ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

1 gennaio 2011

6.1. Esercizio. *Sia Γ la curva regolare a tratti di rappresentazione parametrica*

$$x = t^2,\ y = t^3, \quad t \in [0, 1] \quad e \quad x = t^3,\ y = t^2, \quad t \in [1, 2]$$

- *calcolare la lunghezza,*
- *calcolare, dove esistono, i versori tangenti $\overrightarrow{\tau}(t)$*
- *calcolare, dove esistono, i versori normali $\overrightarrow{\nu}(t)$*

SOLUZIONE:

La curva Γ merita il nome di *regolare a tratti* per via di quanto succede delle sua rappresentazione parametrica nel punto $t = 1$: pur riuscendo

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = \lim_{t\to 1^+} x(t), \quad \lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^+} y(t)$$

si ha

$$\lim_{t\to 1^-} x'(t) = 2 \neq \lim_{t\to 1^+} x'(t) = 3, \quad \lim_{t\to 1^-} y'(t) = 3 \neq \lim_{t\to 1^+} y'(t) = 2$$

La lunghezza $\mathcal{L}$ si calcola per ciascun tratto

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt + \int_1^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt =$$

$$= \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt = \frac{1}{18}\, \frac{2}{3}\sqrt{4 + 9t^2}^3\Big|_0^2 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 9.07342$$

Si noti la verosimiglianza della lunghezza ottenuta con quanto riconoscibile in Figura 1, nella quale la curva Γ appare molto simile all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 8 e 4, quindi di lunghezza $\sqrt{80}$.

I versori tangente e normale esistono in tutti i punti di Γ meno che nel punto $(1, 1)$ corrispondente a $t = 1$: si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{\tau}(t) = & \pm \left\{ \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right\} \\ \\ \overrightarrow{\nu}(t) = & \pm \left\{ \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \dfrac{-x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right\} \end{cases}$$

Le espressioni di $x'(t)$ e $y'(t)$ sono naturalmente diverse a seconda che riesca $t \in [0, 1)$ oppure $t \in (1, 2]$.

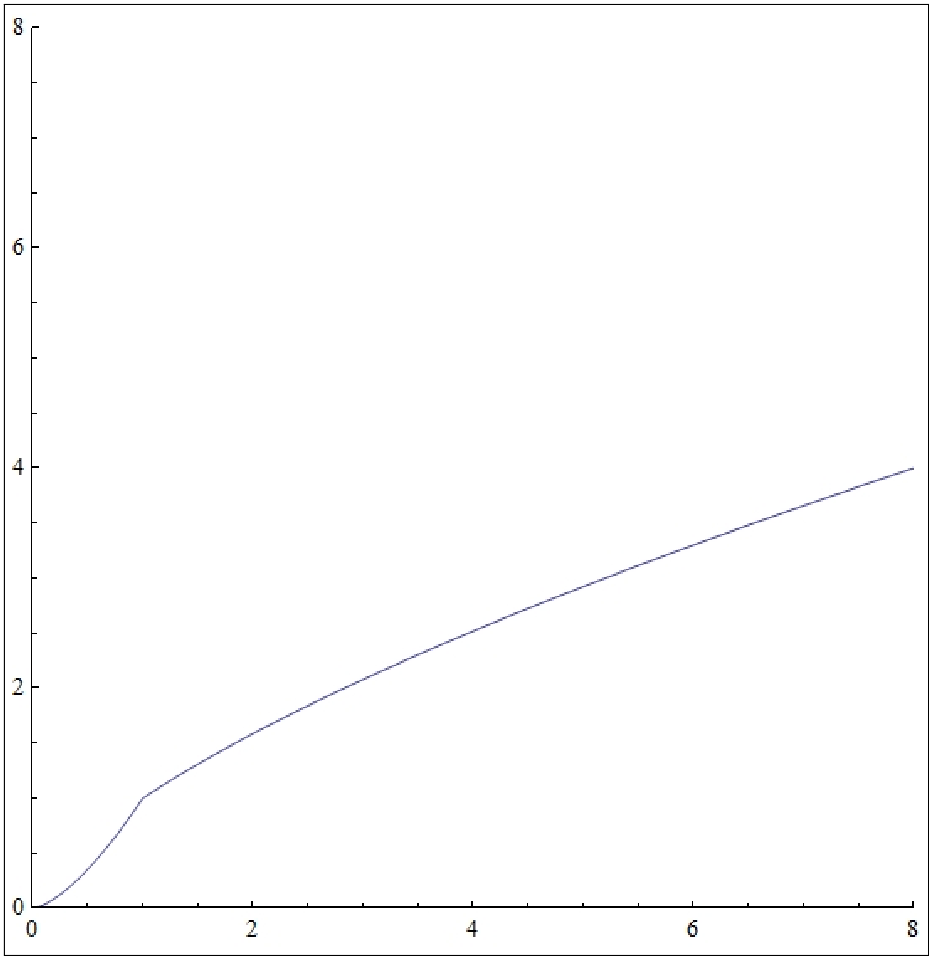

FIGURA 1. $x = t^2,\ y = t^3, \quad t \in [0,1] \quad e \quad x = t^3,\ y = t^2, \quad t \in [1,2]$

6.2. Esercizio. *Sia* Γ *la curva regolare a tratti*

$$x = \cos(t), \ \ y = \sin(t), \ \ z = \begin{cases} t & t \in [0,\pi) \\ 2t & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- *calcolare la lunghezza di* Γ*,*
- *determinare la funzione* $s(t)$ *ascissa curvilinea su* Γ*,*
- *esaminare se* $s(t)$ *é derivabile.*

