ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

26 novembre 2010

5.1. Esercizio. *Sia D il cerchio di centro l'origine e raggio R, calcolare, servendosi delle coordinate polari l'integrale doppio*

$$\iint_D \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

SOLUZIONE:

Le coordinate polari fanno corrispondere al cerchio D del piano (x,y) il rettangolo $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$: ne segue pertanto, tenuto conto che lo jacobiano vale ρ,

$$\iint_D \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\rho(\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta))}{1+\rho^2}\rho\,d\rho = 0$$

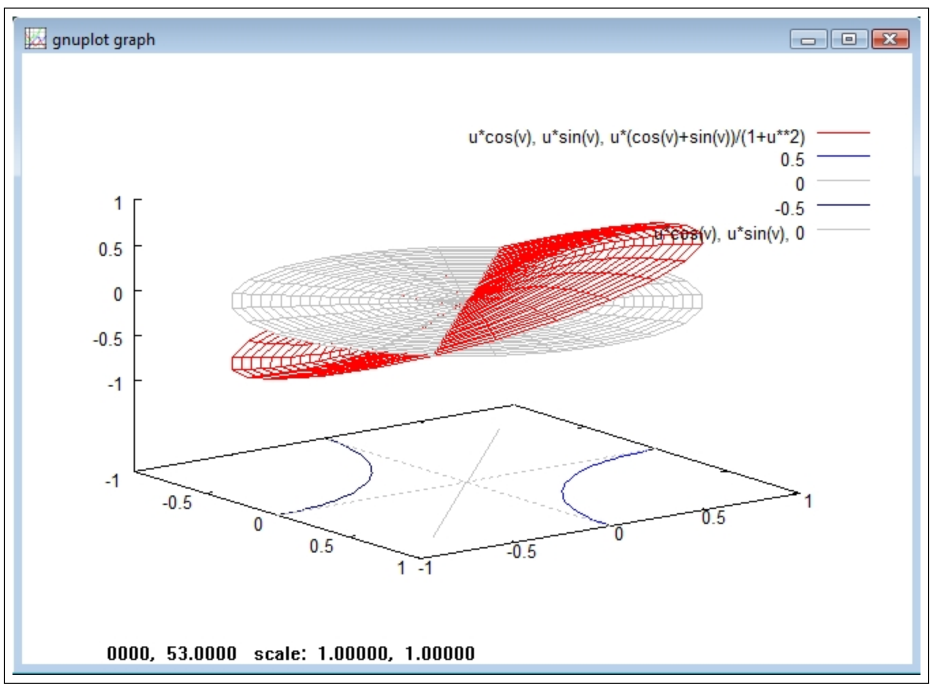

FIGURA 1. $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ e in grigio D sul piano $z=0$

5.2. Esercizio. *Detta E la regione delimitata dall'ellisse*

$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- indicare l'area di E come l'integrale doppio di 1 esteso ad E
- calcolare tale integrale servendosi di un opportuno cambiamento di coordinate affini.

SOLUZIONE:

L'ellisse assegnata é anche

$$\frac{x^2}{c^2/a^2} + \frac{y^2}{c^2/b^2} = 1$$

ovvero posto

$$\alpha = \frac{c}{a}, \quad \beta = \frac{c}{b}$$

si tratta dell'ellisse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

La regione E delimitata costituisce un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y

$$\begin{cases} -\alpha \le x \le \alpha \\ -\beta\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{\alpha^2}} \le y \le \beta\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{\alpha^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\beta \le y \le \beta \\ -\alpha\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{\beta^2}} \le x \le \alpha\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{\beta^2}} \end{cases}$$

L'area di E pertanto é rappresentata dai seguenti integrali doppi

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} dy, \qquad \int_{-\beta}^{\beta} dy \int_{-\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}}^{\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}} dy$$

Il cambiamento di coordinate lineare

$$T: \quad \begin{cases} x = \alpha\, u \\ \\ y = \beta\, v \end{cases}$$

riconosce $E = T(D)$ essendo D il cerchio di centro l'origine e raggio 1 del piano (u, v).

