ANALISI VETTORIALE

Soluzione esercizi

12 novembre 2010

3.1. Esercizio.

- *Determinare la distanza del punto* $Q = (3, 4)$ *dalla retta* r : $x + y = 3$*, ovvero determinare il minimo della funzione*
$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$
al variare di (x, y) *sull'insieme* E_0 *definito dall'equazione* $x + y = 3$.
- *Determinare la distanza dell'origine* $(0, 0, 0)$ *dal piano* p : $x + 2y + 3z = 14$ *come minimo della funzione*
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
sul piano p.
- *Determinare la distanza del punto* $(1, 2, 3)$ *dalla retta determinata come intersezione dei due piani*
$$p_1 : \ x + y + z = 0, \quad p_2 : \ x - y - 2z = 1$$

SOLUZIONE:

Punto-retta

La risposta é ottenibile per via geometrica, vedi Figura 1, calcolando l'intersezione P tra r e la retta per $Q = (3, 4)$ perpendicolare a r
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (x-3) - (y-4) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P = (1, 2)$$
e quindi calcolando la distanza $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$.
In Figura 2 si leggono alcune linee di livello della $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$, riconoscendo che risulta tangente al vincolo $x+y = 3$ la linea corrispondente ad un valore opportuno $c_0 \sim 3$

La tecnica collegata al problema di minimo vincolato conduce invece alla lagrangiana
$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \lambda(x + y - 3)$$
e quindi al sistema formato dalle sue derivate
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}} + \lambda = 0 \\ \dfrac{y-4}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}} + \lambda = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - 3 = y - 4 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

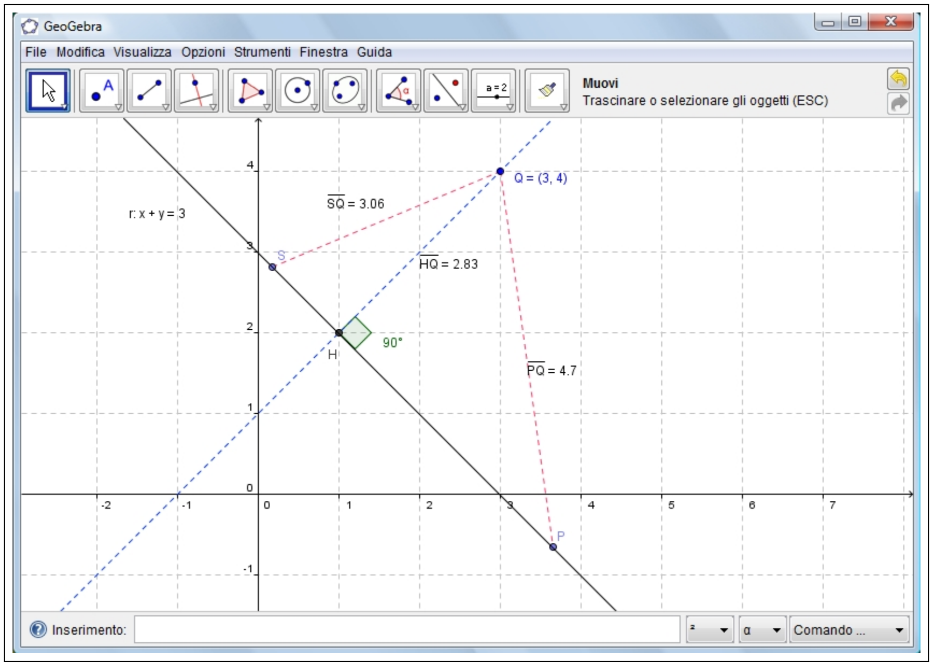

FIGURA 1. La risposta é ottenibile per via geometrica

che determina l'unico punto $P = (1, 2)$ in cui puó cadere o il minimo o il massimo: tenuto che in tale punto riesce

$$f(1, 2) = 2\sqrt{2}$$

che non é certamente il massimo (basta pensare a punti su r molto, molto distanti da Q...) se ne conclude, in accordo con quanto giá ricavato dalla semplice costruzione geometrica

$$\min_{(x,y)\in r} f = 2\sqrt{2}$$

La determinazione del minimo richiesto poteva del resto essere ottenuta riducendosi ad un problema in una sola variabile: l'equazione infatti

$$x + y = 3$$

equivale a

$$y = 3 - x$$

e pertanto

$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (3-x-4)^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 10}$$

