ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

21 gennaio 2011

8.1. Esercizio. *Calcolare l'area della superficie cartesiana $\mathcal{S}$*

$$z = 1 + 2x + 3y, \qquad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

e determinare i versori $\overrightarrow{\nu}$ normali a tale superficie.

SOLUZIONE:

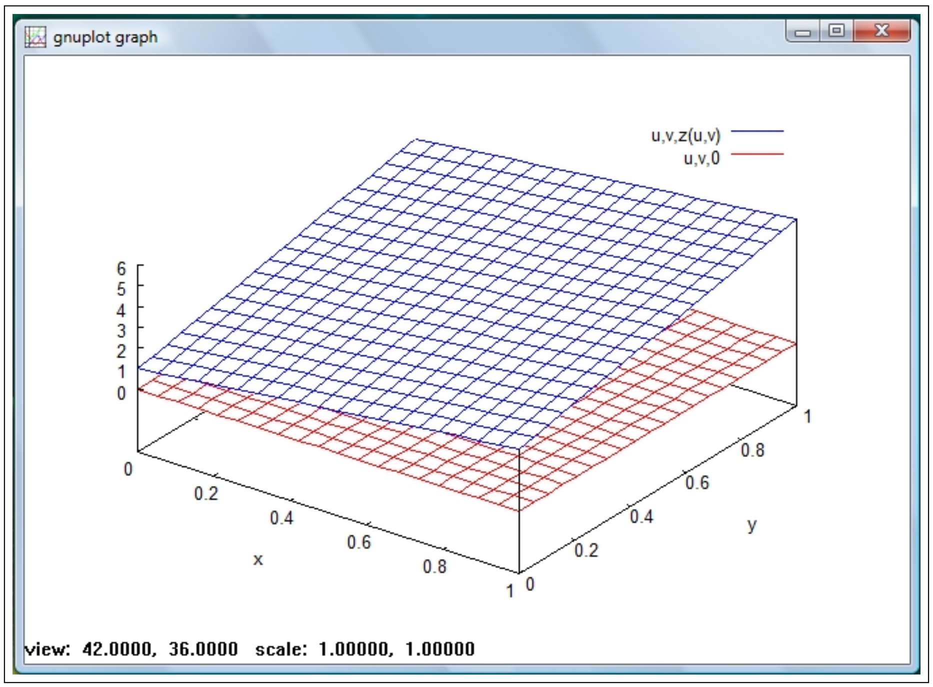

FIGURA 1. $z = 1 + 2x + 3y, \qquad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

L'area delle superfici cartesiane $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ si calcola con l'integrale doppio

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dx\, dy$$

Nel caso assegnato

$$f(x, y) = 1 + 2x + 3y \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} = \sqrt{14}$$

Pertanto

$$Area(\mathcal{S}) = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{14}\, dy = \sqrt{14}$$

I versori normali sono

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}} \{f_x(x,y),\ f_y(x,y),\ -1\} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}} \{2,\ 3,\ -1\}$$

8.2. Esercizio. *Detta S la precedente superficie cartesiana*

$$z = 1 + 2x + 3y, \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, d\sigma$$

SOLUZIONE:

Ricordata l'espressione dell'elemento di superficie cartesiana $z = f(x,y)$

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dx\, dy = \sqrt{14}\, dx\, dy$$

si ha

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 [x^2+y^2+(1+2x+3y)^2]\, \sqrt{14}\, dy = 14\sqrt{14}$$

8.3. Esercizio. *Indicare una rappresentazione parametrica dell'ottavo della sfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

contenuto nell'ottante $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$.
Determinare i versori normali a tale superficie nel punto $x = -y = -z$.

SOLUZIONE:

Le rappresentazioni della sfera sono naturalmente quelle associate alle coordinate polari, tenuto presente della porzione, l'ottante, di sfera scelto:

$$\begin{cases} x = r\sin(v)\cos(u) \\ y = r\sin(v)\sin(u) \\ z = r\cos(v) \end{cases} \qquad (u,v) \in [3\pi/2, 2\pi] \times [\pi/2, \pi]$$

I versori normali a tale superficie sono deducibili dalla ben nota perpendicolaritá nella sfera tra raggio e piano tangente quindi, detto $t > 0$ il comune valore $x = -y = -z$

$$\overrightarrow{\nu} = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 + t^2 + t^2}} \{t, -t, -t\} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \{1,\ -1,\ -1\}$$

