ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

4 febbraio 2011

10.1. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare omogenea di primo ordine*

$$y' + a\,y = 0$$

- *determinare le soluzioni di tale equazione in corrispondenza ai seguenti tre valori di* $a:\ 1+i,\ -1-i,\ 2i$
- *rappresentare le funzioni trovate servendosi delle funzioni seno e coseno,*
- *determinare, in corrispondenza ai tre valori di* a *indicati, la soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = 1$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono $y(t) = c\,e^{a\,t}$, $\forall c \in \mathcal{C}$, funzioni complesse che si scrivono servendosi delle funzioni goniometriche al modo seguente:

$$\begin{array}{lll} a = 1+i & c\,e^{(1+i)\,t} = & c\,e^{t}\,\{\cos(t) + i\sin(t)\} \\ a = -1-1 & c\,e^{(-1-i)\,t} = & c\,e^{-t}\,\{\cos(t) - i\sin(t)\} \\ a = 2i & c\,e^{2\,i\,t} = & c\,\{\cos(2t) + i\sin(2t)\} \end{array}$$

La condizione iniziale $y(0) = 1$ corrisponde in tutti e tre i casi alla scelta $c = 1$: il Figura 1 sono riportati i grafici nel piano complesso delle tre funzioni complesse

$$e^{(1+i)\,t}, \quad e^{(-1-i)\,t}, \quad e^{2\,i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

I colori adottati nella figura corrispondono ai corrispondenti a: le frecce uscenti dal punto $(1, 0)$ indicano il verso con cui le diverse soluzioni escono dal punto iniziale.
Si noti il grafico particolare, la circonferenza, che si ottiene nel caso di $a = 2i$.
La soluzione relativa ad $a = 1+i$ presenta una curva - rossa - che si allontana dall'origine, mentre quella relativa ad $a = -1-i$ presenta una curva che si avvicina via via all'origine.

10.2. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare di primo ordine a coefficienti variabili*

$$y' + t\,y = t$$

- *determinare la soluzione* $u(t)$ *che soddisfa la cond.* $u(0) = 1$,
- *determinare tutte le soluzioni* $y_0(t)$ *dell'omogenea associata,*

