ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

14 gennaio 2011

7.1. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale* $\overrightarrow{F} = \{y^2,\, x^2\}$ *calcolare la circuitazione*

$$\oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

ovvero

$$\oint_{\partial\Omega} \left(y^2\, dx + x^2\, dy\right)$$

essendo Ω *il quadrato di vertici* $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$.

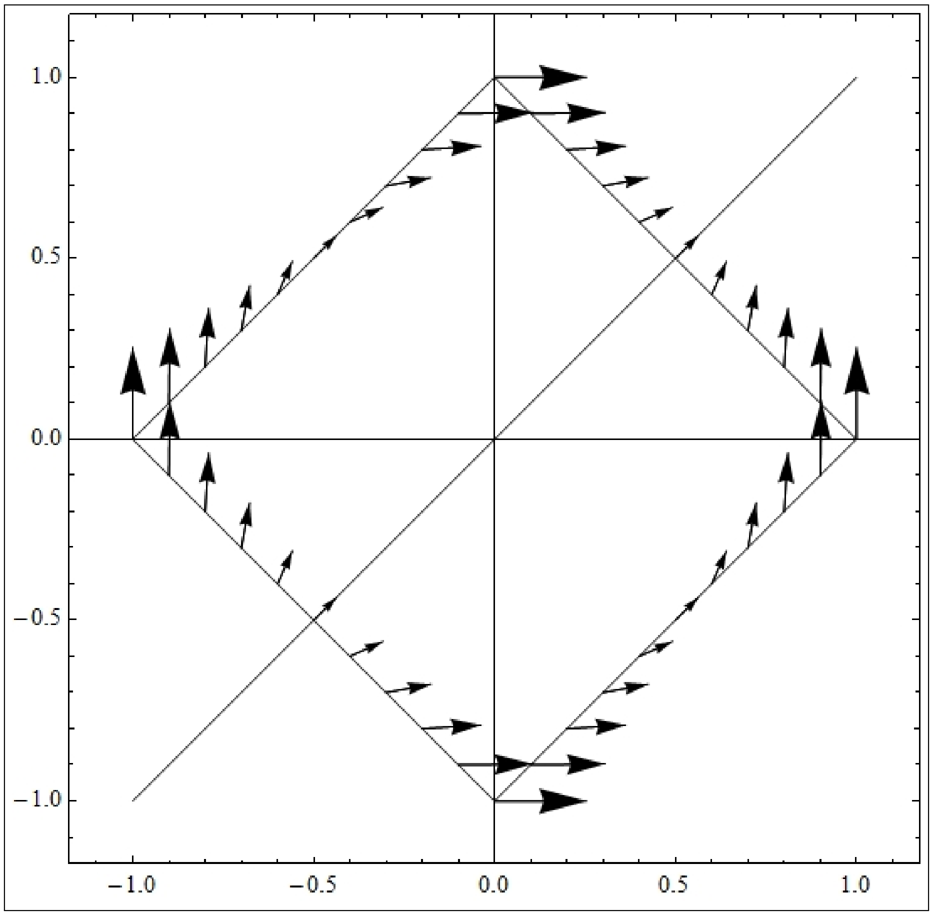

FIGURA 1. $F = \{y^2,\, x^2\}$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Il calcolo diretto di $\oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$ richiede:

- le 4 espressioni parametriche dei 4 lati del quadrato,
- le 4 espressioni dei 4 versori tangenti (costanti su ogni lato) scelti con l'orientamento giusto,
- i 4 integrali unidimensionali.

La figura 1 mostra del resto il carattere simmetrico del campo sulla porzione della frontiera del quadrato al di sopra della bisettrice $y = x$ e al di sotto...., simmetria che produce nelle due porzioni lavori opposti, e, quindi, complessivamente

$$\oint_{\partial\Omega} \left(y^2\, dx + x^2\, dy\right) = 0$$

Servendosi della formula di Stokes si ha

$$\oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \,.\, \tau\, ds = \iint_{\Omega} rot_z(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

da cui, tenuto conto che $rot_z(\overrightarrow{F}) = 2(x - y)$ si ha

$$\oint_{\partial\Omega} \left(y^2\, dx + x^2\, dy\right) = \iint_{\Omega} 2(x - y)\, dx\, dy$$

Il quadrato Ω assegnato é unione di due domini normali:

$$\{-1 \le x \le 0,\ -x - 1 \le y \le x + 1\} \bigcup \{0 \le x \le 1,\ x - 1 \le y \le -x + 1\}$$

Il calcolo dell'integrale doppio su Ω si esegue con la formula di riduzione

$$\iint_{\Omega} 2(x-y)\, dx\, dy = 2\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} (x-y)\, dy + 2\int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{-x+1} (x-y)\, dy$$

Stante l'evidente simmetria nel quadrato Ω della funzione $2(x - y)$ é del resto anche evidente che l'integrale doppio vale 0.
Si ha pertanto, ancora,

$$\oint_{\partial\Omega} \left(y^2\, dx + x^2\, dy\right) = 0$$

7.2. Esercizio. *Determinare i sottoinsiemi E del piano in cui la forma differenziale*

$$\omega = \frac{-2x}{y - x^2} dx + \frac{1}{y - x^2} dy$$

é esatta, ovvero il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left\{ \frac{-2x}{y - x^2}, \frac{1}{y - x^2} \right\}$$

é conservativo.
Determinare in ciascuno di tali sottoinsiemi le primitive di ω ovvero i potenziali di $\overrightarrow{F}$.

SOLUZIONE:

La forma differenziale ω, ovvero il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ sono definiti nelle due parti di piano

$$\Omega_+ : y > x^2, \qquad \Omega_- : y < x^2$$

Tenuto presente che

- rot $\overrightarrow{F} = 0$
- sia Ω_+ che Ω_- sono aperti semplicemente connessi,

si riconosce che in ciascuno dei due campi ω é esatta ovvero $\overrightarrow{F}$ é conservativo.
Una primitiva di ω, ovvero un potenziale di $\overrightarrow{F}$ sono

$$U(x,y) = \begin{cases} \ln(y - x^2) & (x,y) \in \Omega_+ \\ \ln(x^2 - y) & (x,y) \in \Omega_- \end{cases}$$

Le due espressioni della primitiva trovate possono essere riassunte nell'unica espressione

$$U(x,y) = \ln\left(\left|y - x^2\right|\right)$$

del resto ben nota quando, cercando nel caso unidimensionale la primitiva di $\dfrac{1}{t}$, si indicava $\ln(|t|)$.

7.3. Esercizio. *Sia F il campo $\overrightarrow{F} = \{\cos(x+y), \sin(x+y)\}$, detti $\mathcal{C}$ i cerchi di centro l'origine e raggio r determinare*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{\tau} \, ds$$

SOLUZIONE:

Dalla formula di Stokes si ha

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{\tau} \, ds = \iint_{\mathcal{C}} rot_z(\overrightarrow{F}) \, dx \, dy$$

da cui, tenuto presente che

$$rot_z(\overrightarrow{F}) = \cos(x+y) + \sin(x+y)$$

si ha

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \, . \, \overrightarrow{\tau} \, ds = \iint_{\mathcal{C}} [\cos(x+y) + \sin(x+y)] \, dx \, dy$$

L'integrale doppio a secondo membro puó essere a sua volta espresso con il teorema della media come

$$[\cos(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r) + \sin(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r)]\ \pi\, r^2$$

essendo $(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r)$ un punto opportuno di $\mathcal{C}$.
Ne segue pertanto

$$\frac{1}{r^2} \oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} . \overrightarrow{\tau}\, ds = [\cos(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r) + \sin(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r)]\ \pi$$

Passando al limite per $r \to 0$ il cerchio $\mathcal{C}$ si stringe intorno all'origine e quindi necessariamente il punto $(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r)$ tende a $(0,0)$ e, quindi,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} . \overrightarrow{\tau}\, ds = \pi$$

avendo tenuto presente che

$$\lim_{r\to 0} [\cos(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r) + \sin(\widetilde{x}_r + \widetilde{y}_r)] = 1$$

7.4. Esercizio. *Assegnate due funzioni f e g calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_{\mathcal{C}} \{(f(x) + y)dx + (g(y) - 3x)dy\}$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa nel verso antiorario.