SOLUZIONE:

La curva Γ piú che una curva regolare a tratti é composta di due curve regolari separate, due eliche:

- la prima $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$, $t \in [0, \pi]$, parte dal punto $(1, 0, 0)$ e termina nel punto $(-1, 0, \pi)$
- la seconda $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = 2t$, $t \in [\pi, 2\pi]$, parte dal punto $(-1, 0, 2\pi)$ e termina nel punto $(1, 0, 4\pi)$

La lunghezza totale, somma delle lunghezze delle due parti, é quindi

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{1+1}dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+4}dt = \pi\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$$

L'ascissa curvilinea é

$$s(t) = \begin{cases} t\sqrt{2} & se \quad t \in [0, \pi] \\ \pi\sqrt{2} + (t-\pi)\sqrt{5} & se \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

La funzione $s(t)$ é derivabile in tutto $[0, 2\pi]$ privato del punto π: infatti

$$s'(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & se \quad t \in [0, \pi) \\ \sqrt{5} & se \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

.... la salita nel secondo tratto é piú ripida !

6.3. Esercizio. *Assegnata la funzione* $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ *calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_S f(x, y)\, ds$$

essendo S *il segmento di estremi* $(0, 0)$ *e* $(1, 2)$.

Soluzione:

Il segmento S ha rappresentazione $x(t) = t$, $y(t) = 2t$, $t \in [0, 1]$ pertanto

$$\int_S f(x, y)\, ds = \int_0^1 f[x(t), y(t)]\, \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^1 13t^2\, \sqrt{5}\, dt = \frac{13\sqrt{5}}{3}$$

6.4. Esercizio. *Sia* Γ *l'elica*

$$x = \cos(t), \ y = \sin(t), \ z = t, \ t \in [0, 2\pi]$$

calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

Soluzione:

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\, ds = \int_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{1+1}\, dt = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3}\right)$$

6.5. Esercizio. *Assegnato il campo* $\overrightarrow{F} = \{2x^2, 3y^2\}$

- *determinare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo il segmento dall'origine al punto* $(1, 2)$,
- *determinare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la poligonale*

$$(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 2)$$

- *esaminare se* $\overrightarrow{F}$ *ammette potenziale.*

SOLUZIONE:

Il lavoro del campo $\overrightarrow{F}$ é, per definizione,

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

essendo S il segmento $(0, 0), (1, 2) : x = t, y = 2t,\ t \in [0, 1]$ e

$$\overrightarrow{\tau} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Si ha quindi

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 (2t^2 + 6(2t)^2)dt = \frac{26}{3}$$

La poligonale $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 2)$ é coordinata: il lavoro lungo i suoi due segmenti é pertanto

$$\int_0^1 2x^2\, dx + \int_0^2 3y^2 dy = \frac{2}{3} + 8 = \frac{26}{3}$$

Il campo $\overrightarrow{F}$ é ovviamente il gradiente della funzione

$$U(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + y^3$$

Si noti al riguardo come i due lavori del campo $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento $(0, 0), (1, 2)$ e lungo la poligonale $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 2)$ coincidono tra loro e coincidono con l'incremento di U tra gli estremi del segmento e della poligonale.

6.6. Esercizio. *Assegnato il campo*

$$\overrightarrow{F} = \{y^2,\, x^2,\, x^2 + y^2 + z^2\}$$

- *determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1,2,3)$,*
- *detto $L(a,b,c)$ il lavoro di F lungo il segmento dall'origine al punto (a,b,c) determinare il gradiente della funzione $L(a,b,c)$,*
- *esaminare se $\overrightarrow{F}$ sia o meno conservativo.*

SOLUZIONE:

Una rappresentazione parametrica del segmento S é

$$x = t,\ y = 2t,\ z = 3t,\quad t \in [0,1]$$

il versore

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{1,\, 2,\, 3\,\}$$

da cui

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 \big((2t)^2 \,.\, 1 + t^2 \,.\, 2 + (14t^2) \,.\, 3\big)\, dt =$$

$$= \int_0^1 48t^2\, dt = \frac{48}{3} = 16$$

Il lavoro $L(a,b,c)$ di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto (a,b,c) si calcola in modo analogo

$$x = at,\ y = bt,\ z = ct,\quad t \in [0,1]$$

il versore

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\{a,\ b,\ c\,\}$$

da cui

$$L(a,b,c) = \int_0^1 \big((bt)^2 \,.\, a + (at)^2 \,.\, b + (a^2 + b^2 + c^2)t^2 \,.\, c\big)\ dt =$$

$$= \frac{a^2\, b + b^2\, a + (a^2 + b^2 + c^2)\, c}{3}$$

Il gradiente $\nabla\, L(a,b,c)$ della $L(a,b,c)$ é pertanto

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial a}, \frac{\partial L}{\partial b}, \frac{\partial L}{\partial c},\right\} = \left\{\frac{2a(b+c) + b^2}{3},\ \frac{2b(a+c) + a^2}{3},\ \frac{a^2 + b^2 + 3c^2}{3}\right\}$$

vettore che non coincide con $\overrightarrow{F}$ calcolato in (a,b,c), ovvero, in altri termini $L(a,b,c)$ non é un potenziale per $\overrightarrow{F}$.