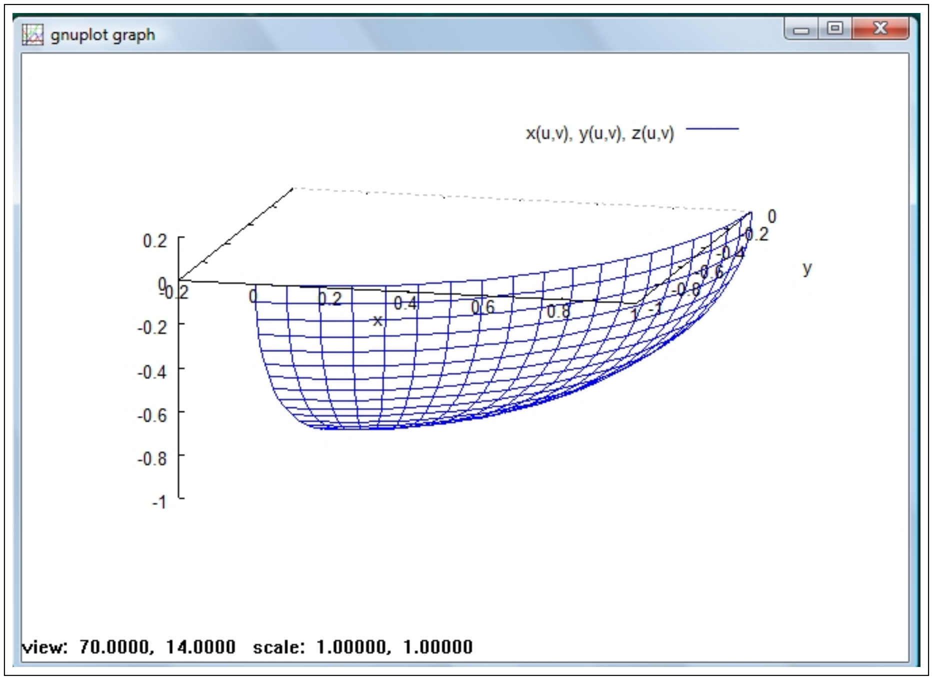

FIGURA 2. L'ottavo della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Una costruzione applicabile a qualunque superficie espressa in forma parametrica avrebbe fornito, servendosi delle classiche notazioni

$$\overrightarrow{X}_u, \quad \overrightarrow{X}_v$$

$$\nu = \pm \frac{\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v}{\left|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\right|}$$

8.4. Esercizio. *Detta S la precedente superficie ottavo di sfera di centro l'origine e raggio r, calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_S x\, d\sigma$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Determinazione dell'elemento di superficie:

$$\begin{pmatrix} -r\sin(v)\sin(u) & r\sin(v)\cos(u) & 0 \\ r\cos(v)\cos(u) & r\cos(v)\sin(u) & -r\sin(v) \end{pmatrix}$$

Da cui

$$\begin{array}{l} L = -r^2 \sin^2(v)\, \cos(u) \\ M = -r^2 \sin^2(v)\, \sin(u) \\ N = -r^2 \sin(v)\, \cos(v) \end{array} \qquad \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = r^2 \sqrt{\sin^2(v)}$$

Riesce pertanto

$$d\sigma = r^2 \sqrt{\sin^2(v)}\, du\, dv$$

Tenuto presente che $v \in [\pi/2, \pi] \quad \to \quad \sin(v) \geq 0$ si ha

$$d\sigma = r^2 \sin(v)\, du\, dv$$

Si ha pertanto

$$\iint_S x\, d\sigma = \int_{3\pi/2}^{2\pi} du \int_{\pi/2}^{\pi} r \sin(v) \cos(u) r^2 \sin(v)\, dv =$$

$$r^3 \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(u)\, du \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2(v)\, dv = \frac{\pi\, r^3}{4}$$

8.5. Esercizio. *Detta Σ la superficie cartesiana $z = 1 + x^2 - y^3$ determinare*

- *il piano tangente a Σ nel punto $(1, 2, -6)$,*
- *due vettori linearmente indipendenti tangenti a Σ in tale punto,*
- *i versori ν normali a Σ sempre in tale punto.*

Soluzione:

L'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana $z = f(x, y)$ é

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

da cui, nel caso proposto,

$$z = -6 + 2(x - 2) - 12(y - 2)$$

Due vettori linearmente indipendenti tangenti alla superficie nel punto $(1, 2, -6)$ sono offerti, analogamente a quanto visto in generale relativamente a $\overrightarrow{X}_u$ e $\overrightarrow{X}_v$, da due vettori tangenti alle due curve

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = f(1, t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = t, \\ y = 2, \\ z = f(t, 2) \end{cases}$$

ovvero

$$\overrightarrow{V}_1 = \{0, 1, -12\}, \quad \overrightarrow{V}_2 = \{1, 0, 2\},$$

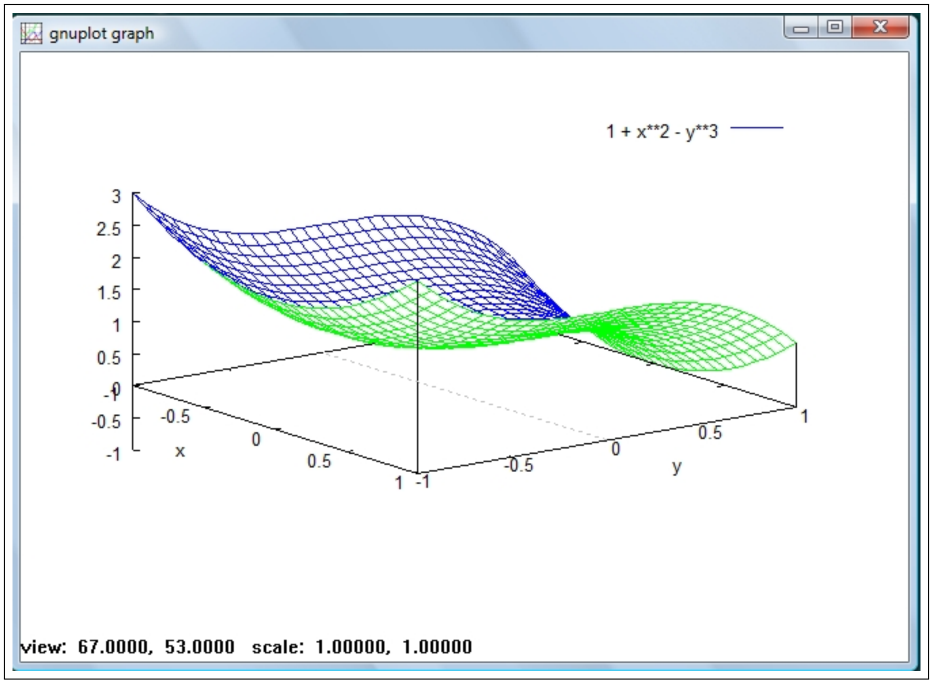

FIGURA 3. la superficie cartesiana $z = 1 + x^2 - y^3$

I versori normali sono, come si deduce dall'equazione del piano tangente, sono

$$\overrightarrow{\nu} = \pm \frac{1}{\sqrt{2^2 + 12^2 + 1}} \{2,\ -12,\ -1\}$$

8.6. Esercizio. *Detta Σ la superficie parametrica*

$$x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + 2v^2, \qquad u^2 + v^2 \leq 1$$

- *Verificare che la matrice jacobiana associata abbia rango 2,*
- *determinare il piano tangente relativo al punto* $(0, 0, 0)$*,*
- *determinare i versori normali in tale punto.*

SOLUZIONE:

Osservato, dalla rappresentazione parametrica, che

$$x + y = 2u^2,\ \ x - y = 2v^2$$

si ricava anche, di conseguenza,

$$z = \frac{x + y}{2} + x - y$$

ovvero si riconosce che la superficie assegnata é contenuta nel piano

$$3x - y - 2z = 0$$

Ovviamente i vettori

$$\overrightarrow{\nu} = \pm\{3,\,-1,\,-2\}$$

normali al piano sono normali alla superficie.
La matrice é la seguente

$$\begin{pmatrix} 2u & 2u & 2u \\ 2v & -2v & 4v \end{pmatrix}$$

$$L = 12uv,\ M = -4uv,\ N = -8uv \quad \to \quad \sqrt{l^2 + M^2 + N^2} = |uv|\,4\sqrt{14}$$

La matrice ha rango 2 per $uv \neq 0$ cioé fuori dagli assi coordinati.
I versori costanti

$$\pm\frac{1}{|uv|\,4\sqrt{14}}\{12uv,\,-4uv,\,8uv\} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{3,\,-1,\,-2\}$$

sono normali alla superficie che, come osservato sopra, é una porzione di piano...!
Il piano tangente richiesto, che coincide pertanto con la superficie stessa, é

$$3x - y - 2z = 0$$

8.7. Esercizio. *Sia S la superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse z del grafico della funzione*

$$x = 1 - \sqrt{1 - z^2},\ \ z \in [-1, 1]$$

- *determinare una rappresentazione parametrica di S,*
- *calcolare l'area di S*
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_S z\, d\sigma$$

