

**CORSO DI LAUREA IN STATISTICA PER LE ANALISI  
DEMOGRAFICHE E SOCIALI**

**MATEMATICA II**

A.A 2002/2003  
PROF. PAOLO PAPI

PROGRAMMA DEL CORSO

**Prima parte: elementi di geometria analitica nello spazio e sistemi lineari.**

**1. Geometria affine ed euclidea in  $\mathbb{E}^3$ .**

Rette, piani, vettori. Vettori applicati in un punto e loro struttura di spazio vettoriale. Sistemi di riferimento e coordinate. Struttura di spazio vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Equazioni vettoriali e cartesiane di rette e piani, vettori direttori, giacitura. Studio della posizione di rette e piani nello spazio tridimensionale. Ortogonalità. Norma dei vettori. Prodotto scalare standard e sue proprietà. Calcolo di distanze.

**2. Sistemi lineari.**

Sistemi omogenei, non omogenei, consistenti e inconsistenti. Matrici. Operazioni con le matrici e loro struttura di spazio vettoriale. Soluzione dei sistemi lineari mediante l'algoritmo di riduzione a scala (algoritmo di Gauss). Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

**Seconda parte: elementi di algebra lineare.**

**3. Spazi vettoriali.**

Spazi e sottospazi vettoriali. Generatori, basi, dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Costruzione di una base: scarti successivi e teorema del complemento. Tutte le basi hanno la stessa cardinalità (senza dimostrazione): nozione di dimensione. Rango righe e rango colonne di una matrice (la dimostrazione dell'uguaglianza di rango righe e rango colonne è omessa). Teorema di Rouche'-Capelli. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann (senza dimostrazione). Somma diretta di sottospazi.

#### 4. Applicazioni lineari.

Condizioni per l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine; relazione fra le loro dimensioni: teorema di "nullità più rango". Isomorfismi. Matrice associata a un'applicazione lineare e a una coppia di basi. Costruzione di applicazioni lineari con condizioni assegnate. Matrici non singolari e matrici di transizione. Inversa di una matrice non singolare.

Determinanti: loro definizione tramite lo sviluppo di Laplace. Proprietà dei determinanti (senza dimostrazione): teorema di Binet, determinante della matrice inversa di una matrice invertibile. Legame tra l'invertibilità e il rango di una matrice (senza dimostrazione). Teorema di Cramer (senza dimostrazione). Calcolo dell'inversa di una matrice non singolare tramite l'algoritmo di Gauss.

#### 5. Cenni su autovalori e autovettori.

Operatori e matrici diagonalizzabili. Polinomio caratteristico e calcolo degli autovalori e degli autovettori. Autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzabilità di matrici e operatori (senza dimostrazione).

#### TESTI CONSIGLIATI

- [●] A. Silva, *Algebra Lineare*, Ed. Aracne.
- [●] M. Abate, *Algebra Lineare*, McGraw-Hill.

#### ARGOMENTI D'ESAME.

Sarà richiesto di saper risolvere problemi del tipo seguente.

- (1) Determinazione di equazioni vettoriali e cartesiane di rette e piani in  $\mathbb{E}^3$ .
- (2) Studio di posizioni reciproche di rette e piani in  $\mathbb{E}^3$ .
- (3) Questioni di ortogonalità tra rette e piani in  $\mathbb{E}^3$ .
- (4) Decomposizioni di vettori secondo direzioni assegnate.
- (5) Calcolo di distanze tra punti, rette e piani in  $\mathbb{E}^3$ .
- (6) Risoluzione di sistemi lineari, eventualmente parametrici.
- (7) Riconoscere se un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio.
- (8) Determinare l'indipendenza lineare di un insieme di vettori.
- (9) Estrarre una base da un insieme di generatori.
- (10) Completare a una base un insieme di vettori linearmente indipendenti.
- (11) Determinare equazioni (cartesiane) per un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ .
- (12) Determinare basi e dimensione per somma e intersezione di sottospazi.
- (13) Riconoscere se una somma di sottospazi è diretta.
- (14) Riconoscere se un'applicazione tra spazi vettoriali è lineare.
- (15) Determinare la matrice di un'applicazione lineare rispetto a due basi assegnate.
- (16) Determinare basi per nucleo e immagine di un'applicazione lineare.
- (17) Costruire applicazioni lineari soddisfacenti condizioni assegnate.
- (18) Determinare autovalori e autovettori di un operatore lineare.
- (19) Determinare la diagonalizzabilità di un operatore lineare.

Inoltre sarà richiesto di enunciare definizioni relative alle nozioni basilari introdotte nel corso e di conoscere la dimostrazione delle seguenti proposizioni.

### QUESITI TEORICI

- (1) Sia  $A$  una matrice a  $m$  righe ed  $n$  colonne e  $B \in \mathbb{R}^m$ . Si provi che se  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  è tale che  $AX_0 = B$ , allora

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\} = X_0 + \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}.$$

- (2) Si provi che il sistema lineare  $AX = B$  (ove  $A$  è una matrice a  $m$  righe ed  $n$  colonne) è compatibile se e solo se  $rg(A) = rg((A|B))$ .
- (3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $v_1, \dots, v_n$  vettori in  $V$ . Si provi che  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti se e solo se uno tra essi è combinazione lineare degli altri.
- (4) Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $v_1, \dots, v_n$  vettori in  $V$  non tutti nulli; posto  $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , si provi che esiste un sottoinsieme di  $\{v_1, \dots, v_n\}$  che è una base di  $W$ .
- (5) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e siano  $v_1, \dots, v_k$  vettori in  $V$  linearmente indipendenti, con  $k < n$ . Si provi che esistono vettori  $v_{k+1}, \dots, v_n$  in  $V$  tali che  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ .
- (6) Siano  $V, W$  spazi vettoriali e sia  $F : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Si provi che  $F$  è iniettiva se e solo se  $Ker(F) = \{0\}$ .
- (7) Siano  $V, W$  spazi vettoriali e sia  $F : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare iniettiva. Si provi che se  $v_1, \dots, v_k$  sono vettori in  $V$  linearmente indipendenti allora  $F(v_1), \dots, F(v_k)$  sono linearmente indipendenti.
- (8) Siano  $V, W$  spazi vettoriali,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $w_1, \dots, w_n$  vettori qualsiasi in  $W$ . Si provi che esiste un'unica applicazione lineare  $F : V \rightarrow W$  tale che  $F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n$ .
- (9) Siano  $V, W$  spazi vettoriali,  $dim(V) = n$  e sia  $F : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Si provi che  $n = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$ .
- (10) Si provi che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- (11) Sia  $F : V \rightarrow V$  un operatore lineare su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita. Si provi che gli autovalori di  $F$  sono le radici del polinomio caratteristico di  $F$ .
- (12) Si enunci il criterio di diagonalizzabilità per un operatore lineare  $F$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita.