ANALISI VETTORIALE

Soluzione scritto

18 febbraio 2011

1.1. Esercizio. *Detta* $f(x,t) = e^{xt}$

- *calcolare* $G(x) = \displaystyle\int_{5x}^{x^2} f'_x(x,t)\,dt$
- *posto* $F(x) = \displaystyle\int_{5x}^{x^2} f(x,t)\,dt$ *calcolare* $F'(x) - G(x)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto che

$$f(x,t) = e^{xt} \quad \to \quad f'_x(x,t) = t\,e^{xt}$$

l'integrale indefinito da calcolare per determinare $G(x)$ é il seguente:

$$\int t\,e^{xt}\,dt = \frac{1}{x}\int t\left(e^{xt}\right)'dt = \frac{t}{x}e^{xt} - \frac{1}{x}\int e^{xt}dt = \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{xt}$$

Si ha pertanto

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{x^3} - \left(\frac{5x}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{5x^2}$$

da cui, semplificando,

$$G(x) = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)e^{x^3} - \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)e^{5x^2}$$

La regola di derivazione degli integrali dipendenti da parametri produce per $F(x)$:

$$F'(x) = \int_{-5x}^{x^2} f'_x(x,t)\,dt + f(x,x^2)\,2x - f(x,5x)\,5 = \\ = G(x) + 2xe^{x^3} - 5e^{5x^2} \tag{1}$$

ovvero

$$F'(x) - G(x) = 2xe^{x^3} - 5e^{5x^2}$$

Il risultato poteva essere ottenuto, ignorando la formula (1), anche calcolando esplicitamente

$$F(x) = \frac{1}{x}\left(e^{x^3} - e^{5x^2}\right)$$

e derivando l'espressione ottenuta:

$$F'(x) = \frac{(3x^2 e^{x^3} - 10x e^{5x^2})x - e^{x^3} + e^{5x^2}}{x^2}$$

Calcolando direttamente la differenza

$$\begin{aligned} F'(x) - G(x) &= \frac{(3x^2 e^{x^3} - 10x e^{5x^2})x - e^{x^3} + e^{5x^2}}{x^2} \\ &\quad - \left(x - \tfrac{1}{x^2}\right) e^{x^3} + \left(5 - \tfrac{1}{x^2}\right) e^{5x^2} \end{aligned}$$

dopo aver semplificato si ottiene l'espressione precedentemente trovata.

$$2xe^{v^3} - 5e^{5x^2}$$

.

1.2. Esercizio. *Indicata con* $f(x) = x\, e^{-x^2}$:

- *calcolare l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$*,*
- *provare che esiste l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx$*,*
- *determinare per quali* $\alpha > 0$ *riesce convergente la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f(n))^{\alpha}.$$

SOLUZIONE:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M x\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{M \to +\infty} \left(1 - e^{-M^2}\right) = \frac{1}{2}$$

L'esistenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx$ deriva, vedi Figura 1, dalle considerazioni seguenti:

- riesce inoltre, come si verifica facilmente tramite la ricerca del massimo,

$$\forall x \geq 0 : \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2} < 1$$

- ne segue quindi che $\forall x \geq 0 \;\; f^2(x) \leq f(x)$
- la funzione $f(x)$ é dotata di integrale improprio su $(0, +\infty)$,
- se ne deduce quindi, per confronto, che anche $f^2(x)$ é dotata di integrale improprio su $(0, +\infty)$.

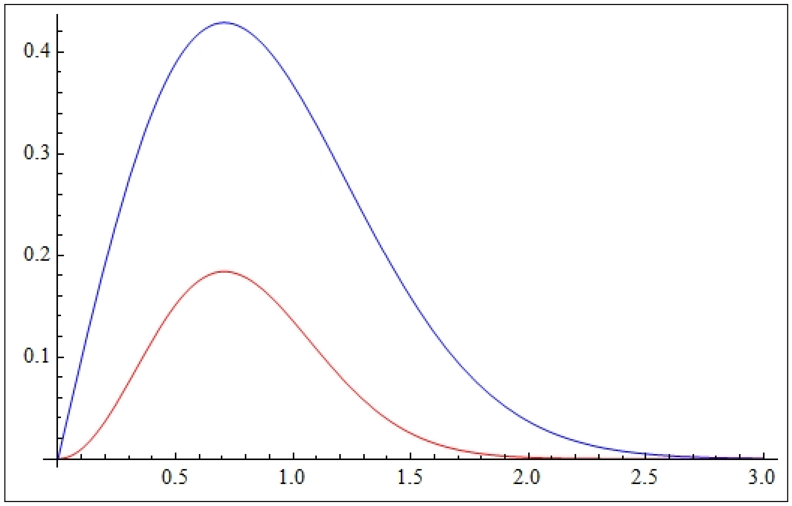

FIGURA 1. Esercizio 2°: $f(x)$ in blu e $f^2(x)$ in rosso

L'esistenza dei due integrali impropri $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ garantisce, per il criterio di convergenza integrale, la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f^2(n).$$

