Corso di Laurea in Fisica – Test di Geometria del 14-12-2012 – Prof. Paolo Papi

Il test deve essere svolto individualmente in un'ora; non si possono consultare testi o dispense. Scrivere di seguito, sotto il numero che indica la domanda, i NUMERI corrispondente alle risposte esatte e $\emptyset$ se nessuna risposta è esatta. V denota uno spazio vettoriale di dimensione finita.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Domanda 1 Se $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti allora

1. ogni sottoinsieme di $v_1, \ldots, v_m$ è linearmente indipendente.
2. esiste un sottoinsieme di $v_1, \ldots, v_m$ dipendente.
3. ogni sottoinsieme di $v_1, \ldots, v_m$ è linearmente dipendente.

Domanda 2 ll rango di una matrice A

1. è il numero di righe non nulle di A.
2. è il numero di colonne non nulle di una forma a gradini di A;
3. è l'ordine di un minore non nullo di A.

Domanda 3 Supponiamo che $\det(A) = 4$: quanto vale $\det(A\, A^t\, A^{-1})$?

1. 4;
2. non si può calcolare con le informazioni date.
3. -4.

Domanda 4 Dire quale dei seguenti sottoinsiemi NON è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrice quadrate 2×2 a coefficienti reali.

1. $U = \{A \in V \mid A^t\, A = I_n\}$.
2. $U = \{A \in V \mid tr(A) = 0\}$.
3. $U = \{A \in V \mid tr(A) = 1\}$.
4. $U = \{A \in V \mid a_{11} = 0\}$.
5. $U = \{A \in V \mid n \text{ elementi sono nulli}\}$.
6. $U = \{A \in V \mid n \text{ fissati elementi sono nulli}\}$.
7. $U = \{A \in V \mid a_{11}a_{22} = 0\}$.

Domanda 5 L'affermazione: "se v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2" è

1. vera;
2. falsa.

Domanda 6 Stabilire quali delle applicazioni seguenti sono lineari.

1. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
2. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
3. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3)$.
4. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_3 + x_2, x_2)$.
5. $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & a-d+c-b \end{pmatrix}.$$
6. $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 t + (a_1 - a_2 + a_0)t^3$.
7. $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = t$.

Domanda 7 Se v è un autovettore per F di autovalore m, allora v

1. è autovettore per F^2 di autovalore $2m$;
2. è autovettore per F^2 di autovalore m^2;
3. non è detto che v sia autovettore di F^2.

Domanda 8 Sia V uno spazio vettoriale complesso e $F \in End(V)$. Se F è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ allora

1. F è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$;
2. F non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$;
3. non si può trarre nessuna conclusione con le informazioni date.

Domanda 9 Sia $AX = b$ un sistema lineare con matrice dei coefficienti quadrata. Se il sistema è compatibile, allora

1. il sistema ha soluzione unica;
2. $\det(A) \neq 0$;
3. $\det(A) = 0$.

Domanda 10 Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra lo spazio V delle matrici antisimmetriche 3×3 e lo spazio W dei polinomi di grado minore di 7 con termine noto nullo. Allora

1. F è un isomorfismo;
2. F non è iniettiva;
3. F non è suriettiva;

Domanda 11 Sia $F \in End(V)$ un operatore avente autovalori distinti:

1. F è diagonalizzabile;
2. se gli autovalori sono in numero uguale a $\dim(V)$, allora F è diagonalizzabile;
3. non è possibile stabilire se F è diagonalizzabile con le sole informazioni date.

Domanda 12 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare. Allora

1. $Ker(F) \cap Im(F) = \emptyset$;
2. $Ker(F) + Im(F) = V$
3. $Ker(F) \cap Im(F) = \emptyset \iff Ker(F) + Im(F) = V$

Domanda 13 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k^2+2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$

1. per ogni $k \in \mathbb{C}$;
2. per $k \neq \pm i$;
3. per $k = \pm i$.

Domanda 14 Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni seguenti $Ker(F) = \mathbb{R}(1,1,1) \oplus \mathbb{R}(1,1,0)$, $F(1,0,0) = (2,0,0)$. La matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo è

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
3. non è possibile determinare la matrice.

Domanda 15 Sia $S : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_2[x]$, l'operatore lineare $S(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2 x$. S è diagonalizzabile ?

1. Sì;
2. no;
3. dipende da $\mathbb{K}$.

Domanda 16 Sia $F \in End(V)$ un operatore tale che $F^2 = F$: I possibili autovalori di F sono

1. $0, 1$;
2. 0;
3. 1;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Domanda 17 Supponiamo che il polinomio caratteristico di $F \in End(V)$ sia $(t-1)^2(t-2)$. Allora

1. F è diagonalizzabile;
2. F non è diagonalizzabile;
3. non è possibile stabilire se F è diagonalizzabile con le sole informazioni date.

Domanda 18 Le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ possono essere simili ?

1. Sì;

2. no;

newpage **Soluzioni**

1. 1
2. $\emptyset$
3. 1
4. 1,3,5,7
5. 2
6. 2,4,5,6
7. 2
8. 1
9. $\emptyset$
10. 3
11. 2
12. 3
13. 2
14. $\emptyset$
15. 2
16. 1
17. 3
18. 2