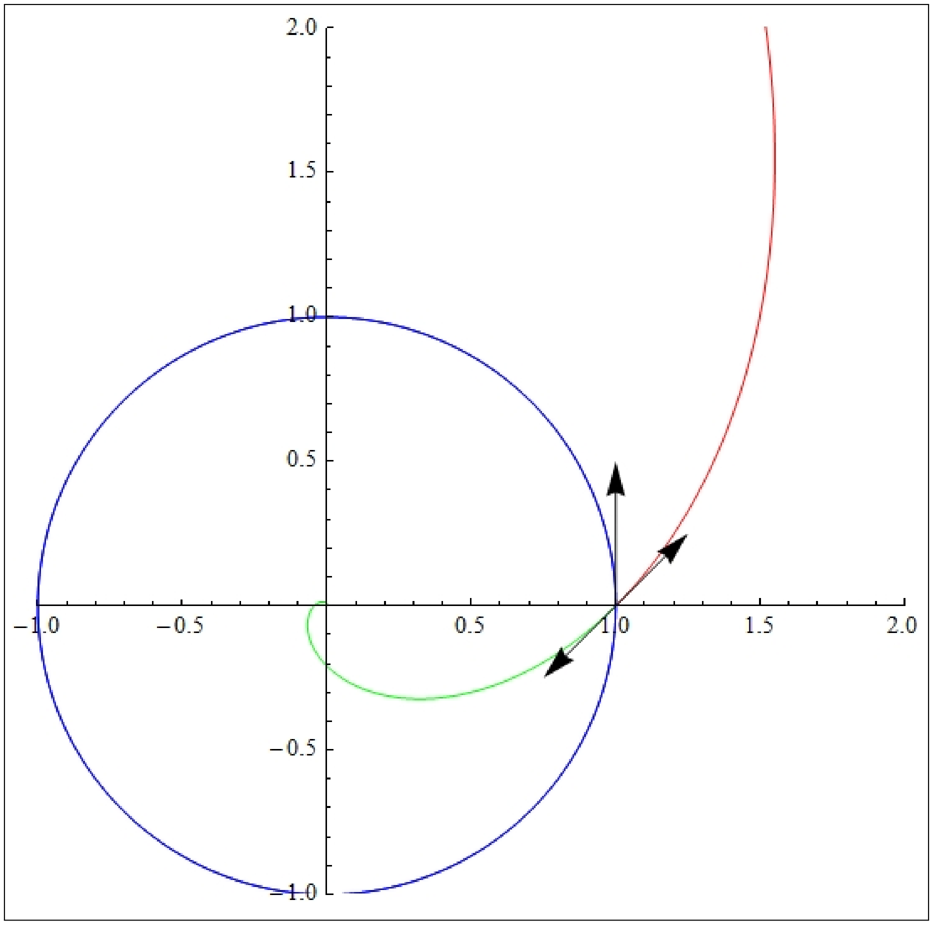

FIGURA 1. $a:\ \{1+i, -1-i, 2i\}\quad y' + a\,y = 0,\ y(0) = 1$

- *determinare una soluzione $\overline{y}(t)$ dell'equazione completa e, quindi dedurne tutte le $y(t)$ soluzioni dell'equazione.*

SOLUZIONE:

La funzione costante $u(t) \equiv 1$ soddisfa evidentemente sia l'equazione che la condizione $u(0) = 1$: quindi, tenuto anche conto dell'unicitá si riconosce che

la $u(t) \equiv 1$ é la soluzione cercata !

Tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione lineare completa sono somma delle soluzioni $y_0(t)$ dell'omogenea e di una soluzione qualsiasi dell'equazione completa:

- soluzioni omogenea: $y_0(t) = c\,e^{-t^2/2}, \quad \forall c \in \mathcal{C}$
- soluzione della completa $\overline{y}(t) \equiv 1$