Il campo $\overrightarrow{F}$ non ha rotore nullo, basta osservare che

$$\frac{\partial}{\partial x}F_2 = 2x \neq \frac{\partial}{\partial y}F_1 = 2y$$

e quindi non é conservativo.

6.7. Esercizio. *Assegnato il campo*

$$\overrightarrow{F} = \{e^x + y,\ e^y + x\}$$

- *determinare il suo rotore,*
- *determinare un suo potenziale,*
- *determinare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *sui segmenti da* $(\rho, 0)$ *a* $(0, \rho)$ *al variare di* $\rho \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE:

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^x + y & e^y + x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Il campo $\overrightarrow{F}$ é definito in tutto $\mathbb{R}^2$, ha rotore nullo, quindi é un gradiente: un suo potenziale $U(x, y)$ si determina considerando il lavoro del campo dall'origine al punto (x, y)

$$U(x,y) = \int_0^1 \left\{(e^{xt} + yt)x + (e^{yt} + xt)y\right\} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{(e^{xt})' + (e^{yt})' + xy(t^2)'\right\} dt = e^x - 1 + e^y - 1 + xy$$

Un potenziale di $\overrightarrow{F} = \{e^x + y,\ e^y + x\}$ era certamente esprimibile

- cercando le primitive $V(x, y)$ della $e^x + y$ rispetto a x,
$$V(x, y) = e^x + xy + c(y)$$
- scegliendo la $c(y)$ in modo che $V_y = e^y + x$, da cui
$$c'(y) = e^y \quad \rightarrow \quad c(y) = e^y + k$$
- da cui le V giuste sono le $e^x + xy + e^y + k$, in accordo con quella trovata sopra.

Il lavoro richiesto sui segmenti da $(\rho, 0)$ a $(0, \rho)$ corrisponde, naturalmente a

$$V(0, \rho) - V(\rho, 0) = 0$$

6.8. Esercizio. *Sia* $\overrightarrow{F}$ *il campo*

$$\overrightarrow{F} = \{x^2,\ y^3,\ z^4\}$$

- *calcolare il rotore di* $\overrightarrow{F}$*,*
- *calcolare un potenziale di* $\overrightarrow{F}$*,*
- *calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la curva* Γ *da* $(1, 2, 3)$ *a* $(4, 5, 6)$*.*

SOLUZIONE:

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & y^3 & z^4 \end{vmatrix} = 0$$

La forma del campo $\overrightarrow{F}$, prima componente dipendente solo da x, seconda solo da y e terza solo da z suggerisce come potenziale la somma delle tre corrispondenti primitive rispetto ad x, ad y e a z

$$U(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}z^5$$

Il lavoro $\mathcal{L}$ tra $(1, 2, 3)$ a $(4, 5, 6)$ é quindi

$$\mathcal{L} = U(4, 5, 6) - U(1, 2, 3) = \frac{33597}{20}$$

6.9. Esercizio. *Sia* $\overrightarrow{F}$ *il campo di tipo radiale*

$$\overrightarrow{F} = r^4 \{x,\ y,\ z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *calcolare il lavoro di* $\overrightarrow{F}$ *lungo la circonferenza*
  $$x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta), z = 0,\ \vartheta \in [0, 2\pi]$$
- *calcolare il rotore di* $\overrightarrow{F}$*,*
- *calcolare un potenziale di* $\overrightarrow{F}$*.*

SOLUZIONE:

Il lavoro di $\mathcal{L}$ lungo la circonferenza $\mathcal{C}$ assegnata é dato dal seguente integrale

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos(\vartheta) \,.\, (-\sin(\vartheta)) + \sin(\vartheta) \,.\, \cos(\vartheta))\ d\vartheta = 0$$

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ r^4 \,.\, x & r^4 \,.\, y & r^4 \,.\, z \end{vmatrix} = 0$$

I campi radiali sono, detto $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, quelli espressi, per $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ come

$$\overrightarrow{F} = \phi(r) \left\{ \frac{x}{r}, \frac{x}{r}, \frac{x}{r}, \right\}$$

con $\phi(r)$ funzione regolare per $r > 0$.

Essi ammettono sempre il potenziale, anch'esso radiale,

$$\Phi(r) = \int_0^r \phi(\rho)\, d\rho$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(r) = \frac{\partial\,\Phi(r)}{\partial r}\,\frac{\partial\, r}{\partial x} = \phi(r)\frac{x}{r}$$

e analogamente le altre due derivate.

Nel caso assegnato

$$\overrightarrow{F} = r^4 \{x,\ y,\ z\} = r^5 \left\{ \frac{x}{r}, \frac{x}{r}, \frac{x}{r}, \right\}$$

il potenziale é pertanto

$$U(x, y, z) = \frac{1}{6} r^6 = \frac{1}{6}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$$

6.10. Esercizio. *Assegnato il triangolo T di vertici $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$*

- *calcolare il versore $\overrightarrow{\nu}$ normale uscente sui punti della frontiera,*
- *detto $\overrightarrow{F} = \{x,\ y\}$ determinare il flusso uscente da T*

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds$$

- *determinare il flusso ancora uscente da T del nuovo campo $\overrightarrow{G} = \{x^2, y^2\}$.*

SOLUZIONE:

La frontiera del triangolo é formata da tre segmenti, il relativo versore normale uscente é in questo caso,

$$\begin{cases} (-1, 0), (0, 2) & \overrightarrow{\tau} = \{-2, 1\}/\sqrt{5} \\ (0, 2), (1, 0) & \overrightarrow{\tau} = \{2, 1\}/\sqrt{5} \\ (1, 0), (-1, 0) & \overrightarrow{\tau} = \{0, -1\} \end{cases}$$

Il conto é stato fatto determinando

- il vettore lato del triangolo,
- un vettore ad esso ortogonale,
- scegliendo il verso in modo che risulti uscente.