Tenuto conto che la derivata di $\sqrt{2x^2 - 4x + 10}$ si annulla solo per $x_0 = 1$ se ne deduce che in tale punto si raggiunge il minimo pari a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

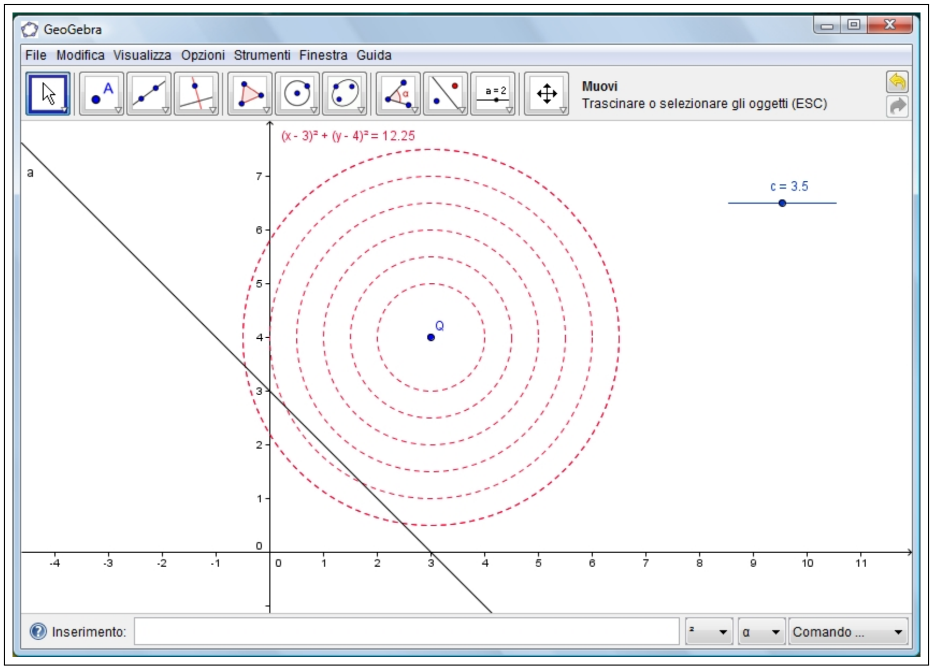

FIGURA 2. Le linee di livello della $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

Osservazione 3.1. *Il problema di minimo proposto si riferiva ad un insieme $S: \ x+y=3$, una retta, chiuso ma non limitato.*
L'esistenza del minimo quindi non era garantita dal Teorema di Weierstrass che si riferisce al caso di insiemi CHIUSI E LIMITATI.
Il fatto che, tuttavia, esistesse in questo caso il minimo é certamente collegata a due fatti:

- *la funzione $f(x,y) = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$ di cui si cercava il minimo é non negativa, quindi limitata inferiormente,*
- *la funzione $f(x,y)$ diverge positivamente al divergere di x^2+y^2, cioé al tendere all'infinito del punto (x,y).*

Punto-piano

Prescindendo dal possibile approccio geometrico [1] , consideriamo direttamente la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+3z-14)$$

[1]Costruzione della retta per l'origine perpendicolare al piano, determinazione dell'intersezione H, distanza di H dall'origine.

si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2x + 3\lambda = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

da cui l'unico punto $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 3$.
Il valore, certamente il minimo per f é pertanto 14.

Un'altra strategia poteva essere quella di esplicitare dall'equazione $x + 2y + 3z - 14 = 0$ del vincolo una variabile, ad esempio

$$x = 14 - 2y - 3z$$

e cercare i punti di estremo della funzione

$$g(x, y) = (14 - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2$$

al variare di $(y, z) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} g_y = -4(14 - 2y - 3z) + 2y = 0 \\ g_z = -6(14 - 2y - 3z) + 2z = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Il punto $(2, 3)$ é l'unico punto critico di g: in esso cade quindi il minimo[2]: riesce

$$g(2, 3) = 1 + 2^2 + 3^2 = 14$$

lo stesso valore ricavato precedentemente come minimo di f sul piano assegnato.

