ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

19 novembre 2010

4.1. Esercizio. *Assegnato l'insieme*

$$S \subseteq \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le \pi/2, \; 0 \le y \le \pi$$

calcolare

$$\iint_S \sin(x+y)\, dx\, dy.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il dominio di integrazione S assegnato é un rettangolo: quindi esistono due formule di riduzione

$$\iint_S \sin(x+y)\, dx\, dy = \begin{cases} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi} \sin(x+y) dy \\ \\ \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx \end{cases}$$

Prima formula:

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi} \sin(x+y) dy = \int_0^{\pi/2} \left\{ -\cos(x+y)|_{y=0}^{y=\pi} \right\} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos(x+\pi) + \cos(x)\right) dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \boxed{2}$$

Seconda formula:

$$\int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx = \int_0^{\pi} \left\{ -\cos(x+y)|_{x=0}^{x=\pi/2} \right\} dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \{-\cos(y+\pi/2) + \cos(y)\}\; dy = \int_0^{\pi} \{-\sin(y) + \cos(y)\}\; dy = \boxed{2}$$

Le due formule danno naturalmente lo stesso valore, $\boxed{2}$ per l'integrale doppio che esprimono.
Geometricamente, vedi Figura 1, il valore trovato **NON** corrisponde al volume del solido, tenuto presente che la funzione integranda $\sin(x+y)$ non é positiva su tutti i punti di S.

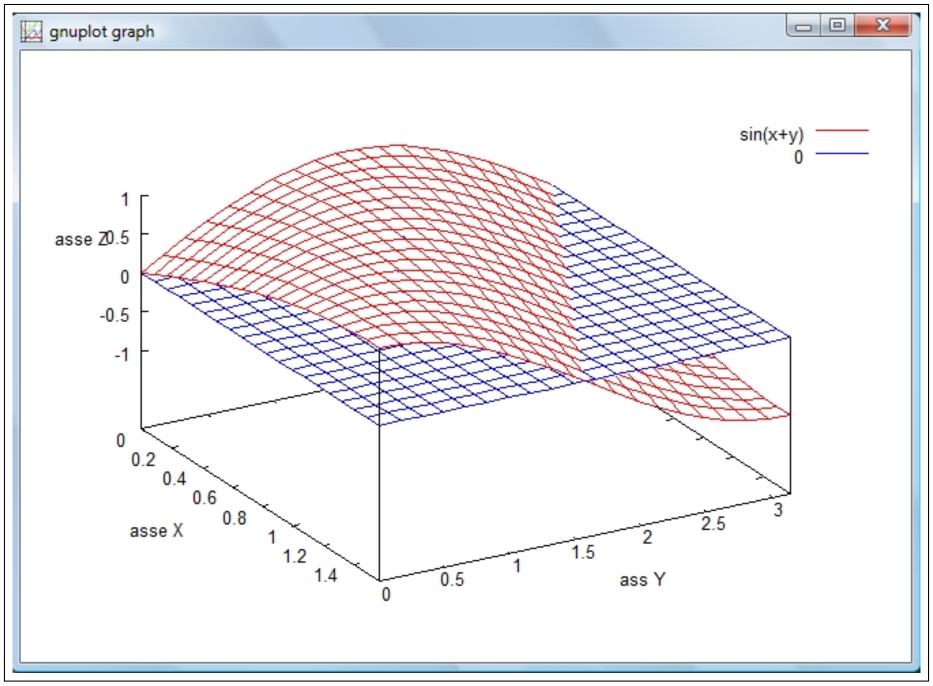

FIGURA 1. Il grafico di $z = \sin(x + y)$ e del piano $z = 0$

4.2. Esercizio. *Detto S il solido di $\mathbb{R}^3$ definito da*

$$0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)$$

esprimere il suo volume come un opportuno integrale doppio.