Tenuto conto che lo jacobiano vale

$$J(u, v) = \alpha\, \beta$$

Ne segue che

$$Area(E) = Area(T(D)) = \alpha\, \beta\, Area(D) = \pi\, \alpha\, \beta$$

5.3. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano (x, y) determinato dalle disuguaglianze*

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2$$

calcolare servendosi di un opportuno cambio di coordinate il seguente integrale doppio

$$\iint_E \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

SOLUZIONE:

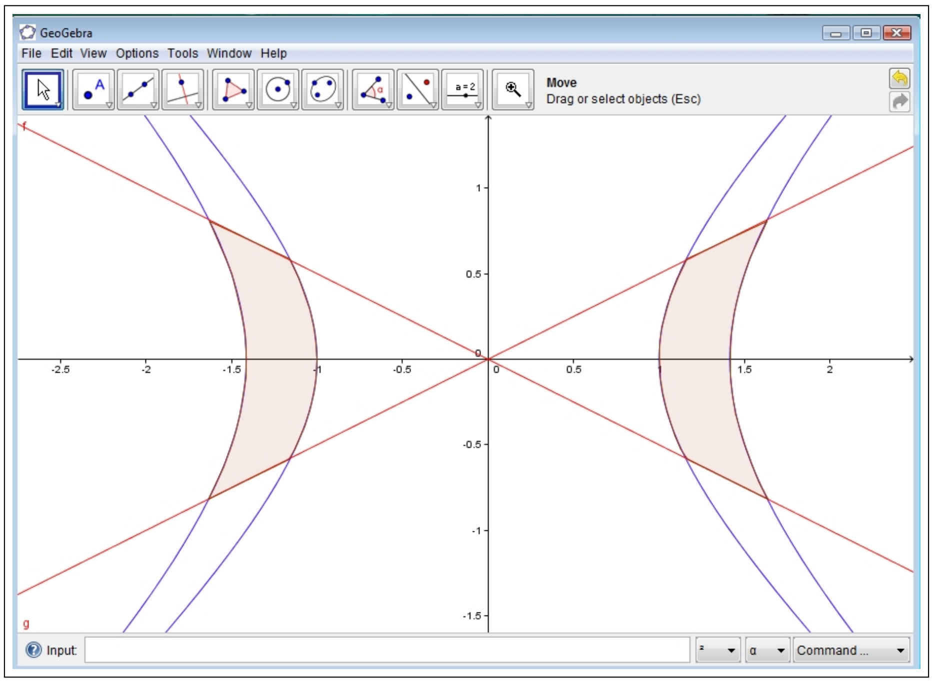

FIGURA 2. $-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2$

La evidente simmetria delle due componenti di E, vedi Figura 2, e l'altrettanto evidente simmetria della funzione integranda consentono di riconoscere che

$$\iint_E \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy \; = \; 2 \iint_{E_+} \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

avendo indicato con E_+ la componente a destra, quella con $x > 0$.

Posto, limitatamente alla parte E_+,

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = u \\ \\ x^2 - y^2 = v \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{v}{1-u^2}} \\ \\ y = u\sqrt{\dfrac{v}{1-u^2}} \end{cases}$$

Riesce, a conti fatti,

$$|J(u,v)| = \left\| \begin{array}{cc} x_u & x_v \\ x + u x_u & u x_v \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} x_u & x_v \\ x & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{2(1-u^2)}$$

L'insieme E é il trasformato del rettangolo del piano (u,v)

$$R: \quad -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq v \leq 2$$

riesce pertanto

$$\iint_{E_+} \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_R \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{v}\, dv \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \log(3)$$

Ne segue pertanto

$$\iint_E \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy \;=\; \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \log(3)$$

5.4. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano determinato dalle disuguaglianze*

$$1 \leq 4x^2 + 3y^2 \leq 2, \quad y \leq x, \quad x \geq 0$$

calcolare servendosi di un opportuno cambio di coordinate il seguente integrale doppio

$$\iint_E \frac{x - y}{4x^2 + 3y^2}\, dx\, dy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\rho\, \cos(\vartheta) \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\, \sin(\vartheta) \end{cases}, \quad J(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\rho$$