Soluzione:

Supponiamo f e g almeno continue: allora il campo vettoriale

$$E_0 = \{f(x), g(y)\}$$

é conservativo: un suo potenziale é infatti $U(x,y) = F(x) + G(y)$ essendo F e G due primitive di f e g, certamente esistenti se f e g sono almeno continue.
Il campo

$$E_1 = \{y, -3x\}$$

non é conservativo: infatti $rot(E_1) = -4$ e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} \{(f(x) + y)dx + (g(y) - 3x)dy\} = \int_{\mathcal{C}} \{f(x)dx + g(y)dy\} + \int_{\mathcal{C}} \{ydx - 3xdy\} =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \{ydx - 3xdy\} = \iint_{\mathbb{C}} -4\, dx\, dy = -4\pi$$

7.5. Esercizio. *Calcolare l'integrale curvilineo I della forma*

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy-5)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy\right\}$$

essendo $\mathcal{C}$

- *il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$,*
- *l'arco di parabola $y = x^2 - 1$ percorso da $(-1,0)$ a $(1,0)$.*

SOLUZIONE:

- sul segmento:

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy-5)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy\right\} = \int_{-1}^{1} -5\,dx = -10$$

- sull'arco di parabola: $x = t, y = t^2 - 1,\ t \in [-1,1]$

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy-5)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy\right\} = \int_{-1}^{1} \left[2t(t^2-1) - 5 + [t^2 + 3(t^2-1)^2]2t\right] dt = -10$$

L'uguaglianza dei due valori era del resto prevedibile dal momento che il campo $\{(2xy-5)\,,\,(x^2+3y^2)\}$ ha rotore nullo e, essendo definito in tutto il piano, é conservativo: pertanto il lavoro lungo una curva dipende solo dagli estremi e, il segmento e l'arco di parabola hanno gli stessi estremi.

7.6. Esercizio. *Mostrare che la forma differenziale*

$$\omega = \left\{x + \frac{x+5}{[(x+5)^2+y^2]^2}\right\} dx + \left\{y + \frac{y}{[(x+5)^2+y^2]^2}\,dy\right\}$$

é esatta in tutto il suo insieme di definizione D.

SOLUZIONE:

La forma $xdx + ydy$ é ovviamente esatta: si tratta del differenziale di

$$\frac{x^2+y^2}{2}$$

Analogamente é esatta la

$$\left\{\frac{x+5}{[(x+5)^2+y^2]^2}\right\} dx + \left\{\frac{y}{[(x+5)^2+y^2]^2}\,dy\right\}$$

Si tratta del differenziale di

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+5)^2+y^2}$$

Quindi complessivamente, posto

$$U(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+5)^2+y^2}$$

riesce

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x} U(x,y)\, dx + \frac{\partial}{\partial y} U(x,y)\, dy$$

7.7. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale*

$$\overrightarrow{u} = \left\{ \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right\}$$

calcolare il lavoro

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{\tau_E}\, ds$$

essendo $E : x^2 + y^2 + xy \leq 1$ *e* τ_E *un versore tangente a* ∂E.

SOLUZIONE:

Il campo

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right\}$$

é radiale: quindi é conservativo.
Un suo potenziale é

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

Il lavoro quindi lungo la curva chiusa ∂E, come lungo qualsiasi altra curva chiusa che non passi per l'origine, é nullo.

7.8. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale*

$$\overrightarrow{v} = \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right\}$$

calcolare il lavoro relativo

- *alla circonferenza* $\mathcal{G}$ *di centro* $(1,3)$ *e raggio* $r = 1$,
- *alla circonferenza* $\mathcal{P}$ *di centro* $(1,3)$ *e raggio* $r = 4$.
- *alla curva* $C : x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ t \in [0, k\pi],\ k > 0$.

SOLUZIONE:

Il campo $\overrightarrow{v}$ ha rotore nullo in $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$: quindi é conservativo in ogni aperto semplicemente connesso Ω.