SOLUZIONE:

Le condizioni

$$0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)$$

che determinano S implicano anche

$$0 \leq 1 - (x^2 + y^2)$$

e quindi

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Il solido S assegnato é pertanto l'insieme dei punti $P = (x, y, z)$ le cui coordinate soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

Il volume di S é pertanto

$$V = \iint_C \left(1 - (x^2 + y^2)\right)\, dx\, dy$$

avendo indicato con C il cerchio $x^2+y^2 \leq 1$.
Tenuto presente che il cerchio C é un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y

$$C := \begin{cases} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases} \end{cases}$$

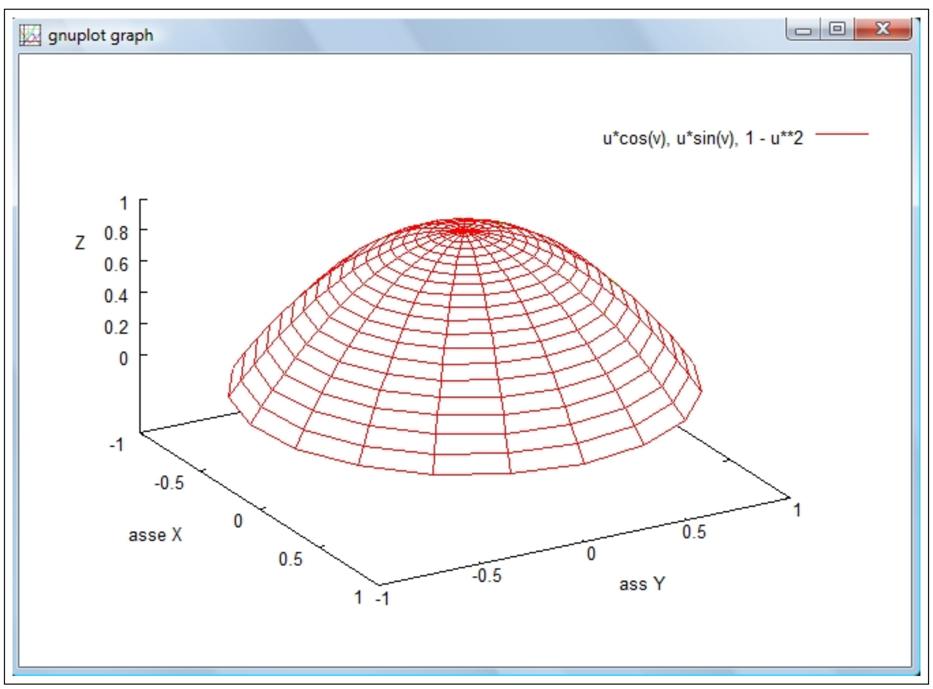

FIGURA 2. $0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)$

l'integrale doppio é calcolabile con due diverse formule di riduzione

$$\iint_C \left(1-(x^2+y^2)\right)\, dx\, dy = \begin{cases} \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-(x^2+y^2))\, dy \\ \\ \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1-(x^2+y^2))\, dx \end{cases}$$

che conducono, entrambe, allo stesso integrale

$$\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{8}{3}\int_{0}^{1}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

che, con la sostituzione

$$x = \sin(\xi),\ \ 0 \le \xi \le \pi/2$$

si traduce in

$$\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4(\xi)\,d\xi$$

Tenuto conto che

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4(\xi)\,d\xi = \int_0^{\pi/2}\cos^2(\xi)(1-\sin^2(\xi))d\xi = \int_0^{\pi/2}\cos^2(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\xi)d\xi$$

si riconosce che

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4(\xi)\,d\xi = \frac{3}{16}\pi$$

da cui

$$V = \iint_C \big(1-(x^2+y^2)\big)\,dx\,dy = \frac{8}{3}\,\frac{3}{16}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

Il numero trovato corrisponde al volume del solido a forma di cupola rotonda in Figura 2.