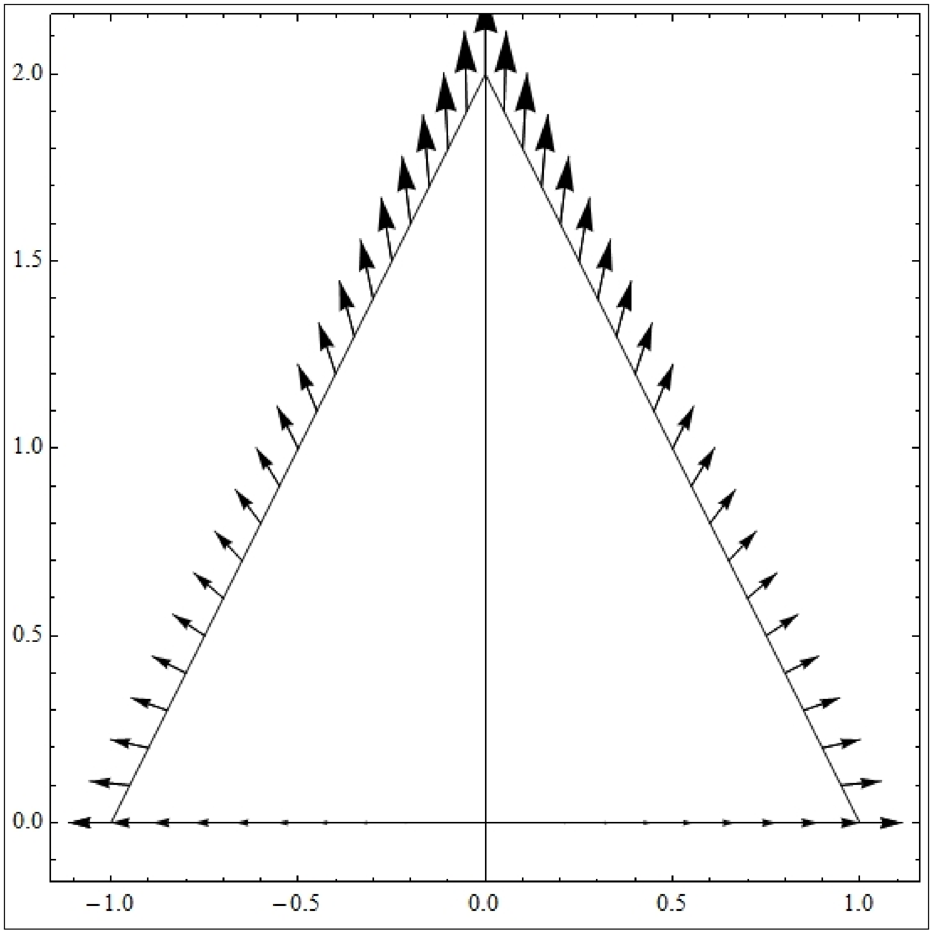

FIGURA 2. $F = \{x,\, y\}$

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_0^1 \left[\{(-t)(-2) + (2t)\} + \{(t)(2) + (2-2t)\}\right]\, dt = 4$$

Seguendo in Figura 2 la rappresentazione del campo $\overrightarrow{F}$ in corrispondenza della frontiera ∂T del triangolo si riconosce come il flusso uscente sia sicuramente positivo: le freccette che rappresentano $\overrightarrow{F}$ sono in ogni punto della frontiera rivolte verso l'esterno.
Analogo risultato si ottiene servendosi del teorema della divergenza

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_T \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dx\, dy = 2 \iint_T dx\, dy = 4$$

Il flusso del secondo campo, vedi Figura 3 é ancora positivo: infatti in tutti i punti che cadono al di sopra della retta $x + y = 0$, riportata in