Per quanto riguarda le altre possibili scelte dell'esponente α vale il seguente ragionamento:

$$\forall t > 0 : \quad e^t \geq \frac{1}{k!} t^k, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

implica

$$0 \leq f(n) = ne^{-n^2} = \frac{n}{e^{n^2}} \leq \frac{k!}{n^{2k-1}}, \quad n = 1, 2, 3, ... \quad k = 1, 2, 3...$$

Ne segue pertanto

$$|f(n)|^{\alpha} \leq (k!)^{\alpha} \frac{1}{n^{\alpha(2k-1)}}$$

tenuto conto che le serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}}$$

convergono per $\gamma > 1$, la serie assegnata sará convergente se

$$\alpha(2k-1) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2k-1}$$

L'arbitrarietá di k permette di riconoscere che la serie assegnata é convergente per ogni $\alpha > 0$.

1.3. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' + 2t\,y = f(t)$$

- *determinare la soluz. del problema di Cauchy* $y(0) = 1$ *riferito a* $f(t) \equiv 0$,
- *determinare tutte le soluz. dell'equazione nel caso* $f(t) = t^3$,
- *determinare tutte le soluz. dell'equazione nel caso* $f(t) = e^{-t^2}$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea, diverse dalla soluzione nulla, corrispondono alla relazione

$$\frac{y'}{y} = -2t \quad \to \quad \log(|y|) = -t^2 + c \quad \to \quad |y(t)| = e^{-t^2+c}$$

Tenuto presente che tali soluzioni non si annullano mai, ovvero hanno segno costante, si riconosce che esse (sia quelle positive che quelle negative) sono tutte comprese nella famiglia

$$y_0(t) = c\,e^{-t^2} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato, $y(0) = 1$, é

$$y_1(t) = e^{-t^2}$$

$\boxed{f(t) = t^3}$

Tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' + 2t\,y = t^3$$

sono espresse da $y_1(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$ essendo le $y_0(t)$ le precedenti soluzioni dell'omogenea e $\overline{y}(t)$ una qualsiasi soluzioni dell'equazione completa in studio.
La $\overline{y}(t)$ puó essere cercata come un polinomio $a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$: sostituendo nell'equazione si ricava

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

Pertanto tutte le soluzioni sono

$$y_2(t) = c\,e^{-t^2} + \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)$$

$\boxed{f(t) = e^{-t^2}}$

Tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' + 2t\,y = e^{-t^2}$$

sono espresse da $y_1(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$ essendo le $y_0(t)$ le precedenti soluzioni dell'omogenea e $\overline{y}(t)$ una qualsiasi soluzioni dell'equazione completa in studio.
La $\overline{y}(t)$ puó essere cercata come prodotto

$$\overline{y}(t) = u(t)\,.\,e^{-t^2}$$

Sostituendo si ottiene

$$u'(t) = 1 \quad \to \quad u(t) = t$$

Si ha pertanto $\overline{y}(t) = t\,e^{-t^2}$: pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa assegnata sono

$$y_3(t) = c\,e^{-t^2} + t\,e^{-t^2}$$

1.4. Esercizio. *Sia Σ la superficie parametrica*

$$\begin{cases} x = \sin(uv), \\ y = \cos(uv), \\ z = u, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 3/2 \le v \le u, \\ 3/2 \le u \le \pi \end{array}$$

- *scrivere l'equazione del piano tangente nel punto di Σ relativo a $u = 2$, $v = \pi/2$,*
- *calcolare l'area di Σ,*
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\iint_\Sigma \frac{x^2 + y^2}{z}\, d\sigma$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Per determinare il piano tangente occorre determinare un vettore normale alla superficie nel punto assegnato:

$$\overrightarrow{\nu}(u,v) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v\cos(uv) & -v\sin(uv) & 1 \\ u\cos(uv) & -u\sin(uv) & 0 \end{vmatrix} = \{u\sin(uv),\ u\cos(uv),\ 0\}$$

da cui $\overrightarrow{\nu}(2, \pi/2) = \{0,\ -2,\ 0\}$.
Tenuto conto che il punto corrispondente a $u = 2$, $v = \pi/2$ é

$$P_0 = \{0, -1, 2\}$$

l'equazione del piano diventa

$$\nu_x(x-0)+\nu_y(y+1)+\nu_z(z-2) = 0 \quad \to \quad -2(y+1) = 0 \quad \to \quad y+1 = 0$$