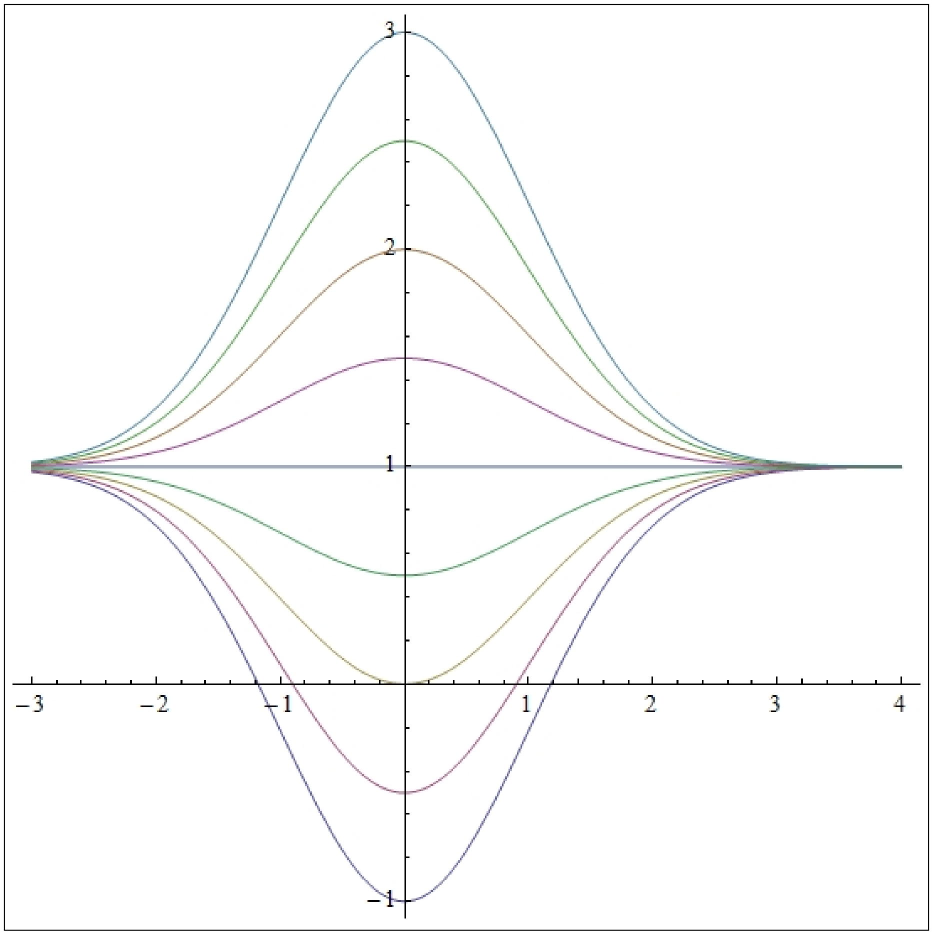

Figura 2. $y' + t\,y = t$, $y(0) = -1,\ -0.5, ..., 2.5,\ 3$

pertanto, vedi Figura 2,

$$y(t) = c\,e^{-t^2/2} + 1$$

Si noti come tutte le soluzioni, all'aumentare di $|t|$, si avvicinano alla soluzione costante $\overline{y}(t) \equiv 1$.

10.3. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' = y^4$$

- *determinare le soluzioni che verificano rispettivamente le condizioni iniziali* $y(0) = -1$ *e* $y(0) = 1$,
- *determinare l'intervallo di definizione per ciascuna delle due soluzioni trovate.*

Soluzione:

L'equazione assegnata appartiene al tipo delle equazioni a variabili separabili, anzi al sottotipo importante delle

equazioni autonome

Essa possiede come unica soluzione d'equilibrio la $y(t) \equiv 0$: se ne deduce anche che tutte le altre soluzioni non d'equilibrio non si annullano in alcun punto del loro insieme di definizione.

