y = w \tag{119}$$ II-O

soddisfa l'equazione del 1° ordine

$$(D-\lambda_1)w = w' - \lambda_1 w = q(t)e^{ct}. \tag{120}$$ II-P

Servendoci delle considerazioni svolte nella Sezione 17 procediamo alla risoluzione del sistema (119),(120) col metodo dei coefficienti indeterminati. Distinguiamo tre casi.

1° caso: $c \neq \lambda_1,\ c \neq \lambda_2$. Poichè c è diversa da λ_1 la (120) ammette una soluzione $w(t) = p_1(t)e^{ct}$, dove $p_1(t)$ è un polinomio di grado n. Con questa scelta di $w(t)$ la (119), poichè $c \neq \lambda_2$, ammette una soluzione $y(t) = p(t)e^{ct}$ con $p(t)$ polinomio di grado n, e i coefficienti di quest'ultimo si ottengono imponendo

$$[p(t)e^{ct}]'' + a[p(t)e^{ct}]' + bp(t)e^{ct} = q(t)e^{ct}.$$

2° caso: $c = \lambda_2 \neq \lambda_1$. Risolvendo la (120) otteniamo una soluzione della forma $w(t) = p_1(t)e^{ct}$, dove $p_1(t)$ è un polinomio di grado n. Passiamo a $y(t)$, che cerchiamo sotto la forma $v(t)e^{ct}$. Siccome vogliamo che il primo membro dell'identità

$$(D-c)[v(t)e^{ct}] = v'(t)e^{ct} \tag{121}$$ II-Q

sia uguale a $p_1(t)e^{ct}$, resta solo da integrare la $v'(t) = p_1(t)$ ed ottenere $v(t) = tp(t)$ con $p(t)$ polinomio di grado n. Segnaliamo peraltro che quando si parte da un polinomio $q(t)$ di grado 0, cioè uguale a una costante K_0 (e se ne vedrà un esempio nella prossima sezione), si fa prima a cercare una soluzione tA_0e^{ct} imponendo

$$[tA_0e^{ct}]'' + a[tA_0e^{ct}]' + btA_0e^{ct} = K_0e^{ct}. \tag{122}$$ II-Q'

3º caso: $c = \lambda_1 = \lambda_2$. Cerchiamo $y(t)$ sotto la forma $v(t)e^{ct}$. Applicando la (121) due volte – la seconda volta con $v(t)$ sostituita da $v'(t)$ – otteniamo

$$(D - c)^2[v(t)e^{ct}] = v''(t)e^{ct}. \tag{123}$$ II-R

Siccome vogliamo che il primo membro di questa identità, cioè $Ly(t)$, sia uguale a $q(t)e^{ct}$, non resta che integrare due volte $v''(t) = q(t)$, arrivando così ad ottenere la funzione ausiliaria $v(t) = t^2p(t)$ con $p(t)$ polinomio di grado n. Facciamo presente che quando $\lambda_1 = \lambda_2$ la tecnica della funzione ausiliaria si può rivelare conveniente anche con termini noti più generali di quello della (118).

Se i coefficienti di L e di $q(t)$ sono reali le considerazioni svolte alla fine della Sezione I.2 mostrano che sono state risolte anche le equazioni

$$Ly_1 = q(t)e^{\gamma t}\cos\delta t \quad \text{e} \quad Ly_2 = q(t)e^{\gamma t}\sin\delta t$$

visto che ammettono per soluzioni rispettivamente la parte reale $y_1(t)$ e quella immaginaria $y_2(t)$ di $y(t)$. È a questo riguardo, e più esattamente per le applicazioni che vedremo nella prossima sezione, che Richard P.Feynman in *The Feynman Lectures on Physics*, I/1/23-2, parla di "*magic of the "complex" method* " (nella risoluzione di equazioni a coefficienti reali).