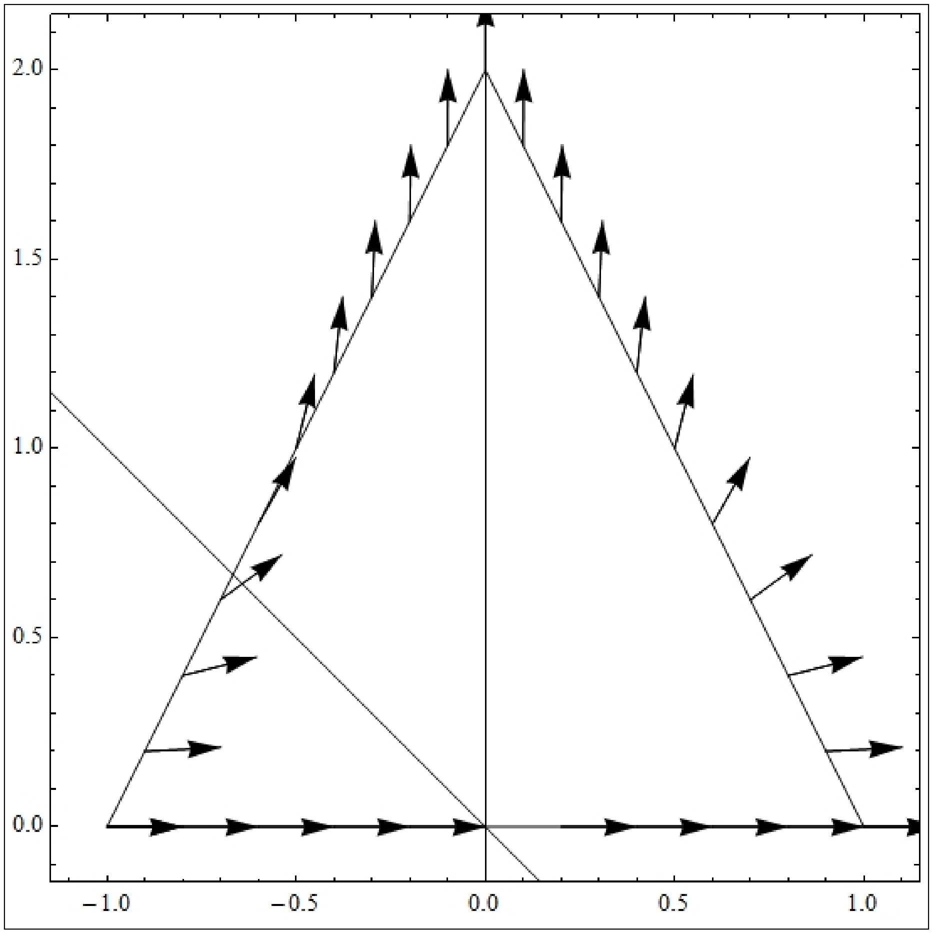

FIGURA 3. $F = \{x^2,\, y^2\}$

Figura 3 il campo é ancora uscente: solo nel piccolo tratto di frontiera che cade al di sotto di tale retta il campo non é uscente.
Calcolato direttamente con il teorema della divergenza conduce all'integrale doppio

$$\iint_T 2(x+y)\,dx\,dy$$

Decomposto T nei due triangoli a sinistra e a destra dell'asse y si ottiene, con le formule di riduzione,

$$2\int_{-1}^{0} dx\,\int_0^{2(1+x)} (x+y)\,dy + 2\int_0^1 dx\,\int_0^{2(1-x)} (x+y)\,dy = \frac{8}{3}$$

6.11. Esercizio. *Assegnato il campo* $\overrightarrow{F} = \{y^3,\, x^3\}$

- *calcolare il flusso di* $\overrightarrow{F}$ *uscente dal triangolo di vertici* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$,
- *calcolare il flusso di* $\overrightarrow{F}$ *uscente dal quarto di cerchio*

$$(x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

- *verificare i risultati precedentemente ottenuti servendosi del Teorema della divergenza.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

