Corso di Laurea in Matematica– Test di Algebra 2 del 27-3-2012 – Prof. Paolo Papi

Il test deve essere svolto individualmente in un'ora e mezzo; non si possono consultare testi o dispense. Usare le convenzioni tenute a lezione sul prodotto di permutazioni ($\alpha\beta = \alpha \circ \beta$). Gli esercizi con l'asterisco sono più impegnativi.

Esercizio 1 In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sia $x = \alpha\beta^2\gamma^{-1}$. Scrivere x come prodotto di cicli disgiunti, di trasposizioni e di trasposizioni adiacenti. Calcolare l'ordine e la parità di x.

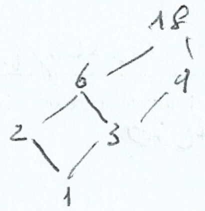
$x = (1\,5\,6\,7)(3\,4\,8) = (1\,7)(1\,6)(1\,5)\,(3\,8)(3\,4)$

$o(x) = 4 \cdot 3 = 12 \qquad sgn(x) = -1$

Esercizio 2 Sia $G = U(27)$. Determinare il reticolo dei sottogruppi di G (disegnandone il diagramma di Hasse). Determinare esplicitamente i sottogruppi di ordine minore o uguale a 6. Determinare l'inverso di $\overline{5}$.

$U(27) = U(3^3) \cong C_{\varphi(27)} = C_{18} = \langle \overline{2} \rangle$

Il reticolo è isomorfo a



$\{\overline{1}\}$

$\{\overline{1}, \overline{26}\}$

$\{\overline{1}, \overline{10}, \overline{19}\}$

$\{\overline{1}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{26}, \overline{19}, \overline{17}\}$

Esercizio 3

a. Dimostrare che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine k per $k = 13, 26, 35$.

b. Provare che $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

a. $\langle (1, \ldots, 13) \rangle \quad \langle (1 \ldots 13)(14, 15) \rangle \quad \langle (1, \ldots, 7)(8, \ldots, 12) \rangle$

b. $f(gh) = f(g)f(h) \iff (gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$

$\iff h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} \iff hg = gh$

Esercizio 4 Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una giustificazione se l'affermazione è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a un suo sottogruppo proprio.

VERO, $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z} \quad \forall n \neq 0$

2. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

FALSO, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ non è ciclico

3. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a un sottogruppo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

VERO $\mathbb{Z} \cong \langle x \rangle \quad \forall x \neq (0,0)$

4. $\mathbb{Z}$ è isomorfo al sottogruppo di $\mathbb{Q}$ generato da $1/p, 1/q$, p, $q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$.

VERO, $\langle 1/p, 1/q \rangle = \langle 1/pq \rangle$

5. Se G è finito allora $Aut(G)$ è finito.

VERO, $Aut(G) \subseteq S(|G|)$ che ha $|G|!$ elementi

6. Se $Aut(G)$ è finito allora G è finito.

FALSO, $Aut(\mathbb{Z}) \cong C_2$

7. Se G è finito allora $|Aut(G)| \geq |G|$.

FALSO $Aut(C_n) \cong U(n)$ e $\varphi(n) < n$

8. Se G è finito allora $|Aut(G)| \leq |G|$.

FALSO $Aut(V) \cong S_3$ (V Klein)

9. Se H, K sono normali in G e $H \cong K$ allora $G/H \cong G/K$.

FALSO $2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$ ma $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

10*. Se H, K sono normali in G e $G/H \cong G/K$ allora $H \cong K$.

FALSO $C_2\times C_4 / C_2\times C_2 \cong C_2$, $C_2\times C_4 / 1\times C_4 \cong C_2$

11*. $\mathbb{Q}$ è isomorfo a un suo sottogruppo proprio [Suggerimento: cercare di capire come sono fatti gli omomorfismi $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.] FALSO

$\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ è $\mathbb{Z}$-lineare, quindi

$m\varphi(1) = \varphi(m) = \varphi(n \cdot \frac{m}{n}) = n\varphi(\frac{m}{n}) \Rightarrow \varphi(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}\varphi(1)$.

In particolare, se $\varphi(1) \neq 0$, allora φ è un automorfismo.

Se esistesse $\psi: \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H < \mathbb{Q}$, detta $i: H \to \mathbb{Q}$ l'inclusione, $i\circ\psi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ non sarebbe suriettivo

Esercizio 5 Per $n \in \mathbb{N}$ sia Dic_n il gruppo generato da un elemento a di ordine $2n$ e da un elemento x tale che $x^2 = a^n$, $xax^{-1} = a^{-1}$. Dimostrare che $|Dic_n| = 4n$. Identificare Dic_2 a meno di isomorfismo.

$o(x) = 4$ $\quad (x^4 = a^{2n} = 1, \quad x^2 = a^n \neq 1)$

$Dic_n = \{1, a, \dots, a^{2n-1}, x, ax, \dots, a^{2n-1}x\}$

Infatti $\quad xa = a^{-1}x = a^{2n-1}x \quad (\Rightarrow xa^k = a^{2n-k}x)$

$x^2 a = a^{n+1}$

Per $n = 2$ $\quad x \mapsto i$, $a \mapsto j$ induce un isomorfismo tra Dic_2 e il gruppo Q delle unità dei quaternioni