25 La risonanza

Ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione

$$y'' + by = C_0\cos(\beta t + \vartheta) \tag{124}$$ II-S

con C_0, β e ϑ (oltre a b) numeri reali, $\beta \neq 0$, è la parte reale di una soluzione $z(t)$ dell'equazione

$$z'' + bz = K_0e^{i\beta t} \tag{125}$$ II-T

dove $K_0 = C_0e^{i\vartheta}$. Se $c = i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + b = 0$ ci troviamo nel *primo* dei casi considerati nella Sezione 24 (con K_0 = polinomio $q(t)$ di grado 0): la (125) ammette un integrale particolare $A_0e^{i\beta t}$ con la costante A_0 (polinomio $p(t)$ di grado 0), detta **ampiezza complessa**, determinata dalla condizione

$$(A_0e^{i\beta t})'' + bA_0e^{i\beta t} = K_0e^{i\beta t} \quad \text{ovvero} \quad (-\beta^2 + b)A_0 = K_0.$$

Un integrale particolare della (124) è dato dunque dalla parte reale della funzione

$$\frac{K_0}{b - \beta^2}e^{i\beta t} = \frac{C_0}{b - \beta^2}e^{i(\beta t + \vartheta)}$$

cioè da

$$\frac{C_0}{b - \beta^2}\cos(\beta t + \vartheta) \tag{126}$$ II-U

ed il suo integrale generale si ottiene mediante l'aggiunta di $K_1 e^{t\sqrt{-b}} + K_2 e^{-t\sqrt{-b}}$ se $b < 0$, di $K_1 t + K_2$ se $b = 0$, di $K_1 \cos t\sqrt{b} + K_2 \sin t\sqrt{b}$ se $b \in]0, \infty[$ e $b \neq \beta^2$.

La (126) rappresenta un'oscillazione la cui ampiezza $|C_0/(b - \beta^2)|$ è tanto più grande quanto più β è preso prossimo (non uguale) a $\sqrt{b}$ oppure a $-\sqrt{b}$. Ebbene, studiamo la situazione che si produce nel modello newtoniano del moto rettilineo, in assenza di attrito, di un corpo di massa 1 sotto l'azione della forza di richiamo $-by$, $b > 0$, e di una forza esterna che sia una oscillazione di frequenza $\beta_r/2\pi$ con β_r proprio uguale a $\pm\sqrt{b}$. Calcoliamo le corrispondenti soluzioni della (125). Adesso siamo nel *secondo* dei casi della Sezione 24, in quanto $c = i\beta_r$ è una delle due radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica, e di conseguenza troviamo l'espressione di un integrale particolare della (125) con la variabile t a fattore. Si tratta della funzione $z(t) = A_0 t e^{i\beta_r t}$ con A_0 determinata dalla (122), ovvero

$$\left[2i\beta_r + t(-\beta_r^2 + b)\right] A_0 = 2i\beta_r A_0 = K_0$$

e quindi

$$z(t) = \frac{K_0 t}{2i\beta_r} e^{i\beta_r t} = \frac{C_0 t}{2i\beta_r} e^{i(\beta_r t + \vartheta)}.$$

Ne segue che l'integrale generale della (124) è

$$K_1 \cos \beta_r t + K_2 \sin \beta_r t + \frac{C_0 t}{2\beta_r} \sin(\beta_r t + \vartheta),$$

somma di oscillazioni armoniche e di un'oscillazione la cui ampiezza massima $|C_0 t/2\beta_r|$, a causa del fattore t, tende all'∞ per $t \to \infty$. Questo è il fenomeno della **risonanza**, che sta dietro ad alcune vere e proprie catastrofi naturali o ingegneristiche. Un caso delle seconde fu il crollo del Tacoma Bridge, raccontato con esilaranti aneddoti di contorno da Martin Braun nella Sezione 2.6.1 di *Differential Equations and Their Applications*, New York, Springer, 1993.

Aggiungiamo adesso una forza (lineare) d'attrito a quella di richiamo e a quella – oscillatoria – esterna. La formulazione matematica del problema è data dall'equazione

$$y'' + ay' + by = C_0 \cos(\beta t + \vartheta) \tag{127}$$ II-V'

per a, b entrambi reali positivi e β reale non nullo, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Sotto tali ipotesi ogni soluzione dell'equazione omogenea associata alla (127) tende esponenzialmente a 0 per $t \to \infty$ (cfr. la Sezione 2), e quindi ai fini del comportamento asintotico l'interesse dello studio della (127) si restringe alla ricerca di un integrale particolare.

