CORSO DI LAUREA IN STATISTICA PER LE ANALISI DEMOGRAFICHE E SOCIALI

MATEMATICA II

A.A 2001/2002
PROF. PAOLO PAPI

PROGRAMMA DEL CORSO

Prima parte: elementi di geometria analitica nello spazio e sistemi lineari.

1. Geometria affine ed euclidea in $\mathbb{E}^3$.

Rette, piani, vettori. Vettori applicati in un punto e loro struttura di spazio vettoriale. Sistemi di riferimento e coordinate. Struttura di spazio vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Equazioni vettoriali e cartesiane di rette e piani, vettori direttori, giacitura. Studio della posizione di rette e piani nello spazio tridimensionale. Ortogonalità. Norma dei vettori. Prodotto scalare standard e sue proprietà. Calcolo di distanze.

2. Sistemi lineari.

Sistemi omogenei, non omogenei, consistenti e inconsistenti. Matrici. Operazioni con le matrici e loro struttura di spazio vettoriale. Soluzione dei sistemi lineari mediante l'algoritmo di riduzione a scala (algoritmo di Gauss). Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Seconda parte: elementi di algebra lineare.

3. Spazi vettoriali.

Spazi e sottospazi vettoriali. Generatori, basi, dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Costruzione di una base: scarti successivi e teorema del completamento. Tutte le basi hanno la stessa cardinalità (senza dimostrazione): nozione di dimensione. Rango righe e rango colonne di una matrice (la dimostrazione dell'uguaglianza di rango righe e rango colonne è omessa). Teorema di Rouche'-Capelli. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann (senza dimostrazione). Somma diretta di sottospazi.

4. Applicazioni lineari.

Condizioni per l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine; relazione fra le loro dimensioni: teorema di "nullità più rango". Isomorfismi. Matrice associata a un'applicazione lineare e a una coppia di basi. Costruzione di applicazioni lineari con condizioni assegnate. Matrici non singolari e matrici di transizione. Inversa di una matrice non singolare.
Determinanti: loro definizione tramite lo sviluppo di Laplace. Proprietà dei determinanti (senza dimostrazione): teorema di Binet, determinante della matrice inversa di una matrice invertibile. Legame tra l'invertibilità e il rango di una matrice (senza dimostrazione). Teorema di Cramer (senza dimostrazione). Calcolo dell'inversa di una matrice non singolare tramite l'algoritmo di Gauss.

5. Cenni su autovalori e autovettori.

Operatori e matrici diagonalizzabili. Polinomio caratteristico e calcolo degli autovalori e degli autovettori. Autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie e sufficienti per la diagonabilizzabilità di matrici e operatori (senza dimostrazione).

Testi consigliati

[•] R. Procesi, R. Rota, *Lezioni di Algebra Lineare e Geometria*, Ed. Accademia.
[•] M. Abate, *Algebra Lineare*, McGraw-Hill.

Argomenti d'esame.

Sarà richiesto di saper risolvere problemi del tipo seguente.

(1) Determinazione di equazioni vettoriale e cartesiane di rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(2) Studio di posizioni reciproche di rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(3) Questioni di ortogonalità tra rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(4) Decomposizioni di vettori secondo direzioni assegnate.
(5) Calcolo di distanze tra punti, rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(6) Risoluzione di sistemi lineari, eventualmente parametrici.
(7) Riconoscere se un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio.
(8) Determinare l'indipendenza lineare di un insieme di vettori.
(9) Estrarre una base da un insieme di generatori.
(10) Completare a una base un insieme di vettori linearmente indipendenti.
(11) Determinare equazioni (cartesiane) per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
(12) Determinare basi e dimensione per somma e intersezione di sottospazi.
(13) Riconoscere se una somma di sottospazi è diretta.
(14) Riconoscere se un'applicazione tra spazi vettoriali è lineare.
(15) Determinare la matrice di un'applicazione lineare rispetto a due basi assegnate.
(16) Determinare basi per nucleo e immagine di un'applicazione lineare.
(17) Costruire applicazioni lineari soddisfacenti condizioni assegnate.
(18) Determinare autovalori e autovettori di un operatore lineare.
(19) Determinare la diagonalizzabilità di un operatore lineare.

Inoltre sarà richiesto di enunciare definizioni relative alle nozioni basilari introdotte nel corso e di conoscere la dimostrazione delle seguenti proposizioni.

QUESITI TEORICI

(1) Sia A una matrice a m righe ed n colonne e $B \in \mathbb{R}^m$. Si provi che se $X_0 \in \mathbb{R}^n$ è tale che $AX_0 = B$, allora

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\} = X_0 + \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}.$$

(2) Si provi che il sistema lineare $AX = B$ (ove A è una matrice a m righe ed n colonne) è compatibile se e solo se $rg(A) = rg((A|B))$.

(3) Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n$ vettori in V. Si provi che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno tra essi è combinazione lineare degli altri.

(4) Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n$ vettori in V non tutti nulli; posto $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, si provi che esiste un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_n\}$ che è una base di W.

(5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori in V linearmente indipendenti, con $k < n$. Si provi che esistono vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in V tali che $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.

(6) Siano V, W spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che F è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{0\}$.

(7) Siano V, W spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva. Si provi che se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori in V linearmente indipendenti allora $F(v_1), \dots, F(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

(8) Siano V, W spazi vettoriali, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $w_1, \dots, w_n$ vettori qualsiasi in W. Si provi che esiste un'unica applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n$.

(9) Siano V, W spazi vettoriali, $dim(V) = n$ e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che $n = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$.

(10) Si provi che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(11) Sia $F : V \to V$ un operatore lineare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Si provi che gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico di F.

(12) Si enunci il criterio di diagonalizzabilità per un operatore lineare F su uno spazio vettoriale V di dimensione finita.