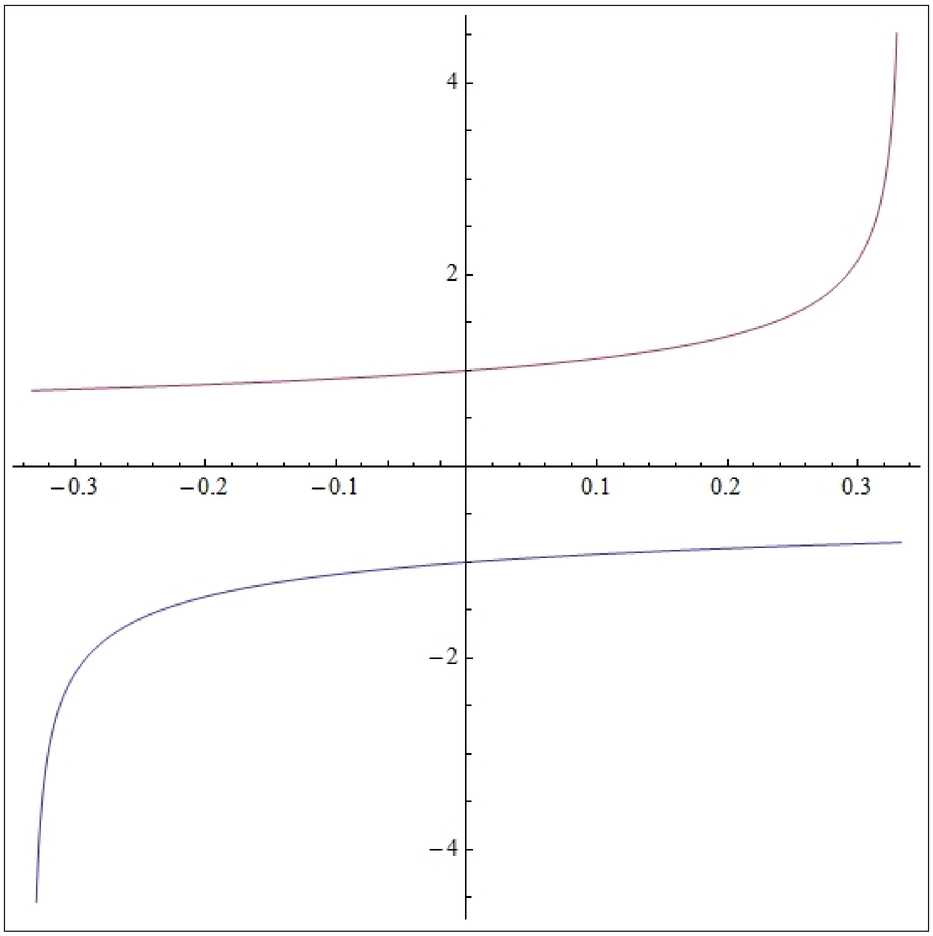

FIGURA 3. $y' = y^4, \quad y(0) = \pm 1$

Tenuto conto che

$$y' = y^4 \quad \to \quad y' > 0$$

si riconosce quindi che le soluzioni dell'equazioni sono tutte monotone strettamente crescenti.

$$\frac{dy}{dt} = y^4 \quad \to \quad \frac{dy}{y^4} = dt \quad \to \quad \int \frac{dy}{y^4} = \int dt$$

$$-\frac{1}{3y^3} = t + c \quad \to \quad y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3(t+c)}}$$

Le soluzioni relative alle condizioni iniziali assegnate sono pertanto:

$$y(0) = -1 \quad \to \quad \sqrt[3]{\frac{1}{-3c}} = -1 \quad \to \quad c = \frac{1}{3} \quad y_1(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t-1}}$$

$$y(0) = 1 \quad \to \quad \sqrt[3]{\frac{1}{-3c}} = 1 \quad \to \quad c = -\frac{1}{3} \quad y_2(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t+1}}$$

La prima $y_1(t)$ é definita per $t \neq -1/3$, la seconda, $y_2(t)$, é definita per $t \neq 1/3$.
I due problemi di Cauchy assegnati

$$\begin{cases} y' = y^4 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

hanno pertanto soluzione, il primo, $y_1(t)$, nell'intervallo $(-1/3, +\infty)$, il secondo, $y_2(t)$, nell'intervallo $(-\infty, 1/3)$.
La $y_1(t)$ ha un asintoto verticale in $t = -1/3$, la seconda, $y_2(t)$ ha un asintoto verticale in $t = 1/3$.
Il fenomeno osservato viene indicato come

esistenza in piccolo

intendendo con questa parola che quei problemi di Cauchy hanno soluzione definite in intervalli piú piccoli dell'intervallo I, in questo caso l'intero asse $\mathbb{R}$, in cui l'equazione é definita.

10.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' = e^t \cos^2(y)$$

determinare tutte le soluzioni indicando il loro intervallo di definizione.

SOLUZIONE:

Il secondo membro $e^t \cos^2(y)$ si annulla per

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Le funzioni costanti

$$y(t) =\equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$$

sono tutte soluzioni d'equilibrio.
Tutte le altre soluzioni $y(t)$ non possono prendere, per il teorema d'unicitá, in alcun punto i valori $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Quindi il fattore $\cos^2(y)$ o é identicamente nullo o non si annulla mai.

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos^2(y) \quad \to \quad \frac{dy}{\cos^2(y)} = e^t\, dt \quad \to \quad \int \frac{dy}{\cos^2(y)} = \int e^t\, dt$$

da cui

$\tan(y) = e^t + c \quad \to \quad y(t) = \arctan(e^t + c) + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Le soluzioni trovate sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$