Per calcolare l'area occorre determinare l'espressione dell'elemento d'area:

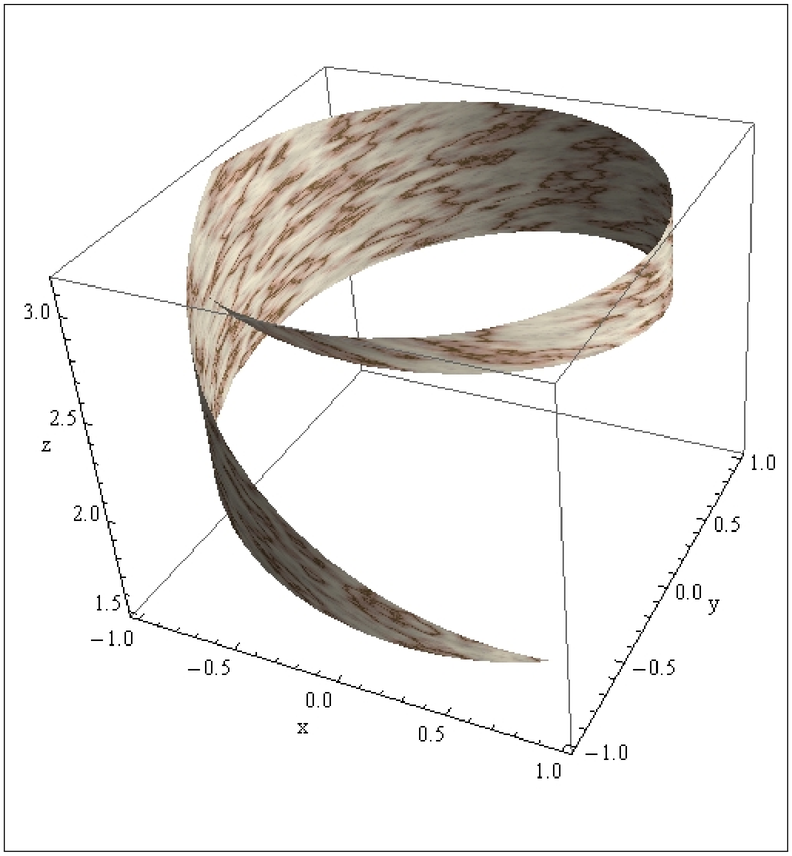

FIGURA 2. $x = \sin(uv)$, $y = \cos(uv)$, $z = u$, $\quad 3/2 \leq v \leq u$, $3/2 \leq u \leq \pi$

$$d\sigma = \sqrt{(u\sin(uv))^2 + (u\cos(uv))^2}\, du\, dv = \, u\, du\, dv$$

da cui

$$Area(\Sigma) = \iint_{\Omega} u\, du\, dv = \int_{3/2}^{\pi} u\, du \int_{3/2}^{u} dv = \frac{9}{16} - \frac{3\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{3}$$

Per quanto concerne l'integrale superficiale riesce

$$\iint_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{z}\, d\sigma = \iint_{\Omega} \frac{1}{u}\, u\, du\, dv = \int_{3/2}^{\pi} du \int_{3/2}^{u} dv = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3}{2}\right)^2$$

1.5. Esercizio. *Assegnato il campo*

$$F = \{e^y,\, xe^y + z,\, y + e^z\}$$

- *determinare un potenziale per F,*

- *determinare il flusso di F uscente da Ω :* $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Il campo F é definito in tutto $\mathbb{R}^3$ pertanto se ha rotore nullo é dotato di potenziale:

$$\mathrm{rot}\,(F) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^y & xe^y + z & y + e^z \end{vmatrix} = \{0, 0, 0\}$$

La costruzione di un potenziale si realizza a tappe:

$$U(x, y, z) = \int e^y \, dx = x\, e^y + v(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x\, e^y + v_y(x, y) = xe^y + z \quad \to \quad v_y(x, y) = z \quad \to \quad v(y, z) = y\, z + g(z)$$

da cui

$$U(x, y, z) = x\, e^y + y\, z + g(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = y + g'(z) = y + e^z \quad \to \quad g'(z) = e^z \quad \to \quad g(z) = e^z + c$$

da cui

$$U(x, y, z) = x\, e^y + y\, z + e^z + c$$

Il flusso uscente da Ω si calcola con il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{F}) \, dx\, dy\, dz$$

tenuto conto che

$$div(F) = x\, e^y + e^z$$

riesce

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\nu} \, d\sigma = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} (x\, e^y + e^z) \, dz = 4\left(e - \frac{1}{e}\right)$$