Osservazione 4.1. *Il volume richiesto puó essere calcolato anche immaginando di*

- *suddividere verticalmente la cupola con una somma di cilindri, vedi Figura 3,*
- *calcolare il volume di ciascuno di essi,*
- *sommare...*

Ad ogni quota z il cilindro corrispondente

$$x^2 + y^2 = 1 - z$$

ha quindi raggio

$$\rho(z) = \sqrt{1-z}$$

quindi area di base

$$\pi\rho^2(z) = \pi(1-z)$$

detta $\triangle z$ lo spessore, in altezza, di ciascun cilindro i volumi saranno $\pi(1-z)\triangle z$ e quindi la loro somma

$$\sum z\pi(1-z)\triangle z$$

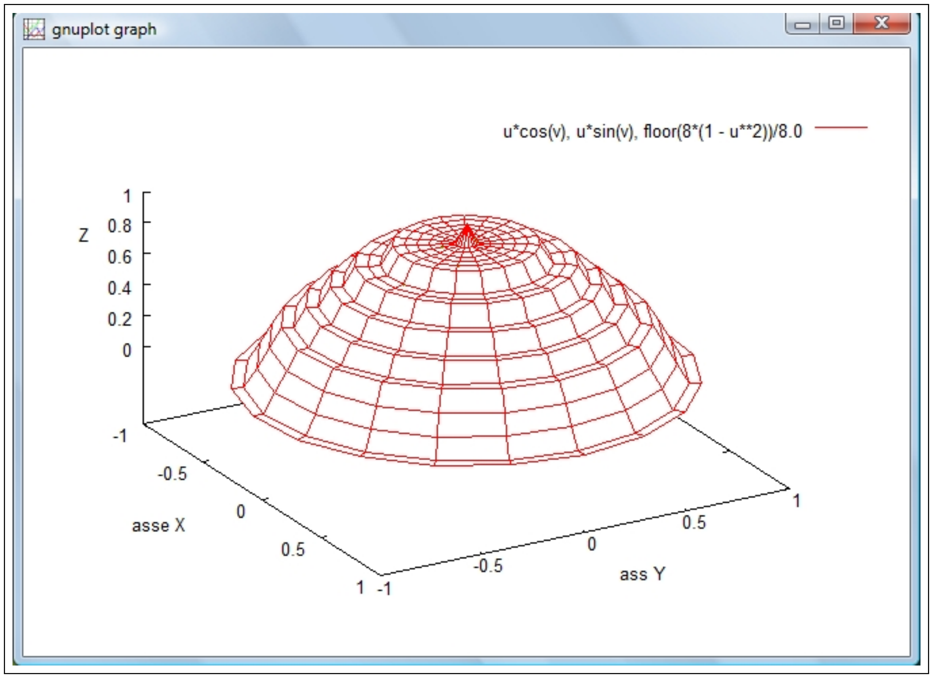

FIGURA 3. S approssimato con somme di cilindri.

evidentemente tende, al diminuire dello spessore $\triangle z$ *scelto, al limite*

$$\int_0^1 \pi(1-z)\,dz = \frac{1}{2}\pi$$

Valore perfettamente in accordo con quanto precedentemente trovato. Il procedimento illustrato rientra, in parte, in una serie di osservazioni genericamente indicate con il nome di Principio di Cavalieri : incontreremo tale tecnica in particolare su tutti i solidi ottenuti per rotazione[1].

4.3. Esercizio. *Disegnare l'insieme* $S \subset \mathbb{R}^2$

$$S: \ 3 \leq x \leq 5, \ \frac{1}{x} \leq y \leq x$$

e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_S \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy.$$

SOLUZIONE:

L'integrale doppio si calcola secondo la formula di riduzione

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Solidi_di_rotazione

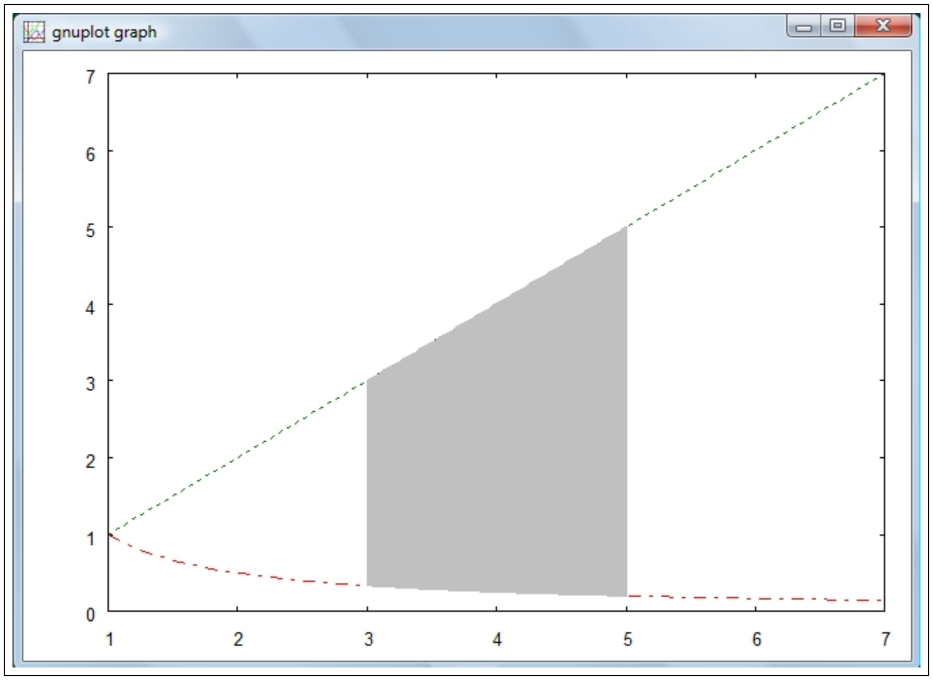

FIGURA 4. $S:\ 3 \le x \le 5,\ \dfrac{1}{x} \le y \le x$

$$I = \iint_S \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_3^5 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy =$$

$$= \int_3^5 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=3}^{x=5} = 128$$

Il valore trovato é il volume del solido costruito su S e coperto dal grafico della funzione $z = x^2/y^2$.

4.4. Esercizio. *Disegnare l'insieme S dei punti del piano (ϑ, r) tali che $-\pi \le \vartheta \le \pi,\ \sin(\vartheta) \le r \le 1$ e calcolare*

$$I = \iint_S r\,dr\,d\vartheta.$$

SOLUZIONE:

I nomi attribuiti alle due variabili, (ϑ, r) non obbligano ad alcuna interpretazione polare o altra: le lettere scelte per le coordinate dei punti del piano, anche se tradizionalmente utilizzano pochi caratteri standard $(x, y,\ u, v,$ ecc.) possono essere qualsiasi.

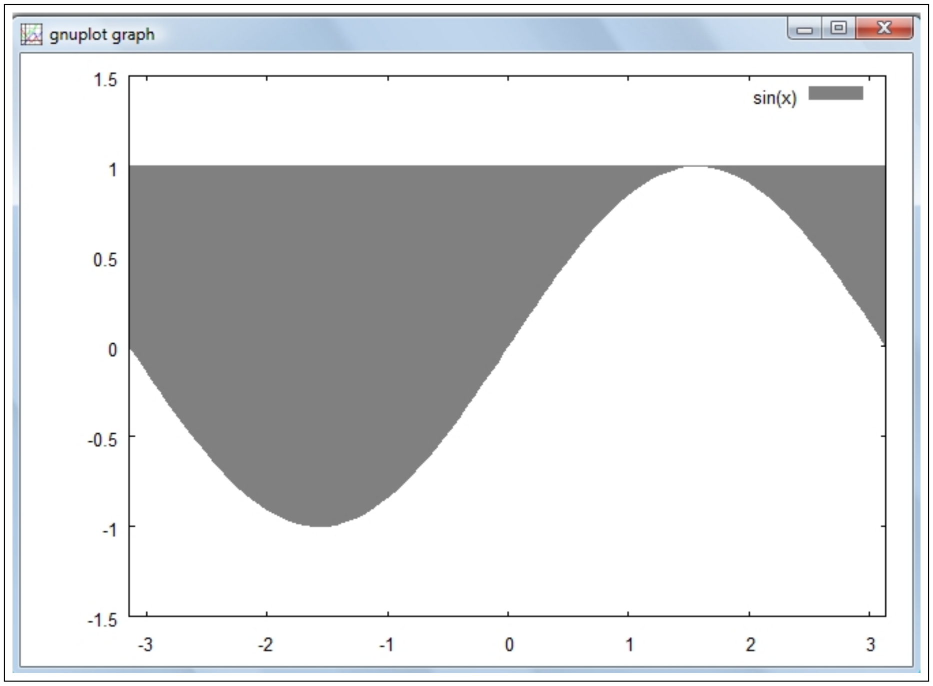

FIGURA 5. $S: \ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \ \sin(\vartheta) \leq r \leq 1$