Punto-intersezione due piani

Scriviamo direttamente la lagrangiana, che in questo caso include due parametri λ e μ:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + \lambda(x+y+z) + \mu(x-y-2z-1)$$

[2] É evidente che g non ha massimo in $\mathbb{R}^2$

che da luogo al sistema

$$\begin{cases} 2(x-1)+\lambda+\mu=0 \\ 2(y-2)+\lambda-\mu=0 \\ 2(z-3)+\lambda-2\mu=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ \\ y=-\dfrac{2}{7} \\ \\ z=-\dfrac{1}{7} \\ \\ \lambda=\dfrac{20}{7} \\ \\ \mu=-\dfrac{12}{7} \end{cases}$$

La distanza minima richiesta é pertanto quella tra i due punti

$$(1,2,3), \qquad \left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$$

quindi

$$\sqrt{\left(1-\frac{3}{7}\right)^2+\left(2+\frac{2}{7}\right)^2+\left(3+\frac{1}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{108}{7}}\approx 3.93$$

Una strategia alternativa era quella di ricavare esplicitamente le equazioni parametriche della retta intersezione dei due piani

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-2z=1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=(t+1)/2 \\ y=(-3t-1)/2 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Ci si riduce quindi a cercare il minimo della funzione

$$g(t)=((t+1)/2-1)^2+((-3t-1)/2-2)^2+(t-3)^2=\frac{7t^2}{2}+t+\frac{31}{2}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Tenuto conto che

$$g'(t)=7t+1=0 \quad \to \quad t=-\frac{1}{7}$$

Da cui il minimo

$$\sqrt{g\left(-\frac{1}{7}\right)}=\sqrt{\frac{108}{7}}$$

3.2. Esercizio. *Determinare il minimo e il massimo di*

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2)$$

sul cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

SOLUZIONE:

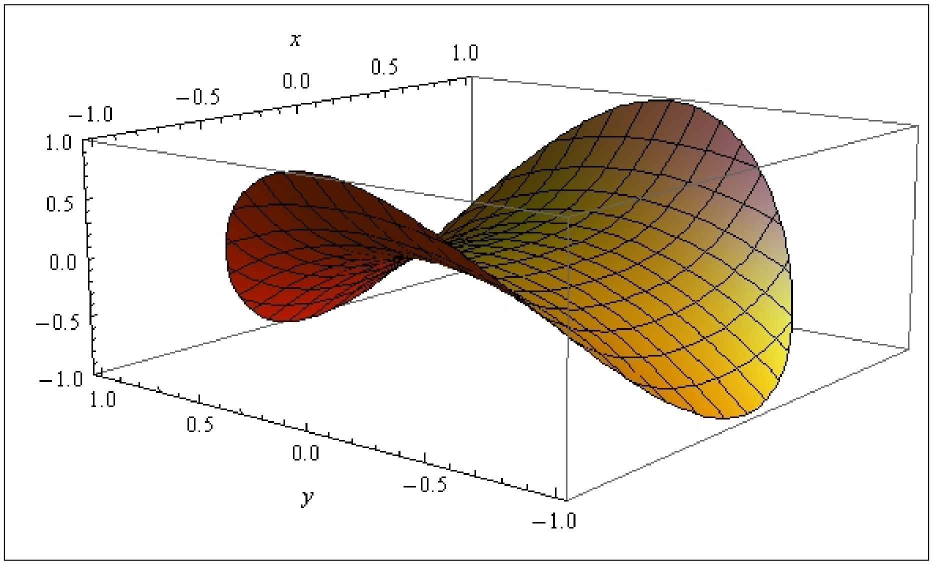

FIGURA 3. $u = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2)$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$

Il problema riguarda punti interni del cerchio e punti di frontiera, cioé punti della circonferenza:

- il primo conduce alla ricerca dei punti critici (annullamento delle due derivate parziali prime) della funzione f

  $$\begin{cases} u_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 - y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ u_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 - y^2) - 2y\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

  Il sistema non ha soluzioni diverse dall'origine.

  Nell'origine le due derivate parziali (calcolate direttamente secondo i corrispondenti rapporti incrementali) sono nulle.

  Nell'origine riesce $f(0, 0) = 0$: dalla Figura 3 si riconosce che l'origine é punto di sella.

- Il secondo riguarda un problema di minimo vincolato (x, y) sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$: tenuto conto che sulla circonferenza riesce $f(x, y) = x^2 - y^2$ é evidente che il massimo, 1, é raggiunto nei due punti $(-1,0)$ e $(1,0)$, mentre il minimo, -1, é raggiunto nei due punti $(0,-1)$ e $(0,1)$

Se ne conclude che il minimo e il massimo della $u = \sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)$ sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$ sono, rispettivamente -1 e 1 assunti entrambi sulla circonferenza frontiera.

Un modo alternativo di risolvere era rappresentare i punti del piano con le coordinate polari:

$$\begin{array}{lcl} x^2+y^2 \leq 1 & \Leftrightarrow & \rho \leq 1 \\ u = \sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2) & \Leftrightarrow & u = \rho^3 \cos(2\vartheta) \end{array}$$

da cui é evidente che, sull'insieme assegnato,

$$\min u = -1, \qquad \max u = 1$$

3.3. Esercizio. *Siano* $S: \ x+y-1=0$ *ed* $f(x,y) = x^2y^2$

- *valutare se* S *sia o meno chiuso e limitato in* $\mathbb{R}^2$
- *provare che* f *non ha massimo su* S
- *determinare il minimo di* f *su* S.

SOLUZIONE:

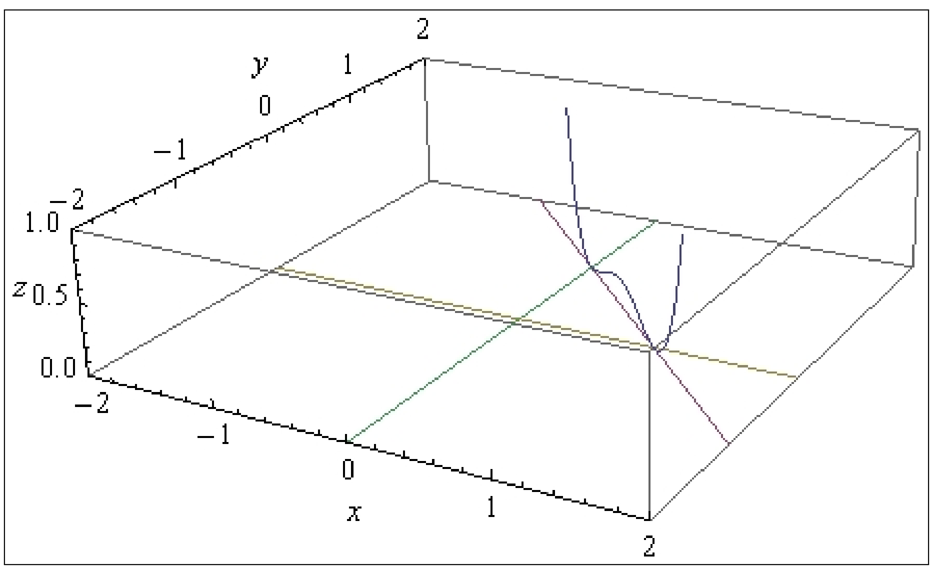

FIGURA 4. $S: \ x+y-1=0$ ed $f(x,y) = x^2y^2$

L'insieme S, una retta del piano é chiuso ma non limitato.
f non ha massimo: basta calcolare f su punti della retta ma di coordinate.... molto grandi !

Il minimo di f sulla retta S é certamente 0, infatti f é non negativa e sulla retta S ci sono due punti $(1,0)$ e $(0,1)$ su cui la funzione f produce il valore zero.

Un modo alternativo di risolvere l'esercizio era ricavare dall'equazione $x+y-1=0$ del vincolo $y=1-x$ e, quindi, studiare la funzione non negativa

$$g(x) = x^2(1-x)^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Essa ha, ovviamente, minimo 0 e non ha massimo essendo illimitata superiormente.