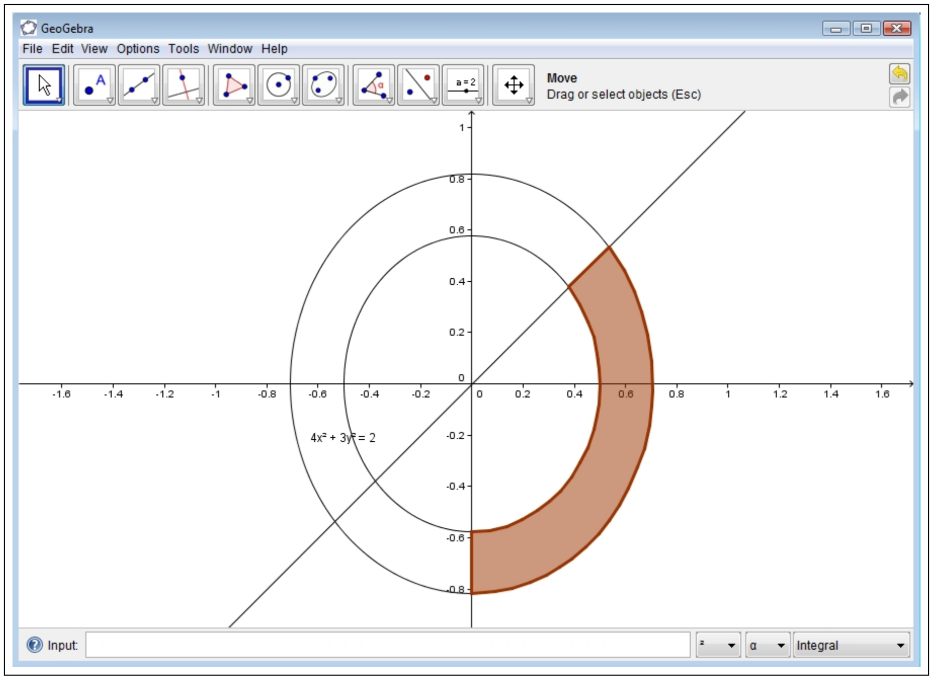

FIGURA 3. $1 \leq 4x^2 + 3y^2 \leq 2, \quad y \leq x, \quad x \geq 0$

mette in corrispondenza la corona ellittica

$$1 \leq 4x^2 + 3y^2 \leq 2$$

del piano (x, y) con il rettangolo

$$1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

del piano (ρ, ϑ)
Le condizioni ulteriori

$$x > 0, \quad y < x$$

si traducono nelle corrispondenti condizioni su ϑ seguenti

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\,\sin(\vartheta) \leq \frac{1}{2}\rho\,\cos(\vartheta)$$

da cui

$$\tan(\vartheta) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \vartheta_0$$

essendo

$$\tan(\vartheta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \vartheta_0 \approx 0.713724$$

Riesce pertanto

$$\iint_E \frac{x-y}{4x^2+3y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\vartheta_0} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3}\cos(\vartheta) - 2\sin(\vartheta)\right)\,d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{12}\left(\sqrt{3}\sin(\vartheta_0) + 2\cos(\vartheta_0) + \sqrt{3}\right)$$

Tenuto conto che, nel nostro caso $\cos(\vartheta_0) \geq 0$, $\sin(\vartheta_0) \geq 0$,

$$\sin^2(\vartheta_0) + \cos^2(\vartheta_0) = 1 \quad \to \quad \begin{cases} \cos(\vartheta_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\vartheta_0)}} & = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \\[2ex] \sin(\vartheta_0) = \dfrac{\tan(\vartheta_0)}{\sqrt{1+\tan^2(\vartheta_0)}} & = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Ne segue

$$\iint_E \frac{x-y}{4x^2+3y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}-1}{12}\left(\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + 2\frac{2}{\sqrt{7}} + \sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{12}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$$