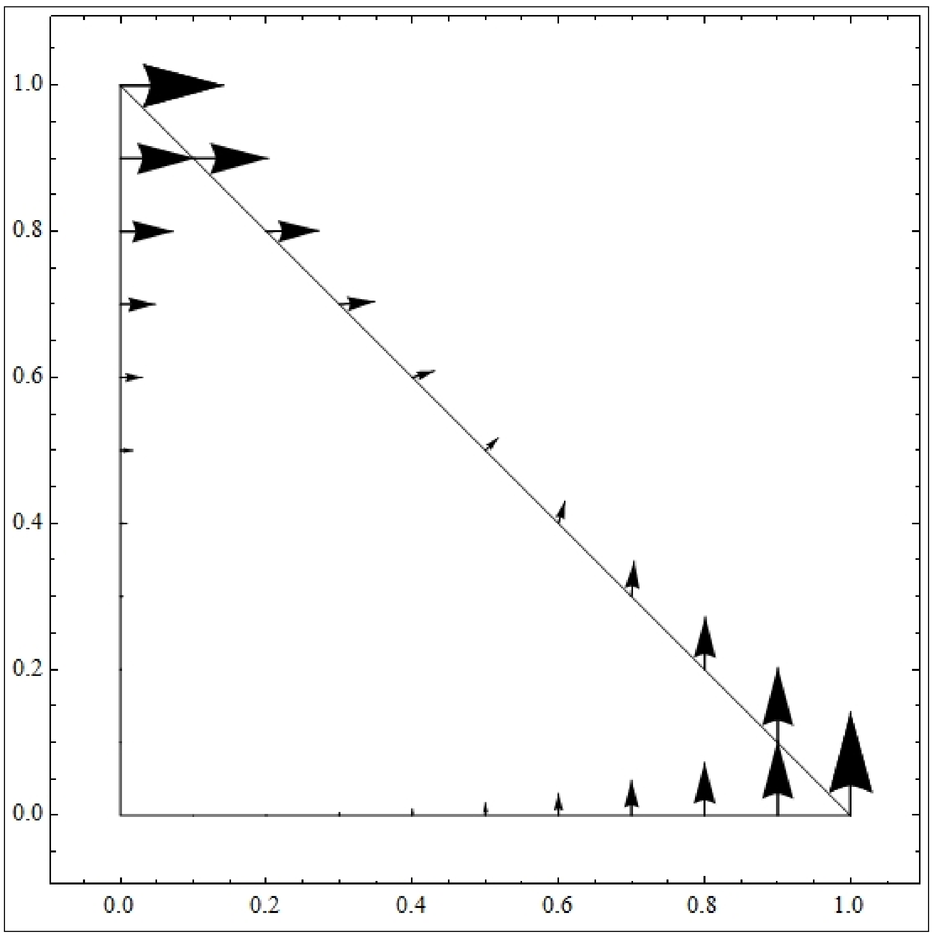

FIGURA 4. $F = \{y^3, x^3\}$

$\boxed{\textit{Il caso del triangolo}}$

Tenuto presente che il vettore $\overrightarrow{\nu}$ esterno é

$$\begin{cases} (0,0)-(1,0) & x = t, \quad y = 0 \quad \overrightarrow{\nu} = \{0, -1\} \\ (1,0)-(0,1) & x = t, \quad y = 1-t \quad \overrightarrow{\nu} = \{1, 1\}/\sqrt{2} \qquad t \in [0, 1] \\ (0,1)-(0,0) & x = 0, \quad y = t \quad \overrightarrow{\nu} = \{-1, 0\} \end{cases}$$

da cui

$$\int_{\partial T} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_0^1 \left\{ t^3(-1) + t^3 + (1-t)^3 + t^3(-1) \right\} dt = 0$$

$\boxed{\textit{Il caso del quarto di cerchio}}$

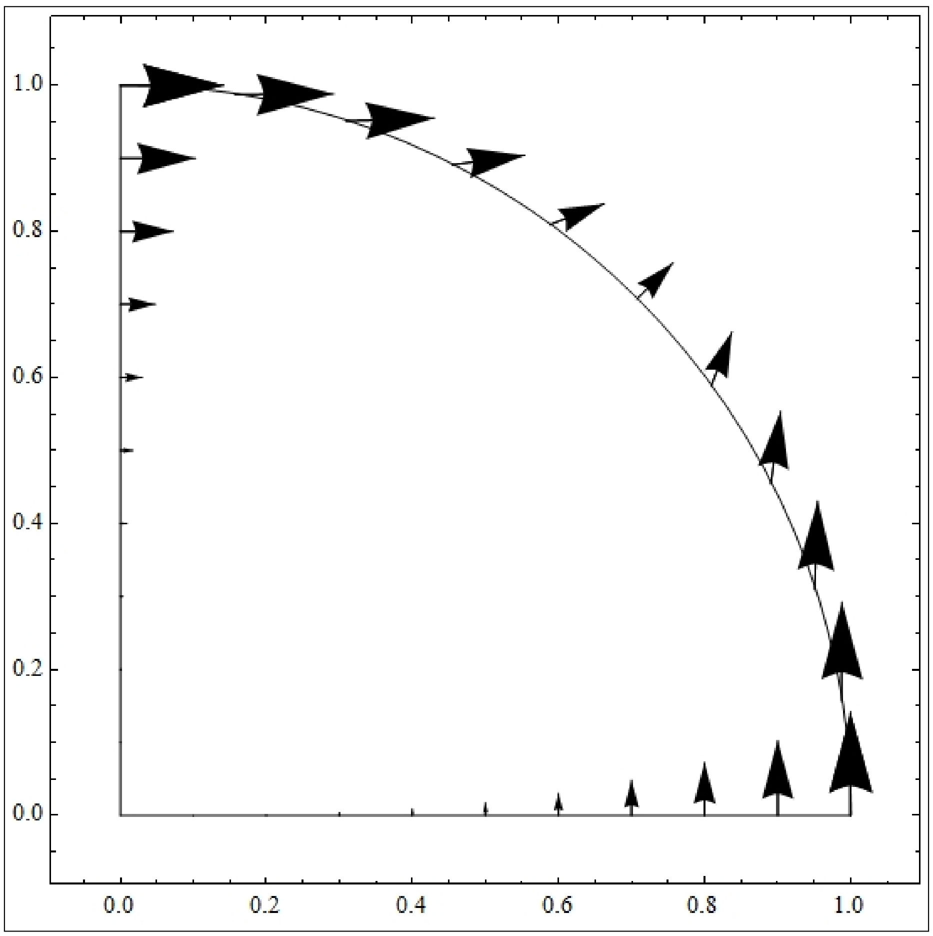

Figura 5. $F = \{y^3, x^3\}$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \textit{circonferenza} & x = \cos(t), & y = \sin(t) & \overrightarrow{\nu} = \{x, y\} & t \in [0, \pi/2] \\ (0,0) - (1,0) & x = t, & y = 0 & \overrightarrow{\nu} = \{0, -1\} & t \in [0,1] \\ (0,1) - (0,0) & x = 0, & y = t & \overrightarrow{\nu} = \{-1, 0\} & t \in [0,1] \end{array} \right.$$

da cui

$$\int_{\partial C} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_0^{\pi/2} 1 \left\{ \sin^3(t)\cos(t) + \cos^3(t)\sin(t) \right\}\, dt + \int_0^1 -2t^3\, dt = 0$$

La verifica dei due precedenti risultati tramite il teorema della divergenza

$$\int_{\partial C} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_C \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

é del tutto ovvia dal momento che

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x} y^3 + \frac{\partial}{\partial y} x^3 = 0$$

6.12. Esercizio. *Assegnato il campo*

$$F = \{x^3,\, y^3\}$$

e detto E il dominio $E:\ 4x^2 + 9y^2 \leq 36$

- *calcolare, servendosi del teorema della divergenza il flusso di F uscente da E,*
- *detta E_+ la parte di E contenuta nel semipiano $x \geq 0$ determinare il flusso di F uscente da E_+.*

