ANALISI VETTORIALE

Soluzione scritto

4 marzo 2011

2.1. Esercizio. *Scrivere*

- *l'integrale generale dell'equaz.* $y' + y\tan(t) = 0,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$;
- *un integrale particolare dell'equaz.* $y' + y\tan(t) = t\ \cos(t)$;
- *un integrale particolare dell'equaz.* $y' + y\tan(t) = \sin t$.

SOLUZIONE:

Con l'ordinario algoritmo delle equazioni a variabili separabili si ottiene

$$y' + y\tan(t) = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dt} = -y\,\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \to \quad \frac{dy}{y} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}dt$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\log(y) = \log(\cos(t)) + c \quad \to \quad y_0(t) = k.\cos(t) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Si osservi come le soluzioni $y_0(t)$ trovate siano definite in tutto $\mathbb{R}$, intervallo assai piú ampio di quello $(-\pi/2,\ \pi/2)$ in cui l'equazione é assegnata.

Le soluzioni $y(t)$ delle equazioni non omogenee assegnate si esprimono come

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$$

essendo $\overline{y}(t)$ una soluzione particolare dell'equazione completa assegnata, a sua volta espressa da $u(t)\,.\cos(t)$, con $u(t)$ da determinare in relazione al termine noto assegnato.

Primo caso $y' + y\tan(t) = t\ \cos(t)$

Sostituendo la $u(t)\,.\ \cos(t)$ nell'equazione sui perviene alla condizione

$$u'(t)\,.\cos(t) = t\ \cos(t) \quad \to \quad u'(t) = t \quad \to \quad u(t) = \frac{1}{2}t^2$$

da cui segue

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = \left(k + \frac{1}{2}t^2\right)\cos(t)$$

Secondo caso $y' + y\tan(t) = \sin(t)$

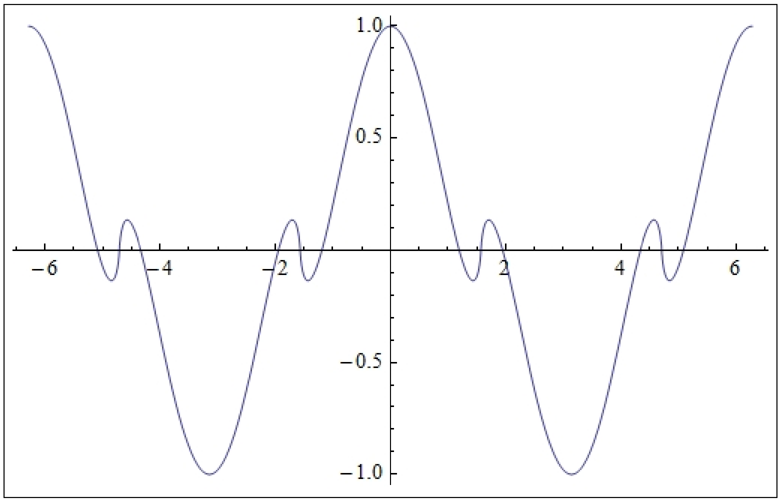

FIGURA 1. $y(t) = (1 - \log(|\cos(t)|))\cos(t)$, $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

Analogamente sostituendo la $u(t) \,.\, \cos(t)$ nell'equazione sui perviene alla condizione

$$u'(t) \,.\, \cos(t) = \sin(t) \quad \to \quad u'(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \to \quad u(t) = -\log(|\cos(t)|)$$

da cui segue

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (k - \log(|\cos(t)|))\cos(t)$$

La Figura 1 mostra come ancora le soluzioni $y(t)$ risultino definite in tutto $\mathbb{R}$, invece del semplice intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ in cui l'equazione é assegnata.

2.2. Esercizio.

- *Determinare tutti i valori di x per i quali la funzione*

$$t \mapsto \frac{1}{t}\, e^{-xt^2}$$

  è integrabile da x^2 a x^2+1, eventualmente in senso improprio;
- *scrivere la derivata della funzione*

$$x \mapsto \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{1}{t}\, e^{-xt^2}\, dt$$

  e calcolarla in $x_0 = 1$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La funzione $\frac{1}{t}\,e^{-xt^2}$ é continua in $\mathbb{R}-\{0\}$ pertanto é integrabile nel senso di Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato che non contenga lo 0.
Tenuto conto che gli intervalli $[x^2,\ x^2+1]$ sono intervalli chiusi e limitati che contengono (come estremo sinistro) lo 0 solo se $x=0$ si riconosce che la funzione assegnata é integrabile secondo Riemann in $[x^2,\ x^2+1]$ per ogni $x\neq 0$.
Nel caso $x=0$ l'integrale si riduce a