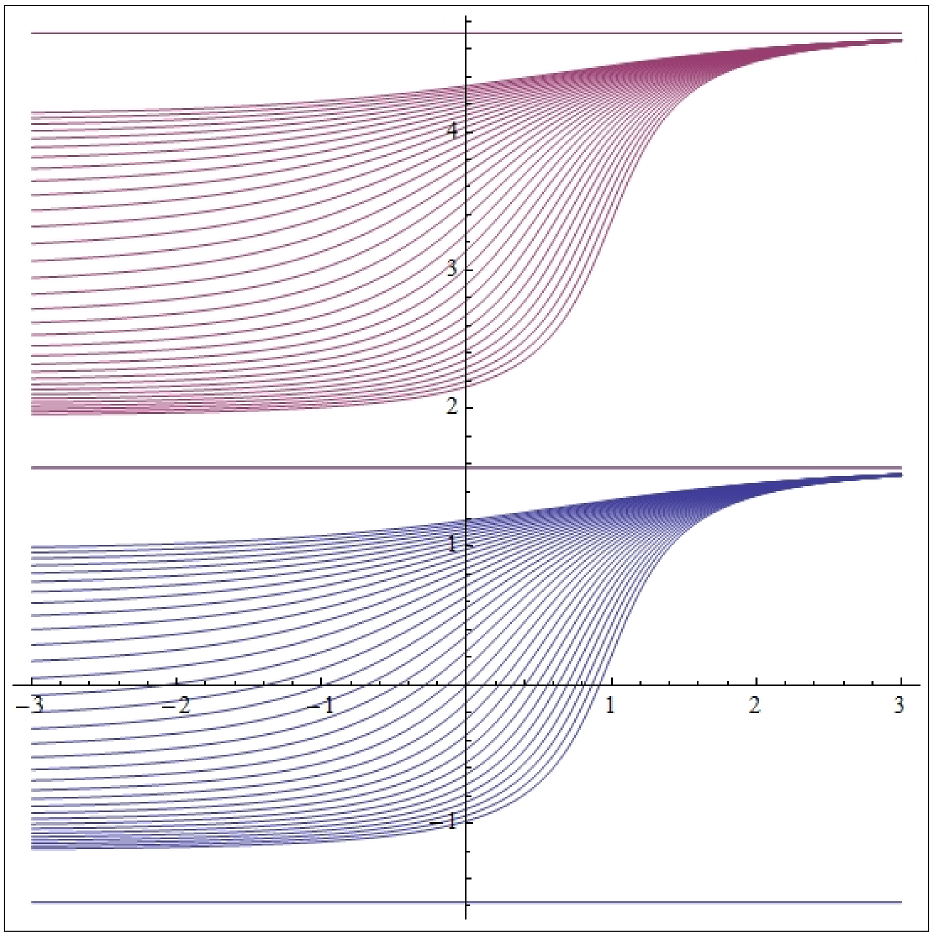

Figura 4. $y' = e^t \cos^2(y),\ y(0) = A$

$\boxed{\text{Come risolvere il problema di Cauchy } y' = e^t \cos^2(y),\ y(0) = A}$

Se $A = \dfrac{\pi}{2} + k_A \pi$ allora la soluzione é la soluzione d'equilibrio

$$y_A(t) \equiv \frac{\pi}{2} + k_A \pi$$

se $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ allora esiste n_A tale che

$$-\frac{\pi}{2} < A - n_A\pi < \frac{\pi}{2}$$

quindi esiste uno e un solo c_A tale che

$$A - n_A\pi = \arctan(1 + c_A)$$

La soluzione cercata é pertanto, vedi Figura 4.

$$y_A(t) = \arctan(e^t + c_A) + n_A\pi$$

10.5. Esercizio. *Assegnate le equazioni differenziali lineari*

$$y'' + 2\gamma\, y' + 4y = 0$$

- *determinare tutte le soluzioni* $y_0(t)$ *al variare del parametro* $\gamma \in \mathbb{R}$,
- *determinare per quali* γ *le funzioni* $y_0(t)$ *sono periodiche e per quali sono limitate,*
- *determinare, per ogni* $\gamma \in \mathbb{R}$, *le soluzioni* $u(t)$ *e* $v(t)$ *che verificano rispettivamente le condizioni iniziali* $u(0) = 0, u'(0) = 1,\ \ v(0) = 1, v'(0) = 0$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\gamma\,\lambda + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \gamma^2 \neq 4 & \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4} \\ \lambda_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4} \end{cases} \\ \\ \gamma^2 = 4 & \rightarrow \quad \lambda = -\gamma \end{cases}$$