SOLUZIONE:

La rappresentazione parametrica é:

$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{1 - v^2})\cos(u) \\ y = (1 - \sqrt{1 - v^2})\sin(u) \\ z = v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -1 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 2\pi \end{array}$$

La matrice Jacobiana é

$$\begin{pmatrix} -(1 - \sqrt{1 - v^2})\sin(u) & (1 - \sqrt{1 - v^2})\cos(u) & 0 \\ \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\cos(u) & \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\sin(u) & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\begin{cases} L = -(1-\sqrt{1-v^2})\cos(u) \\ M = (1-\sqrt{1-v^2})\sin(u) \\ N = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}(1-\sqrt{1-v^2}) \end{cases}$$

e quindi

$$\sqrt{L^2+M^2+N^2} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1$$

Ne segue pertanto

$$Area = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv = 2\pi\,(\pi+2)$$

Naturalmente lo stesso risultato veniva offerto direttamente dalla nota formula diretta dell'area delle superfici di rotazione di $x = f(z),\ z \in [-1,1]$

$$Area = 2\pi \int_{-1}^{1} f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}dz = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-\sqrt{1-v^2})\sqrt{1+\frac{v^2}{1-v^2}}\,dv$$

L'integrale superficiale viene 0 per evidenti motivi di simmetria:

$$\iint_S z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^{1} v \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv = 0$$

8.8. Esercizio. *Siano*

$$E_b = \{(x,y,z)\,|\,1 \le x \le b,\ y^2+z^2 \le x^{-2}\},$$
$$\Sigma_b = \{(x,y,z)\,|\,1 \le x \le b,\ y^2+z^2 = x^{-2}\}$$

- *Calcolare il limite del volume di E_b per $b \to \infty$*
- *Dare una rappresentazione parametrica $(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ di Σ_b prendendo per cominciare $\varphi(u,v) = u$.*
- *Dare l'espressione dell'area di Σ_b e calcolare il suo limite per $b \to \infty$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

I punti di E_b hanno coordinate

$$x = v, y = \frac{1}{v}\cos(u), z = \frac{1}{v}\sin(u), \quad 1 \le v \le b, \quad 0 \le u \le 2\pi$$

(i) Il volume di E_b è

$$\int_{E_b} dxdydz = \int_1^b \frac{\pi}{x^2}\, dx = \pi\left(1-\frac{1}{b}\right) \to \pi.$$

(iii) L'area di Σ_b è

$$2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{1/u^4+1}}{u}\, dv$$

dunque (senza calcoli) tende a ∞ per $b \to \infty$.

8.9. Esercizio. *Sia V il solido formato dalla rotazione del sottografico della funzione*

$$y = \lambda\, \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$$

intorno all'asse x:

- *determinare l'area della superficie ∂V che delimita V,*
- *determinare, nei punti di ∂V in cui esiste, il versore ν normale esterno,*
- *determinare il volume di V.*

SOLUZIONE:

La superficie che delimita V, la frontiera ∂V ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = u \\ y = \lambda\, \sin(u)\cos(v) \\ z = \lambda\, \sin(u)\sin(v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq \pi, \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array}$$

La matrice Jacobiana, dalla quale si ricavano i versori normali e l'elemento di superficie é la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda\, \cos(u)\cos(v) & \lambda\, \cos(u)\sin(v) \\ 0 & -\lambda\, \sin(u)\sin(v) & \lambda\, \sin(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$

Ne segue:

$$\begin{cases} L = \lambda^2 \cos(u)\sin(u), \\ M = -\lambda \sin(u)\cos(v), \\ N = -\lambda \sin(u)\sin(v) \end{cases} \quad \sqrt{L^2+M^2+N^2} = \sqrt{\lambda^2 \sin^2(u)[\lambda^2\cos^2(u)+1]}$$

I punti di V sono

$$\begin{cases} x = u \\ y = \rho\, \cos(\vartheta) \\ z = \rho\, \sin(\vartheta) \end{cases} \quad \begin{array}{c} 1 \leq u \leq b \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \lambda \sin(u) \end{array}$$

Il volume di V é dato, tenuto conto del cambiamento di coordinate e del relativo determinante jacobiano,

$$dx\,dy\,dz = \rho\,du\,d\rho\,d\vartheta$$

dal seguente integrale

$$Volume(V) = \int \iint dxdy \int_0^{\pi} \pi\lambda^2 \sin^2(u)du = \frac{\lambda^2\,\pi^2}{2}$$