Siccome a non è nullo, un numero immaginario come $c = i\beta$ non può essere soluzione dell'equazione caratteristica. Ci troviamo di nuovo nel primo dei 3 casi considerati nella Sezione 424, e già siamo in grado di affermare che la (127) ammette una soluzione data da una combinazione lineare di $\sin \beta t$ e $\cos \beta t$, cioè una funzione $A \cos(\beta t + \eta)$ per opportuni valori di A e η. Entriamo nei dettagli. Associamo alla (127) la sua versione complessa, cioè

$$z'' + az' + bz = K_0 e^{i\beta t}, \tag{128}$$ II-W

$K_0 = C_0 e^{i\vartheta}$. Il metodo dei coefficienti indeterminati fornisce per la (128) una soluzione $z(t) = A_0 e^{i\beta t}$ con l'ampiezza complessa A_0 soluzione di

$$(A_0 e^{i\beta t})'' + a(A_0 e^{i\beta t})' + bA_0 e^{i\beta t} = K_0 e^{i\beta t} \quad \text{ovvero} \quad (-\beta^2 + ai\beta + b)A_0 = K_0.$$

Dunque la (127) ha una soluzione particolare $y(t)$ data dalla parte reale della funzione

$$\frac{K_0}{-\beta^2 + ai\beta + b} e^{i\beta t} = \frac{C_0}{-\beta^2 + ai\beta + b} e^{i(\beta t + \vartheta)}.$$

Come avevamo previsto, $y(t)$ è una oscillazione armonica con frequenza $\beta/2\pi$ uguale a quella della sollecitazione esterna $C_0\cos(\beta t+\vartheta)$. La sua fase è uguale a $\vartheta-\gamma$, dove $\gamma\in\mathbb{R}$ è un argomento di $-\beta^2+ai\beta+b$:

$$-\beta^2+ai\beta+b=|-\beta^2+ai\beta+b|e^{i\gamma}.$$

La sua ampiezza A coincide infine col valore costante $|C_0|/|-\beta^2+ai\beta+b|$ di $|z(t)|$, cioè

$$\frac{|C_0|}{|-\beta^2+ai\beta+b|}=\max|y(t)|,$$

come si vede tenendo conto che $z(t)$ è un numero reale, e quindi coincide con $y(t)$, per t tale che $\beta t+\vartheta=\gamma$.

Per trovare la frequenza della forza esterna in corrispondenza alla quale l'ampiezza dell'oscillazione della soluzione è massima introduciamo la seguente funzione – pari – di β:

$$R(\beta)=\frac{1}{|-\beta^2+ai\beta+b|}=\frac{1}{\sqrt{(b-\beta^2)^2+a^2\beta^2}}.$$

Poniamoci nell'ambito "studio di funzione e cerchiamo il $\sup R(\beta)$ per $\beta>0$. Poichè $R(\beta)\to 0$ per $\beta\to\infty$, esiste un reale positivo K a destra del quale $R(\beta)<R(0)$, e quindi il $\max_{[0,K]}R$ la cui esistenza è assicurata dal Teorema di Weierstrass è il massimo di R su tutto l'asse reale. Per calcolare tale massimo cerchiamo il minimo m su $[0,\infty[$ della funzione $(b-\beta^2)^2+a^2\beta^2$. La sua derivata prima (rispetto a β, naturalmente) vale

$$4\beta(\beta^2-b)+2a^2\beta$$

e quindi se $b>a^2/2$ (debole attrito) è ≥ 0 se e solo se $\beta\geq\beta_r=\sqrt{b-a^2/2}$, per cui R assume massimo

$$R(\beta_r)=\frac{1}{a\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$$

su $]0,\infty[$. Anche in questo caso si produce un fenomeno per il quale si parla di risonanza. Se invece $b\leq a^2/2$ la $R(\beta)$ è decrescente su $[0,\infty[$, e quindi non si ha più a che fare con nessuna forma di risonanza.