Soluzione:

Servendosi del teorema della divergenza il flusso uscente da E richiesto coincide con il seguente integrale doppio

$$\iint_E 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \xi \\ \\ y = \dfrac{2}{3}\eta \end{cases} \qquad J = \frac{2}{3}$$

trasforma il dominio $E:\ 4x^2 + 9y^2 \leq 36$ nel cerchio $C:\ \xi^2 + \eta^2 \leq 9$ e pertanto

$$\iint_E 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_C 3\left(\xi^2 + \frac{4}{9}\eta^2\right) \frac{2}{3}\, d\xi\, d\eta$$

integrale quest'ultimo che si calcola agevolmente con le coordinate polari

$$2\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^3 \rho^2 \left(\cos^2(\vartheta) + \frac{4}{9}\sin^2(\vartheta)\right) \rho\, d\rho =$$

$$\frac{81}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\vartheta)+\frac{4}{9}\sin^2(\vartheta)\right)\,d\vartheta\;=\;\frac{81}{2}\left(1+\frac{4}{9}\right)\,\pi=\frac{117}{2}\,\pi$$

La simmetria di E rispetto agli assi permette di riconoscere che

$$\iint_{E_+} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_E 3(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

da cui

$$\iint_{E_+} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{117}{4}\,\pi$$

6.13. Esercizio. *Sia*

$$K:\;\{-1\le x\le 1,\;0\le y\le 1-x^2\}$$

e $f(x,y)=x^3+yx^2$. *Posto*

$$\overrightarrow{F}=\nabla f$$

calcolare, servendosi del teorema della divergenza l'integrale

$$\int_{\partial K}\overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{\nu}_e\,ds$$

essendo $\overrightarrow{\nu}_e$ *la normale esterna a* ∂K.

Soluzione:

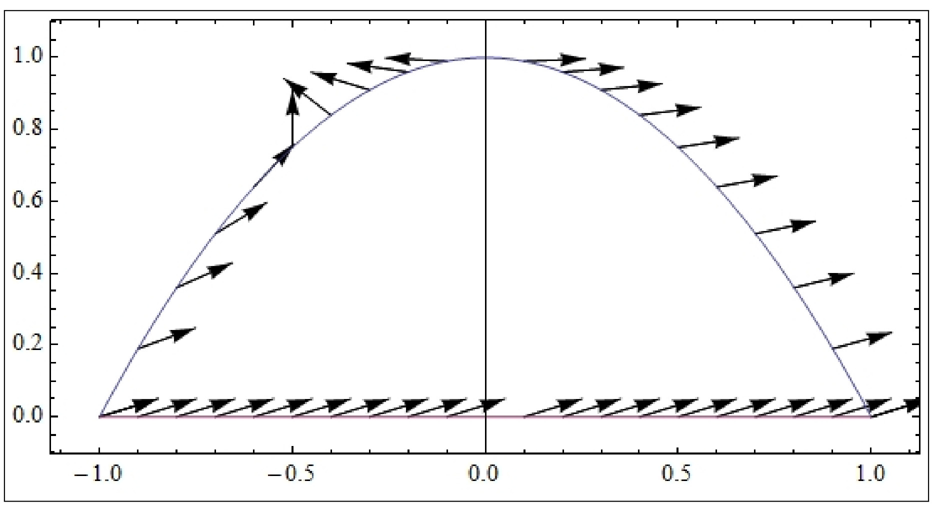

Figura 6. $f(x,y)=x^3+yx^2,\quad F=\nabla f$

$$\int_{\partial K}\overrightarrow{\nabla f}\,.\,\overrightarrow{\nu}_e\,ds=\iint_K \mathrm{div}(\overrightarrow{\nabla f})\,dx\,dy=\iint_K \triangle f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$= \iint_K (6x+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} (6x+2y)\,dy = \frac{16}{15}$$

6.14. Esercizio. *Data la funzione* $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$F(x,y) = \{3x^2+y^2, x^3-3y^2\}$$

calcolare

$$\int_{\partial K} F \,.\, \nu_e \, ds$$

essendo $K: \; -2 \le x \le 1, \; x^2-1 \le y \le 1+x$ *e* ν_e *il versore normale a* ∂K *esterno.*

Soluzione:

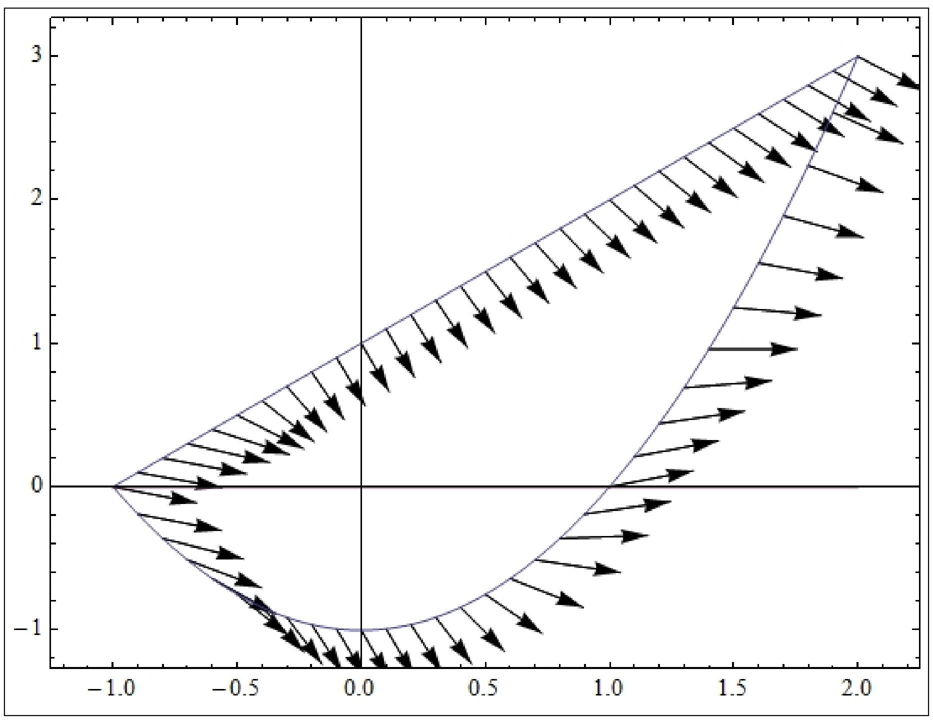

Figura 7. $F(x,y) = \{3x^2+y^2, x^3-3y^2\}$

Calcoliamo il versore ν_e nei due tratti che compongono ∂K

$$\begin{cases} y = 1+x & \nu = \{-1,1\}/\sqrt{2} \\ y = x^2-1 & \nu = \{2x,-1\}/\sqrt{1+4x^2} \end{cases}$$

Riesce pertanto

$$\int_{\partial K} F \,.\, \nu_e \, ds =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left\{ -3t^2 - (1+t)^2 + t^3 - 3(1+t)^2 \right\} \, dt +$$

$$+ \int_{-1}^{2} \left\{ \left[3t^2 + (t^2-1)^2 \right] 2t - \left[t^3 - 3(t^2-1)^2 \right] \right\} \, dt = \frac{-27}{10}$$

Risultato analogo si ottiene servendosi del teorema della divergenza che conduce all'integrale doppio

$$\iint_K 6(x-y)\, dx\, dy = 6 \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{1+x} (x-y)\, dy = \frac{-27}{10}$$

6.15. Esercizio. *Calcolare l'integrale curvilineo*[1]

$$\int_\Gamma \left\{ (\sin(x) + y) dx + (-3x + y^2) dy \right\}$$

essendo Γ *la circonferenza di centro l'origine e raggio* 1 *percorsa in senso antiorario.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto che la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario é rappresentata da

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} dx = -\sin(t)dt \\ dy = \cos(t)dt \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ne segue, per definizione,

$$\int_\Gamma \left\{ (\sin(x) + y) dx + (-3x + y^2) dy \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\sin(\cos(t)) + \sin(t) \right] (-\sin(t)) + \left[-3\cos(t) + \sin^2(t) \right] \cos(t) \right\} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - 3\cos^2(t))\, dt = -4\pi$$

avendo tenuto conto che

$$\sin(\cos(t))(-\sin(t)) + \sin^2(t)\cos(t) = \left(\sin(\cos(t)) + \frac{1}{3}\sin^3(t) \right)'$$

---

[1] La notazione $\int_\Gamma \left\{ (\sin(x) + y) dx + (-3x + y^2) dy \right\}$ equivale al lavoro $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$ del campo $F = \{\sin(x) + y,\ -3x + y^2\}$ lungo la curva Γ percorsa in senso antiorario.

e che quindi hanno integrale nullo su $[0, 2\pi]$.

Osservazione 6.1. *Un uso giudizioso del teorema della divergenza permette di riconoscere che, con le notazioni adottate,*

$$\int_{\partial\Omega} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_{\Omega} (-f_y(x,y) + g_x(x,y))\,dx\,dy$$

avendo indicato con $\partial\Omega$ la curva frontiera di Ω percorsa nel verso che tiene alla sinistra l'interno di Ω.
La formula osservata ha generalmente il nome di formula di Green.

Con tale osservazione si ottiene, naturalmente in accordo con il conto precedente,

$$\int_{\Gamma} \left\{(\sin(x) + y)dx + (-3x + y^2)dy\right\} = \iint_{C} (-1-3)\,dx\,dy = -4\pi$$

6.16. Esercizio. *Mostrare che la forma differenziale*

$$\omega = \left\{x + \frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^2}\right\} dx + \left\{y + \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2}\right\} dy$$

é esatta[2] *in tutto il suo insieme di definizione.*

SOLUZIONE:

I due coefficienti

$$x + \frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^2}, \qquad y + \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

della forma ω verificano la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{x + \frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{y + \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2}\right\}$$

Le primitive rispetto ad x del primo coefficiente

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left\{x^2 - \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}\right\} + c(y)$$

imponendo che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left\{x^2 - \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}\right\} + c(y)\right\} = y + \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2}$$

[2] L'affermazione che la forma differenziale *é esatta* equivale a dire che essa rappresenta il differenziale di una funzione $U(x,y)$, ovvero che il campo

$$F = \left\{x + \frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^2}\,,\; y + \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2}\right\}$$

é un gradiente.

si ricava

$$c'(y) = y \quad \to \quad c(y) = \frac{1}{2}y^2 + k$$

da cui il potenziale

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\left\{x^2 + y^2 - \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}\right\} + k$$