É del resto abitudine comune, allorché si prepara un programma per computer, nominare le variabili con nomi spesso lunghi e comunque non usuali: sotto quest0 punto di vista i caratteri (ϑ, r) sono del tutto legittimi.
Il dominio S assegnato é naturalmente quindi un dominio normale rispetto all'asse ϑ: se avessimo usato i caratteri tradizionali (x, y) avremmo scritto

$$S: \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad \sin(x) \leq y \leq 1$$

$$I = \iint_S r\, dr\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{\sin(\vartheta)}^{1} r dr = \frac{\pi}{2}$$

4.5. Esercizio. *Sia* $D = \{2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$

- *disegnare l'insieme* D *e calcolarne l'area* $A(D)$,
- *calcolare le coordinate del baricentro*

$$x_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D x\, dx\, dy, \quad y_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\, dx\, dy$$

- *calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y*

$$I = \iint_D x^2\, dx\, dy$$

SOLUZIONE:

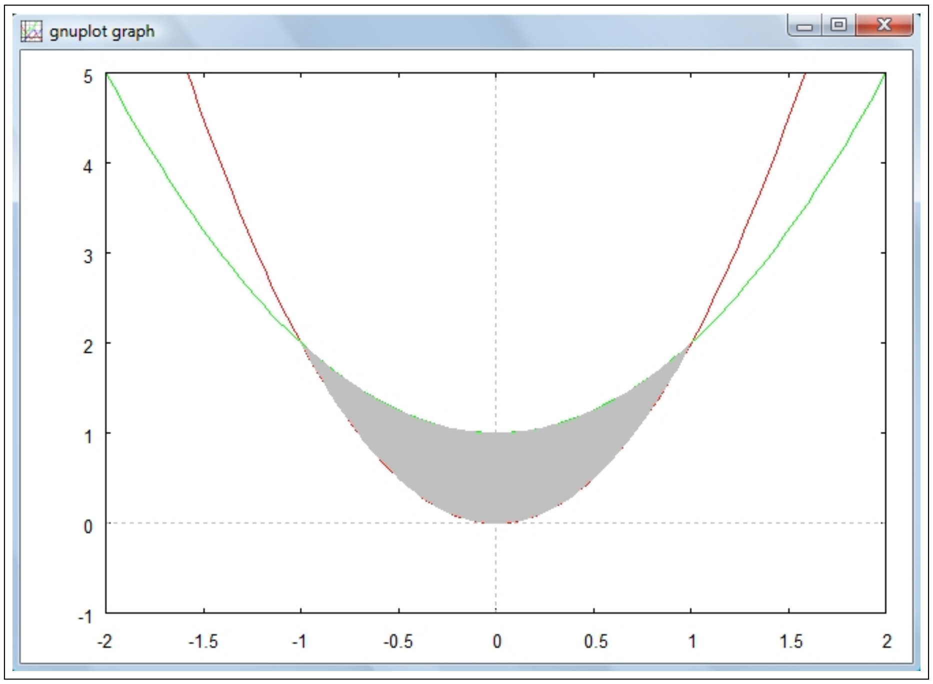

FIGURA 6. $D = \{2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$

$$A(D) = \iint_D 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

$$\iint_D x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} x\, dy = \int_{-1}^{1} x(1 - x^2) dx = 0$$

$$\iint_D y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} y\, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - 3x^4 + 2x^2)\, dx = \frac{16}{15}$$

Da cui seguono le coordinate del baricentro

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{4}{5}$$

punto interno a D, in una posizione di evidente simmetria...!

$$I = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} x^2\,dy = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \frac{4}{15}$$

Osservazione 4.2. *Il valore 4/15 trovato per l'ultimo integrale puó essere interpretato in modi diversi:*