3.4. Esercizio. *Determinare il massimo e il minimo della funzione $u = x^2y^2z^2$ sulla sfera*

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Consideriamo la lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$$

Ne deriva il sistema

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \\ 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = R^2 \end{cases}$$

Ne segue

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{R^2}{3}$$

Il massimo richiesto é pertanto

$$\left(\frac{R^2}{3}\right)^3$$

La relazione di massimo trovata implica la nota disuguaglianza

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

che confronta la media geometrica di tre numeri positivi con la loro media aritmetica.

Disuguaglianza[3] che, con lo stesso metodo si riconosce anche su piú di tre numeri, dando luogo alla

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

valida qualunque siano gli $a_i \geq 0$.

3.5. Esercizio. *Calcolare massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUZIONE:

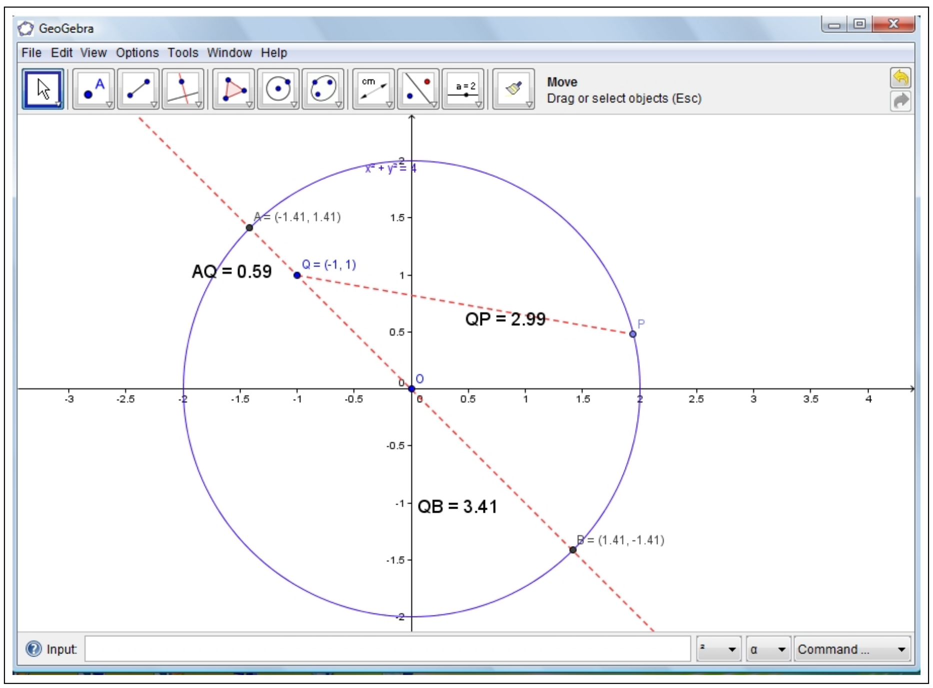

FIGURA 5. $S: \ x + y - 1 = 0$ ed $f(x,y) = x^2 y^2$

La $f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2$ rappresenta il quadrato della distanza del punto (x,y) dal punto $(-1,1)$: il problema chiede il minimo e il massimo limitatamente ai punti $P = (x,y)$ appartenenti alla circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 2$.

[3] In questa disuguaglianza rientra la ben nota

$$|a||b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

La Figura 5 fa capire perfettamente quali siano i punti della circonferenza che hanno distanza minima e massima da $(-1, 1)$: il minimo e il massimo di f sono pertanto i quadrati delle due distanze estremali riportate in Figura 5.

Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Ne deriva il sistema

$$\begin{cases} 2(x + 1) + 2\lambda x = 0 \\ 2(y - 1) + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

che implica

$$x = -\frac{1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad 2\left(\frac{1}{1 + \lambda}\right) = 4$$

da cui i due punti

$$x_0 = \sqrt{2}, y_0 = -\sqrt{2}, \quad x_1 = -\sqrt{2}, y_1 = \sqrt{2}$$

Tenuto conto che

$$f(x_0, y_0) = 6 + 4\sqrt{2}, \quad f(x_1, y_1) = 6 - 4\sqrt{2}$$

rispettivamente il massimo e il minimo richiesti.
Si noti che, riferendosi alla Figura 5, le distanze indicate devono poi essere elevate al quadrato...