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$$

integrale che non esiste, neanche come integrale improprio.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^2+1}\frac{1}{t}\,e^{-xt^2}\,dt\right)=\int_{x^2}^{x^2+1}-t\,e^{-xt^2}\,dt+2x\frac{1}{x^2+1}\,e^{-x(x^2+1)^2}-2x\frac{1}{x^2}\,e^{-x(x^2)^2}=$$

$$=\int_{x^2}^{x^2+1}-t\,e^{-xt^2}\,dt+\frac{2x}{x^2+1}\,e^{-x(x^2+1)^2}-\frac{2}{x}\,e^{-x^5}$$

Il valore della derivata nel punto $x_0=1$ é pertanto

$$=\int_1^2-t\,e^{-t^2}\,dt+\,e^{-4}-\frac{2}{e}=\frac{3\,e^{-4}}{2}-\frac{1}{e}$$

2.3. Esercizio.

- *Dimostrare che in un intorno di* $(1,0)$ *le soluzioni dell'equazione*
$$e^{xy}+xy^2-x-y=0$$
coincidono col grafico di una funzione f *di una variabile;*
- *scrivere l'equaz. della retta tangente in* $(1,0)$ *al grafico di* f*;*
- *scrivere l'equaz. della retta normale in* $(1,0)$ *al grafico di* f*.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Il punto assegnato soddisfa l'equazione. Detto

$$F(x,y)=e^{xy}+xy^2-x-y$$

riesce

$$\begin{cases} F_x(x,y)=ye^{xy}+y^2-1 & \to \quad F_x(1,0)=-1 \\ \\ F_y(x,y)=xe^{xy}+2xy-1 & \to \quad F_y(1,0)=0 \end{cases}$$

Ne segue, per il teorema di Dini, l'esistenza di una funzione implicita $x = f(y),\ 1 = f(0)$ il cui grafico rappresenta le soluzioni dell'equazione in un intorno di $(1, 0)$.

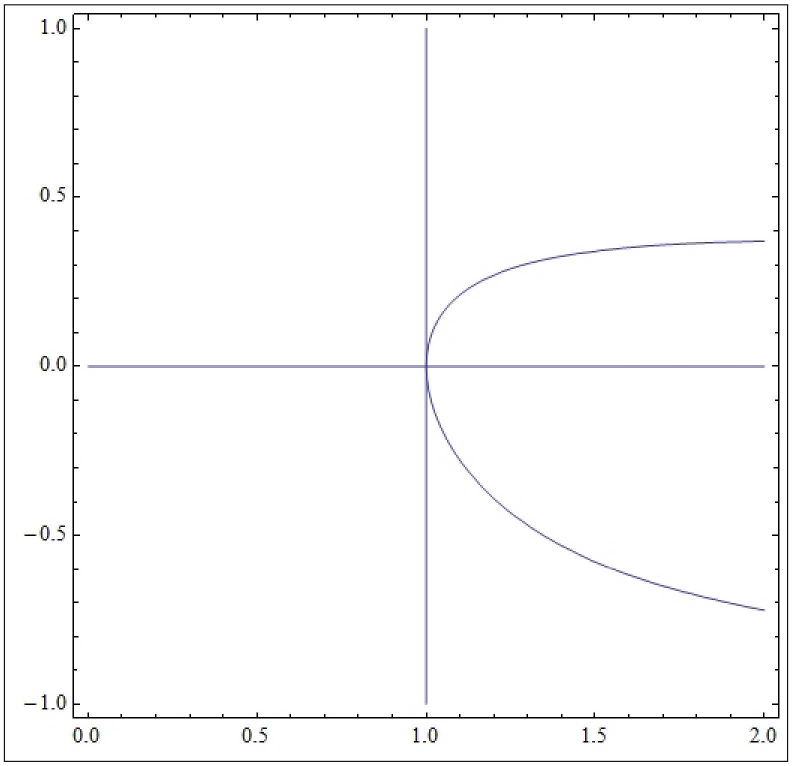

FIGURA 2. $e^{xy} + xy^2 - x - y = 0$, esercizio 2.3

Tenuto conto che

$$f'(y) = -\frac{F_y(f(y), y)}{F_x(f(y), y)} \quad \to \quad f'(0) = -\frac{F_y(1, 0)}{F_x(1, 0)} = 0$$

la retta tangente é pertanto

$$x = f(0) + f'(0)y \quad \to \quad x = 1$$

La retta normale é quindi la $y = 0$.