- *puó essere letto come il volume del capannone costruito sul dominio D e coperto dal grafico della funzione $z = x^2$,*
- *puó essere letto come la massa della lamina D supposta di densitá δ non costante $\delta(x,y) = x^2$,*
- *puó essere letta come il momento di inerzia della lamina D di densitá costante $\delta_0 = 1$ relativo all'asse y.*

4.6. Esercizio. *Sia* $D : \{0 \le x \le 1,\ \ x \le y \le 1\}$

- *disegnare D*
- *calcolare l'integrale doppio* $\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Il dominio D é il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ e come tale riesce normale rispetto ad entrambi gli assi

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases}, \qquad D = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

Pertanto l'integrale doppio é calcolabile con due diverse formule di riduzione

$$\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy = \begin{cases} \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy \\ \\ \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx \end{cases}$$

La prima delle due formule di riduzione non offre vantaggio, stante la difficoltá nel calcolare il primo dei due integrali semplici

$$\int_x^1 e^{-y^2} dy = ???$$

La seconda invece produce un ottimo vantaggio, infatti

$$\int_0^y e^{-y^2} dx = y\,e^{-y^2} \quad \to \quad \iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y\,e^{-y^2}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Il valore trovato $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ rappresenta il volume del capannone costruito sul triangolo D e coperto con il grafico della funzione non negativa $z=e^{-y^2}$.

4.7. Esercizio. *Detta* $[a]$ *la funzione parte intera calcolare l'integrale doppio della funzione a scala* $\varphi(x,y)=[x]\,[y]$ *esteso al quadrato* $Q:=[0,3]\times[0,3]$.

SOLUZIONE:

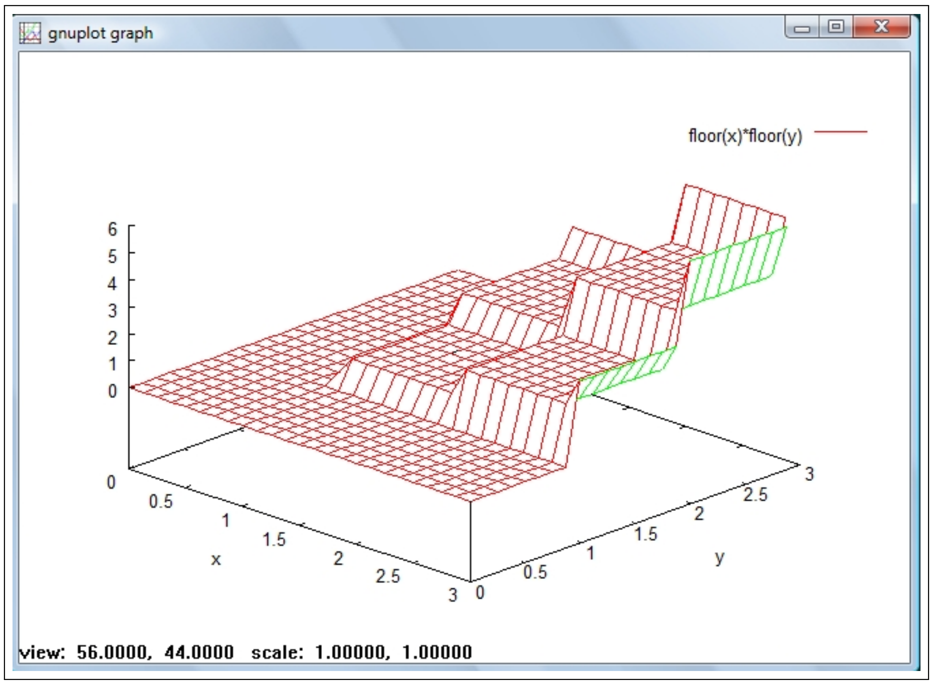

FIGURA 7. $\varphi(x,y)=[x]\,[y],\ Q:=[0,3]\times[0,3]$.

L'interpretazione di volume che l'integrale doppio delle funzioni non negative offre permette immediatamente, vedi Figura 7 di riconoscere che

$$\iint_Q [x]\,[y]\,dx\,dy = 1+2+2+4 = 9$$