Osservazione 5.1. *Il conto fatto nel precedente integrale é, algebricamente, abbastanza complesso: cambiamento di coordinate, formule trigonometriche, integrazione, manipolazione di radici.*
Il dubbio sulla credibilitá del risultato ottenuto é del tutto legittimo: un controllo ragionevole puó essere quello di stimare l'integrale doppio in modo del tutto empirico:

$Area(E) \quad \times \quad$ **valore della funzione nel centro di** E

- *$Area(E)$ circa $3/8$ dell'area dell'intera corona tra le due ellissi, area che si deduce dalle aree delle due ellissi, e quindi*

$$Area(E) \approx \frac{3}{8}\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\pi \approx 0.3$$

- *valore della funzione integranda f in un punto centrale $f \approx 0.4$*
- *stima che se ne deduce per l'integrale*

$$0.3 \quad \times \quad 0.4 = 0.12$$

- *approssimazione del complesso risultato precedente* 0.15

.... collaudo confortante !

5.5. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano (x, y) determinato dalle disuguaglianze seguenti*

$$x^2 \leq y \leq 2x^2, \quad y^2 \leq x \leq 2y^2$$

calcolare servendosi di un opportuno cambio di coordinate il seguente integrale doppio

$$\iint_E \frac{e^{y/x^2}}{x^2y^2}\, dx\, dy$$

SOLUZIONE:

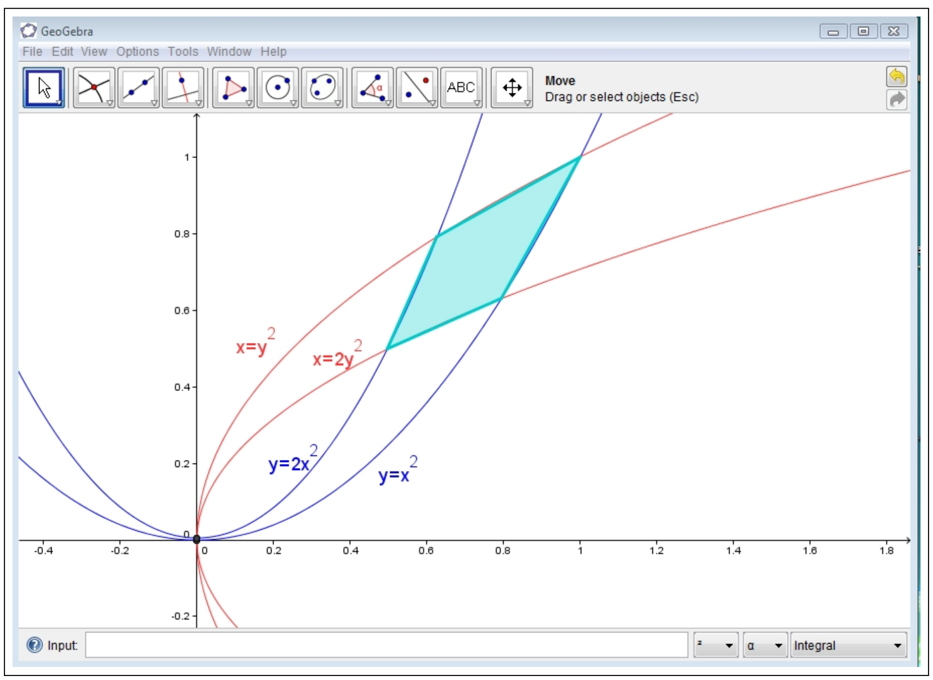

FIGURA 4. $x^2 \leq y \leq 2x^2, \quad y^2 \leq x \leq 2y^2$

La regione E, delimitata da quattro archi di parabole, vedi Figura 4, puó essere descritta anche al modo seguente

$$1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 2$$

limitazioni che suggeriscono il cambio di coordinate

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} = u, \\ \\ \dfrac{x}{y^2} = v, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 \le u \le 2, \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

da cui, ricavando x e y si ha

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{u^2 v}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{uv^2}},$$