- la circonferenza $\mathcal{G}$ di centro $(1,3)$ e raggio $r = 1$ é contenuta nell'aperto $\Omega : y > 0$ semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$: quindi il lavoro di $\overrightarrow{v}$ lungo essa é nullo.

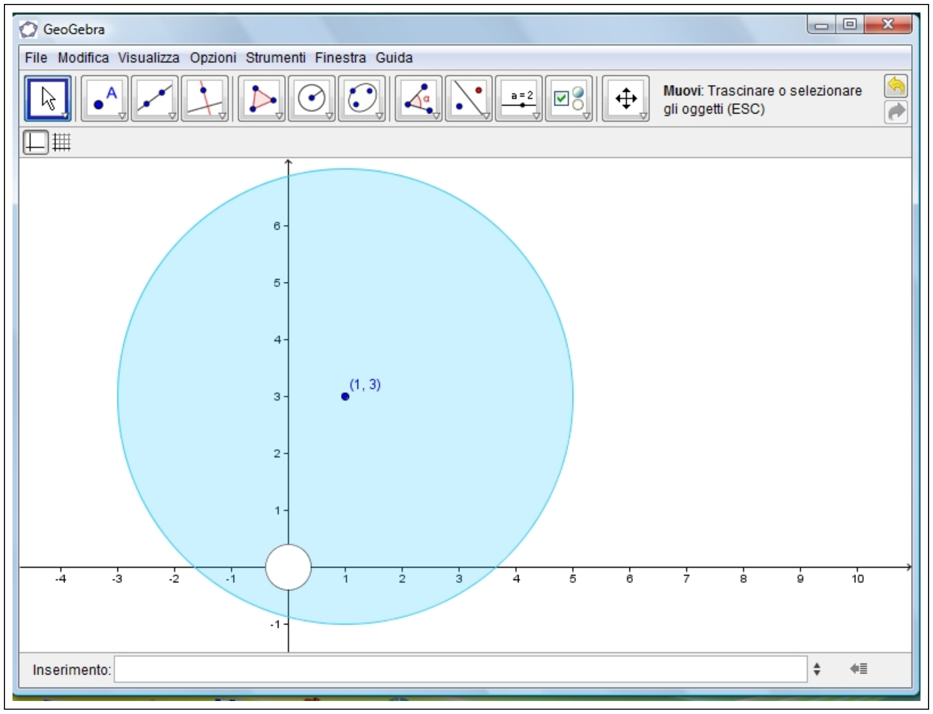

FIGURA 2. Il campo Ω

- la circonferenza $\mathcal{P}$ di centro $(1,3)$ e raggio $r=4$ include l'origine al suo interno, quindi non é contenuta in alcun aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$: tenuto conto che $rot(\overrightarrow{v})=0$ riesce tuttavia, applicando la formula di Stokes all'aperto Ω di Figura 2,

$$\oint_{\partial\Omega}\left\{\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right\}=0$$

da cui

$$\oint_{\mathcal{P}}\left\{\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right\}=\oint_{\mathcal{C}}\left\{\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

essendo $\mathcal{C}$ la piccola circonferenza di centro l'origine.
Si ha

$$\int_{\mathcal{C}}\overrightarrow{v}\,.\,\tau ds=\int_0^{2\pi}(\sin^2(\vartheta)+\cos^2(\vartheta))d\vartheta=2\pi$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{P}}\overrightarrow{v}\,.\,\tau ds=2\pi$$

- L'integrale sulla curva C assegnata si calcola direttamente

$$\int_C \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds = \int_0^{k\pi} (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)) d\vartheta = k\pi$$

7.9. Esercizio. *Assegnato il campo vettoriale*

$$\overrightarrow{w} = \left\{ \frac{-y}{r^n}, \frac{x}{r^n} \right\}$$

calcolare il lavoro

$$\int_C \overrightarrow{w} \,.\, \overrightarrow{\tau} \, ds$$

essendo C la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$.

Soluzione:

Il calcolo diretto produce

$$\oint_C \overrightarrow{w} \,.\, \tau \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{r(\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta))}{r^n} r d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{r^{n-2}} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{2\pi}{r^{n-2}}$$