Le soluzioni $y_0(t)$ sono pertanto

$\boxed{\gamma^2 \neq 4}$

$$y_0(t) = e^{-\gamma\, t}\left\{c_1\, e^{-t\sqrt{\gamma^2-4}} + c_2\, e^{t\sqrt{\gamma^2-4}}\right\}$$

$\boxed{\gamma^2 = 4}$

$$y_0(t) = e^{-\gamma\, t}\left\{c_1 + c_2\, t\right\}$$

10.6. Esercizio. *Sia* $y(t) \neq 0$ *soluzione dell'equazione* $y' + k\,y = 0$: *determinare i valori di* k *supponendo che* $y(t)$ *verifichi una delle condizioni seguenti*

- $y(1) = 2\,y(0)$,
- $y(-3) = y(5)$,
- $y(0) = 1$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni sono $y(t) = c\,e^{kt}$ pertanto

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$$

$$y(1) = 2\,y(0) \quad \Leftrightarrow \quad ce^k = 2c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ k = \ln(2) + 2n\pi i \end{cases}$$

$$y(-3) = y(5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ k = \dfrac{2n\pi i}{8} \end{cases}$$

10.7. Esercizio. *Assegnata l'equazione*

$$y'' + y = \cos^2(t)$$

- *determinare tutte le sue soluzioni,*
- *determinare la soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = y'(0) = 0$.

SOLUZIONE:

Tenuto presente che

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \to \quad \cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{4}e^{-2it}$$

la soluzione particolare puó essere cercata nella forma

$$y(t) = A + B\,e^{2it} + C\,e^{-2it}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t)$$

Tutte le soluzioni sono pertanto

$$y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t)$$

La soluzione che verifica le condizioni $y(0) = y'(0) = 0$ é quindi

$$y_1(t) = -\frac{1}{3}\,\cos(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t)$$

10.8. Esercizio. *Assegnata l'equazione*

$$y'' + y = 1 + \cos(t) + 10\cos(2t)$$

- *determinare tutte le soluzioni $y_0(t)$ dell'omogenea associata,*
- *determinare una soluzione $\overline{y}(t)$ dell'equazione completa e, quindi dedurne tutte le $y(t)$ soluzioni dell'equazione,*
- *determinare tutte le soluzioni che verificano la condizione iniziale $y(0) = 1$,*
- *determinare la soluzione $u(t)$ che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.*

SOLUZIONE:

L'equazione omogenea $y''+y = 0$ ha, come ben noto le soluzioni $y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)\ \forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$.
La determinazione di una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ dell'equazione completa equivale alla determinazione di soluzioni particolari $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, $\overline{y}_3(t)$ per ciascuna delle seguenti tre equazioni

$$\begin{array}{ll} 1: & y'' + y = 1 \\ 2: & y'' + y = \cos(t) \\ 3: & y'' + y = 10\cos(2t) \end{array}$$

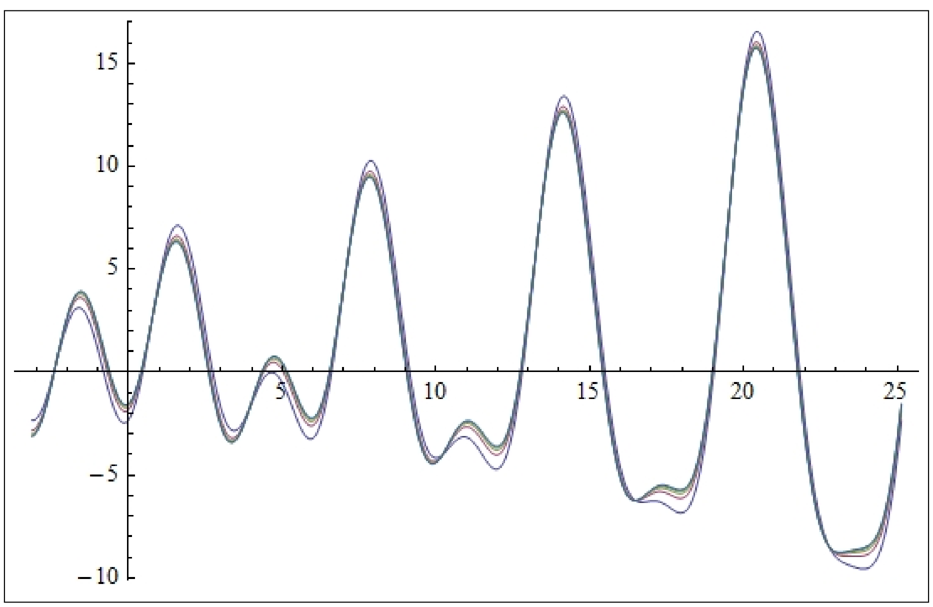

FIGURA 5. Alcune soluzioni dell'equazione: $y'' + y = 1 + \cos(t) + 10\cos(2t)$

Per la prima si riconosce facilmente la $\overline{y}_1(t) \equiv 1$.

Per la seconda, tenuto conto che $\cos(t)$ é soluzione dell'omogenea, siamo nella risonanza, dovremo cercare $\overline{y}_2(t) = A\,t\,\cos(t) + B\,t\,\sin(t)$: sostituendo si ricava

$$-2A\sin(t) + 2B\cos(t) = \cos(t) \quad \to \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

da cui

$$\overline{y}_2(t) = \frac{1}{2} t\sin(t)$$

Per la terza cerchiamo $\overline{y}_3(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$: sostituendo si perviene a

$$-3A\cos(2t) - 3B\sin(2t) = 10\cos(2t) \quad \to \quad \begin{cases} A = -\dfrac{10}{3} \\ B = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\overline{y}_3(t) = -\frac{10}{3}\cos(2t)$$

Ne deriva quindi complessivamente la soluzione particolare per l'equazione assegnata

$$\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t) + \overline{y}_3(t)$$

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2} t\sin(t) - \frac{10}{3}\cos(2t) + c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$$

10.9. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare omogenea $y'' + py' + qy = 0$ provare che, se le radici dell'equazione caratteristica non sono né reali né immaginarie pure, tutte le soluzioni $y(t)$ sono infinitesime o per $t \to -\infty$ o per $t \to +\infty$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le soluzioni dell'equazione $y'' + py' + qy = 0$ dipendono dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0$$

La differenza fondamentale dipende dall'avere l'equazione caratteristica due radici distinte o una sola, necessariamente reale:

$$y(t) = \begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \to \quad y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 = \lambda_2 & \to \quad y(t) = e^{\lambda_1 t}\{c_1 + c_2\,t\} \end{cases}$$

Le funzioni complesse $e^{\lambda t}$, $\lambda = \alpha + i\beta$ sono espresse da due fattori

$$e^{\alpha t} \qquad \cos(\beta t) + i\sin(\beta t)$$

Il secondo fattore é, qualunque siano β, $t \in \mathbb{R}$ un numero complesso di modulo 1.
Il primo fattore invece

- vale costantemente 1 se $\alpha = 0$
- é infinitesimo per $t \to -\infty$ se $\alpha > 0$
- é infinitesimo per $t \to +\infty$ se $\alpha < 0$

La condizione indicata

> *le radici dell'equazione caratteristica non sono né reali né immaginarie pure,*

significa

$$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\,\beta, \quad \alpha, \beta \neq 0$$

quindi siamo nel caso di due radici distinte con parte reale non nulla:

$$y(t) = e^{\alpha t} \left\{ c_1 e^{i\,\beta t} + c_2 e^{-i\,\beta t} \right\}$$

dei due fattori

$$e^{\alpha t} \quad \text{e} \quad \left\{ c_1 e^{i\,\beta t} + c_2 e^{-i\,\beta t} \right\}$$

il primo é infinitesimo o per $t \to -\infty$ oppure per $t \to +\infty$, il secondo é limitato.
Quindi accade necessariamente, qualunque siano c_1 e c_2

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$