La matrice jacobiana é pertanto la seguente

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3u^{5/3}\sqrt[3]{v}} & -\frac{1}{3u^{2/3}v^{4/3}} \\ -\frac{1}{3u^{4/3}v^{2/3}} & -\frac{2}{3\sqrt[3]{u}v^{5/3}} \end{pmatrix}$$

da cui deriva

$$J(u,v) = \frac{1}{3u^2v^2}$$

Dalla regola del cambiamento delle coordinate negli integrali doppi segue pertanto

$$\iint_E \frac{e^{y/x^2}}{x^2y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 du \int_1^2 u^2v^2e^u \frac{1}{3u^2v^2}\, dv =$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^2 e^u du = \frac{e^2 - e}{3}$$

5.6. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano (x, y) delimitato dalle seguenti quattro rette*

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y + x = 2, \quad y + 2x = 2$$

calcolare servendosi di un opportuno cambio di coordinate il seguente integrale doppio $\iint_E \dfrac{\log(x)}{y^3}\, dx\, dy$

SOLUZIONE:

Le condizioni che determinano l'insieme E possono essere anche scritte nella forma seguente

$$1 \le \frac{y}{x} \le 2, \quad -2 \le \frac{y-2}{x} \le -1$$

che suggerisce il cambio di coordinate

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x}, \\ \\ v = \dfrac{2-y}{x}, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 \le u \le 2, \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

Da tale scelta si ricavano

$$x = \frac{2}{u+v}, \quad y = \frac{2u}{u+v}$$

e, quindi,

$$J(u,v) = \frac{4}{(u+v)^3}$$

$$\iint_E \frac{\log(x)}{y^3}\, dx\, dy = \int_1^2 du \int_1^2 \log\left(\frac{2}{u+v}\right)\frac{(u+v)^3}{2^3u^3}\frac{4}{(u+v)^3}dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 \log\left(\frac{2}{u+v}\right)\frac{1}{u^3}dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^3}\int_1^2 (\log(2) - \log(u+v))\, dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(u+1)\log(u+1) - (u+2)\log(u+2) + 1 + \log(2)}{u^3}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} + \log\left(\frac{16\,.\,2^{5/8}}{27\,.\,3^{3/8}}\right)\right) \approx -0.0635054$$

Osservazione 5.2. *Considerato che il dominio E si trova nel semipiano $x \leq 1$ la funzione integranda é negativa in E e, quindi c'é da attendersi un valore negativo per l'integrale.*
Considerato che l'area di E, assimilabile al quadrilatero di vertici

$$(1,1), \quad (0.79, 0.63), \quad (0.5, 0.5), \quad (0.53, 0.79)$$

ha area ≈ 0.08.
Considerato che la funzione integranda nel punto centrale vale

$$\frac{\log(0.75)}{0.75^3} = -0.68$$

Si trova un valore atteso per l'integrale

$$Area \times (-0.68) = -0.05$$

....ragionevolmente simile al valore calcolato !

5.7. Esercizio. *Sia E l'insieme del piano (x,y) delimitato dalle seguenti quattro curve*

$$y + 2x = 0, \quad y + 2x = 1, \quad y - x^2 = 0, \quad y - x^2 = 1$$

calcolare servendosi di un opportuno cambio di coordinate il seguente integrale doppio

$$\iint_E (x+y)\, dx\, dy$$

SOLUZIONE:

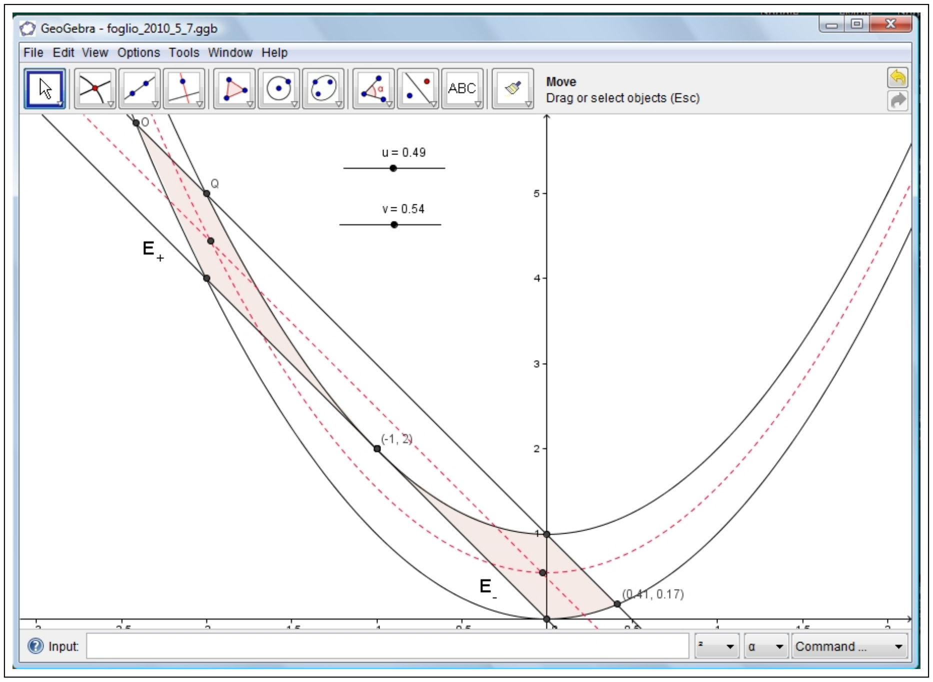

FIGURA 5. $y + 2x = 0$, $y + 2x = 1$, $y - x^2 = 0$, $y - x^2 = 1$

Indicate le limitazioni che definiscono E come

$$0 \leq y + 2x \leq 1, \quad 0 \leq y - x^2 \leq 1$$

si riconosce il cambio di coordinate collegato

$$\begin{cases} u = y + 2x, \\ v = y - x^2, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq u \leq 1, \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

che produce

$$\boxed{1} : \begin{cases} y = 2 + u - 2\sqrt{1 + u - v}, \\ x = -1 + \sqrt{1 + u - v} \end{cases} \qquad \boxed{2} : \begin{cases} y = 2 + u + 2\sqrt{1 + u - v}, \\ x = -1 - \sqrt{1 + u - v} \end{cases}$$

La prima coppia di funzioni $\boxed{1}$: stabilisce un cambiamento di coordinate tra E_-, la parte piú bassa di E, e il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ del piano (u, v).
La seconda coppia di funzioni $\boxed{2}$: stabilisce un cambiamento di coordinate tra E_+, la parte piú alta di E, e il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ del piano (u, v).

Le due matrici jacobiane delle trasformazioni $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} & -\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} \\ \\ 1-\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} & \frac{1}{\sqrt{u-v+1}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} & +\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} \\ \\ 1+\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} & -\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} \end{pmatrix}$$

Il modulo del loro determinante é lo stesso e vale

$$|J(u,v)| = \frac{1}{2\sqrt{u-v+1}}$$

La formula del cambiamento delle coordinate negli integrali doppi fornisce pertanto, indicate con E_- ed E_+ la parte inferiore e la parte superiore di E

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy = \iint_{E_-} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{E_+} (x+y)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^1 du \int_0^1 \left(1+u-\sqrt{1+u-v}\right)\,\frac{1}{2\sqrt{1+u-v}}\,dv +$$

$$+\int_0^1 du \int_0^1 \left(1+u+\sqrt{1+u-v}\right)\,\frac{1}{2\sqrt{1+u-v}}\,dv =$$

da cui, per linearitá,

$$= \int_0^1 du \int_0^1 \frac{1+u}{\sqrt{1+u-v}}\,dv = \frac{4}{15}\left(12\sqrt{2}-11\right)$$

Osservazione 5.3. *La credibilitá del valore trovato puó essere collaudata stimando*

- *l'area di E* $\quad\approx 1.1$
- *un valor medio della funzione integranda $x+y$ su E stimabile a circa* 1.5
- *il valore atteso per l'integrale sará pertanto*

$$1.1\,\times\,1.5 \approx 1.6$$

Il valore trovato é invece

$$\frac{4}{15}\left(12\sqrt{2}-11\right) \approx 1.59215$$

.... risultato credibile !