2.4. Esercizio.

- *Verificare se converge o meno l'integrale improprio*

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t \log(t)}$$

- *Verificare per quali $\alpha \neq 1$ converge l'integrale improprio*

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t(-\log(t))^\alpha}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto del noto integrale indefinito

$$\int \frac{dt}{t\log(t)} = \log(|\log(t)|)$$

si riconosce che

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t\log(t)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dt}{t\log(t)} = -\infty$$

ovvero che l'integrale improprio assegnato non é convergente.
Per quanto concerne il secondo si ha, per $\alpha \neq 1$,

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t(-\log(t))^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dt}{t(-\log(t))^\alpha} =$$
$$= \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(|\log(1/2)|^{-\alpha+1} - |\log(\varepsilon)|^{-\alpha+1}\right)$$

Il limite esiste finito se e solo se

$$-\alpha + 1 < 0$$

Quindi il secondo integrale esiste come integrale improprio se e solo se $\alpha > 1$.

2.5. Esercizio. *Sia Σ la superficie*

$$X(u, v) = \{u - v, u + v, u^2 + v\}, \quad 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 1$$

- *Scrivere l'equazione del piano tangente a Σ nel punto immagine di $u = v = 1/2$;*
- *calcolare $I = \iint_\Sigma (x + y)\, d\sigma$.*
- *calcolare $J = \iint_\Sigma \sqrt{6 + 2(x + y)^2}\, d\sigma$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il punto immagine di $u = v = 1/2$ é $P = \{0, 1, 3/4\}$: il piano tangente é pertanto, vedi Figura 3,

$$\nu_x\,(x - 0) + \nu_y(y - 1) + \nu_z(z - 3/4) = 0$$

essendo $\overrightarrow{\nu}$ il vettore

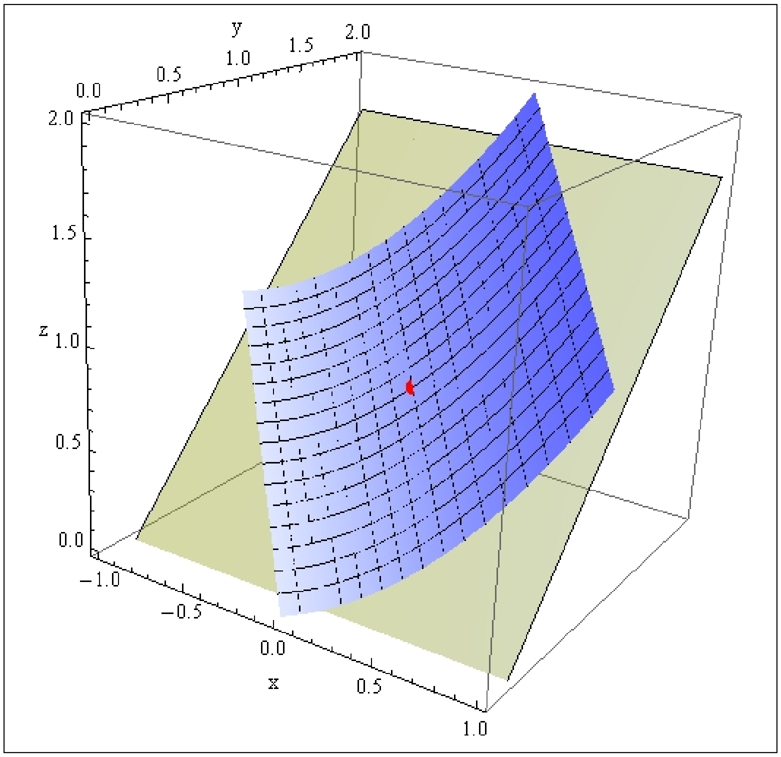

FIGURA 3. $X(u,v) = \{u-v, u+v, u^2+v\}$, piano tangente

$$\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{0, -2, 2\}$$

Il piano é quindi

$$-2(y-1) + 2(z - 3/4) = 0 \quad \rightarrow \quad y - z = \frac{1}{4}$$

Il calcolo dei due integrali superficiali richiede il calcolo dell'elemento d'area

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, du\, dv = \sqrt{6 + 8u^2} du dv$$

Riesce quindi

$$\iint_{\Sigma} (x+y)\, d\sigma = \int_0^1 dv \int_0^1 2u\, \sqrt{6+8u^2} du = \frac{1}{6}\left(7\sqrt{14} - 3\sqrt{6}\right)$$

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{6 + 2(x+y)^2}\, d\sigma = \int_0^1 dv \int_0^1 (6+8u^2)\, du = \frac{26}{3}$$

Osservazione 2.1. *Ricavati u e v rispettivamente da x e y*

$$u = \frac{1}{2}(x + y), \quad v = \frac{1}{2}(y - x)$$

si ricava l'espressione cartesiana di Σ

$$z = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(y - x)$$